Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 6 (1934)

Artikel: Quaternionenringe.
Autor: Fueter, Rud.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7590

Quaternionenringe

Von RUD. FUETER, Zürich

In einer grundlegenden, tiefgehenden Abhandlung hat Herr BRANDT [1]) die Arithmetik der Quaternionenalgebren mit rationalem Zentrum studiert. Seine Ueberlegungen werden wesentlich mit formentheoretischen Mitteln bewiesen. Im folgenden untersuche ich mit rein arithmetischen Methoden dieselben Algebren. Im *1. Abschnitte* gebe ich einige Sätze über die Grundzahl der Algebren. Die hier entwickelte Methode gestattet die Brandt'schen Resultate ohne Formentheorie zu beweisen, wie ich an anderer Stelle zeigen werde. Im *2. und 3. Abschnitte* studiere ich die Brandt'schen Algebren relativ zu einem in ihr enthaltenen quadratischen Körper. Diese Fragestellung führt zur Aufstellung gewisser Quaternionenringe, die eine weitgehende Analogie zu den Ringen in quadratischen Körpern besitzen. Im *4. Abschnitte* stelle ich alle maximalen Integritätsbereiche auf, in denen zwei ganze, und konkordante nicht kommutative Quaternionen liegen. Das gefundene Resultat enthält in sich die Lösung, die LATIMER [2]) im Falle der verallgemeinerten Quaternionen angegeben hat. Vergleiche hierzu auch die K. HEY'sche Dissertation [3]). Die eingeführten Quaternionenringe sind, wie jetzt im *5. Abschnitte* gezeigt werden kann, nur Spezialfälle allgemeinerer Quaternionenringe. Der *6. Abschnitt* bringt die Ringidealtheorie. Die Ringideale besitzen eine *kanonische Relativbasis* in bezug auf den quadratischen Unterkörper. Da umgekehrt durch die kanonische Basis ein Ringideal stets gegeben ist, so kann man alle Ringideale wirklich aufstellen. Ihre Einteilung in Ringidealklassen *(7. Abschnitt)* wird in gewohnter Weise definiert. Die kanonische Relativbasis läßt im *8. Abschnitt* einen bemerkenswerten Zusammenhang einesteils mit der Gruppe der unimodularen linearen Substitutionen eines quadratischen Körpers, andernteils mit der Theorie gewisser Hermite'scher Formen erkennen. Aequivalenten Ringidealen entsprechen äquivalente Hermite'sche Formen.

Von der reichhaltigen Literatur möchte ich die interessanten Abhandlungen von WENKOW [4]) hervorheben. Sie beziehen sich allerdings nur

[1]) *H. Brandt:* Idealtheorie in Quaternionenalgebren. Math. Ann. 99. S. 1 (1928).

[2]) *C. G. Latimer:* Arithmetics of generalized Quaternion algebras. American Journal of Math. Vol. XLVIII, 1, S. 57 (1926).

[3]) *K. Hey:* Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen. Hamburg, 1929, Dissertation.

[4]) *B. Wenkov:* Ueber die Arithmetik der Quaternionen. Bull. Acad. Sc. de l'U.R.S.S. 1922, S. 205, 221, (russisch).

auf den Hurwitz'schen Fall der Algebren, berühren sich aber in manchen Punkten mit meinen Ausführungen, wie ich gelegentlich zeigen werde. Außerdem hat KORINEK[5]) die in den Brandt'schen Algebren enthaltenen quadratischen Körper untersucht. Insbesondere hat er den Satz, daß die Primteiler der Grundzahl in keinem dieser quadratischen Körper in zwei verschiedene Primideale zerfallen können, bewiesen. Diese Eigenschaft ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, wie er zeigt.

In der Bezeichnungsweise schließe ich mich im allgemeinen der Brandt'schen Abhandlung an, auf die ich verweise.

1. Hilfsätze

Es sei $\mathfrak{Q}$ eine Brandt'sche Quaternionenalgebra, d. h. eine Algebra mit rationalem Zentrum. I sei ein maximaler Integritätsbereich in $\mathfrak{Q}$, und $\omega_0 = 1, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ eine reduzierte Basis von I. Setzt man

$$\omega_n = \sum_{(k)} t_{kn} i_k ,$$

wo $i_0 = 1$, i_k, $k = 1, 2, 3$ die Quaternioneneinheiten sind, so ist:

$$d = \pm 2^2 |t_{ik}| \neq 0 ,$$

die Grundzahl von $\mathfrak{Q}$. Wir schließen den Fall $d = -1$ aus, d. h. den einzigen Fall, in dem $\mathfrak{Q}$ keine Divisionsalgebra ist. Wir setzen ferner $\omega_4 = \omega_1$, $\omega_5 = \omega_2$, und

$$o_k = \omega_{k+1}\,\omega_{k+2} - \omega_{k+2}\,\omega_{k+1}, \quad k = 1, 2, 3 .$$

1. Hilfssatz: $o_i o_k / d$ ist ein Quaternion von I, wo i, k alle Kombinationen der Zahlen 1, 2, 3 durchläuft. Insbesondere ist $n(o_k)/d$ eine ganze rationale Zahl.

Nach den von BRANDT angegebenen Formeln ist[6]):

$$o_i = \sum_{(j)} \mathfrak{g}_{ji}\,\omega_j , \quad o_i o_k = \sum_{(jl)} \mathfrak{g}_{ji}\,\mathfrak{g}_{lk}\,\omega_j \omega_l ,$$

also wegen $\omega_j \omega_l = \sum_{(n)} w_{njl}\,\omega_n$:

$$o_i o_k = \sum_{(n,j,l)} \mathfrak{g}_{ji}\,\mathfrak{g}_{lk}\,w_{njl}\,\omega_n = \sum_{(n)} s_n\,\omega_n ,$$

---

[5]) *V. Korinek:* Kvadraticka Telesa v Kvaternionovych okruzich (Les corps quadratiques dans les anneaux des quaternions). Z Vestniku Kralovske Ceske spolecnosti Nauk. 1930. Prag.

[6]) *Brandt,* S. 10, art. 22.

wo: $n = 0$: $z_0 = \frac{1}{2}\left\{\sum_{(l)} g_{0l}\,(\mathfrak{g}_{0i}\,\mathfrak{g}_{lk} + \mathfrak{g}_{0k}\,\mathfrak{g}_{li}) - \sum_{(jl)} g_{jl}\,\mathfrak{g}_{ji}\,\mathfrak{g}_{lk} \pm \mathfrak{G}_{ik}\right\}$,

$$\mathfrak{G}_{ik} = \begin{vmatrix} \mathfrak{g}_{01} & \mathfrak{g}_{02} & \mathfrak{g}_{03} \\ \mathfrak{g}_{i1} & \mathfrak{g}_{i2} & \mathfrak{g}_{i3} \\ \mathfrak{g}_{k1} & \mathfrak{g}_{k2} & \mathfrak{g}_{k3} \end{vmatrix} .$$

$\mathfrak{G}_{ik}$ ist null, wenn $i = k$ ist. Sind dagegen i, k zwei verschiedene der Zahlen 1, 2, 3, und h die dritte, so ist:

$$\mathfrak{G}_k = \pm \frac{\partial |\mathfrak{g}_{ik}|}{\partial \mathfrak{g}_{oh}} = \pm d g_{0h} .$$

Daher wird, wegen $\mathfrak{g}_{ji} = d^{-1} \frac{\partial |g_{ik}|}{\partial g_{ji}}$:

$$z_0 = \tfrac{1}{2}\,(-d\,\mathfrak{g}_{ik} \pm \mathfrak{G}_{ik}) ,$$

und diese Zahl ist immer durch d teilbar. Denn für $i = k$ ist $\mathfrak{G}_{ik}$ null und $\mathfrak{g}_{ii}$ gerade. Für $i \neq k$ ist:

$$z_0 = \tfrac{1}{2} d\,(-\mathfrak{g}_{ik} \pm g_{0h}) .$$

Setzt man in den genannten Brandt'schen Formeln $\tau = k$, $x_k = 1$, $y_h = 1$ und alle übrigen x und $y = 0$, so wird $s_i = 1$, $s_k = s_h = 0$, und: $g_{0h} \pm \mathfrak{g}_{ik}$ eine gerade Zahl.

$$n \neq 0\colon\ z_n = \tfrac{1}{2} \sum_{(j)} g_{0j}\,(\mathfrak{g}_{ni}\,\mathfrak{g}_{jk} + \mathfrak{g}_{ji}\,\mathfrak{g}_{nk}) \pm \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}_{nik} = \pm \tfrac{1}{2}\mathfrak{G}_{nik} ,$$

$$\mathfrak{G}_{nik} = \begin{vmatrix} \mathfrak{g}_{n1} & \mathfrak{g}_{n2} & \mathfrak{g}_{n3} \\ \mathfrak{g}_{i1} & \mathfrak{g}_{i2} & \mathfrak{g}_{i3} \\ \mathfrak{g}_{k1} & \mathfrak{g}_{k2} & \mathfrak{g}_{k3} \end{vmatrix} .$$

$\mathfrak{G}_{nik}$ ist null, wenn $i = k$, oder $n = i$, oder $n = k$. Ist dagegen wie oben $i \neq k$, $n = h$, so ist $\mathfrak{G}_{nik} = \pm d g_{00} = \pm 2d$, wodurch bewiesen ist, daß z_n stets durch d teilbar ist, also $o_i o_k / d$ in I.

Nun ist aber:

$$\bar{o}_k = \bar{\omega}_{k+2}\,\bar{\omega}_{k+1} - \bar{\omega}_{k+1}\,\bar{\omega}_{k+2} = -\,\bar{\omega}_{k+2}\,\omega_{k+1} + \bar{\omega}_{k+1}\,\omega_{k+2} =$$

$$= \omega_{k+2}\,\omega_{k+1} - \omega_{k+1}\,\omega_{k+2} = -\,o_k .$$

Wenn also o_k^2/d in I ist, so ist es auch $n(o_k)/d$, d. h. als rationale Zahl eine *ganze* rationale Zahl.

2. Hilfssatz: Sind ω', Ω', ω'', Ω'' irgend vier Quaternionen von I, so ist auch $(\omega'\Omega' - \Omega'\omega')(\omega''\Omega'' - \Omega''\omega'')/d$ in I. Insbesondere ist

$$n(\omega'\Omega' - \Omega'\omega')/d \text{ eine ganze rationale Zahl.}$$

Denn es ist:

$$\omega = \sum_{(k)} x_k \omega_k, \quad \Omega = \sum_{(j)} X_j \omega_j, \quad \omega\Omega - \Omega\omega = \sum_{(l)}{}' s_l o_l,$$

somit wird:

$$(\omega'\Omega' - \Omega'\omega')\ (\omega''\Omega'' - \Omega''\omega'') = \sum_{(l,k)}{}' s_l' s_k''\ o_l o_k,$$

woraus der Satz ohne weiteres aus Hilfsatz 1 folgt. Die zweite Aussage folgt aus:

$$\overline{\omega\Omega - \Omega\omega} = \bar{\Omega}\bar{\omega} - \bar{\omega}\bar{\Omega} = -(\bar{\Omega}\omega - \omega\bar{\Omega}) = \Omega\omega - \omega\Omega = -(\omega\Omega - \Omega\omega).$$

Wir bilden jetzt das linksseitige Ideal (o_1, o_2, o_3). Dasselbe enthält nach dem ebengesagten alle Ausdrücke $\omega\Omega - \Omega\omega$, wo ω, Ω irgend zwei Quaternionen von I sind. Dieses Ideal ist aber auch rechtseitig. Denn ist ω irgend ein Quaternion von I, so ist:

$$\begin{aligned} \omega o_k &= (\omega\omega_{k+1})\ \omega_{k+2} - \omega_{k+2}(\omega\omega_{k+1}) + (\omega_{k+2}\,\omega - \omega\omega_{k+2})\ \omega_{k+1} \\ o_k\,\omega &= \omega_{k+1}(\omega_{k+2}\,\omega) - (\omega_{k+2}\,\omega)\ \omega_{k+1} + \omega_{k+2}(\omega\omega_{k+1} - \omega_{k+1}\,\omega). \end{aligned}$$

Nach dem eben gesagten ist aber die rechte Seite wieder im Ideal. Dieses zweiseitige Ideal bezeichnen wir mit $\mathfrak{d}$:

$$\mathfrak{d} = (o_1, o_2, o_3).$$

Nun ist:

$$\omega_i o_i + o_i \omega_i = \mp d + g_{0i} o_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

somit ist auch d in $\mathfrak{d}$. Setzt man:

$$o_0 = \sum_{(k)} g_{0k}\ \omega_k,$$

so wird:

$$o_0 = -d - \omega_1 o_1 - \omega_2 o_2 - \omega_3 o_3.$$

d. h. aber, daß auch o_0 in $\mathfrak{d}$ ist. o_k, $k = 0, 1, 2, 3$, ist *eine Basis von* $\mathfrak{d}$. Denn die Determinante des Moduls ist $|\, g_{ik} \,| = d^2$, und anderseits ist d Faktor der Normen aller Quaternionen von $\mathfrak{d}$, d. h.

$$n(\mathfrak{d}) = d.$$

$\mathfrak{d}$ heiße das *Grundideal.* Da übrigens auch:

$$o_i o_k - o_k o_i = \pm 2 d \omega_h \pm g_{0h} d, \quad i \neq k, \; i \neq h, \; k \neq h,$$

so sieht man, daß zwischen den Idealen $\mathfrak{o} = (1, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ und $\mathfrak{d} = (o_0, o_1, o_2, o_3)$ eine merkwürdige Reziprozität stattfindet. Die Frage nach den Diskriminantenteilern ist nicht anderes wie die Idealtheorie in $\mathfrak{d}$.

Nach den obigen Formeln wird:

$o_i o_k = d\left(\frac{1}{2}\left(-g_{ik} \pm g_{ik}\right) \pm \omega_h\right)$, i, k, h eine Permutation von 1, 2, 3.

Somit ist d die größte ganze rationale Zahl, für die $o_i o_k / d$ in I ist.

3. Hilfssatz: d ist die größte ganze rationale Zahl, für die $o_i o_k / d$ *in I liegt* $(i \neq k)$.

2. Quadratische Ringe in I

Es sei ω irgend ein nicht rationales Quaternion in I. ω genüge der quadratischen Gleichung:

$$x^2 - s(\omega)\, x + n(\omega) = 0,$$

wo nach Voraussetzung Spur und Norm ganze rationale Zahlen sind. Es gilt der

1. Satz: *Alle Quaternionen von* $\mathfrak{Q}$, *die mit* ω *vertauschbar sind, haben die Gestalt:*

$$x + y\omega,$$

wo x, y *rational sind.*

Denn ist Ω irgend ein Quaternion von $\mathfrak{Q}$, das mit ω *nicht* vertauschbar ist: $\omega\Omega - \Omega\omega \neq 0$, so bilden $1, \omega, \Omega, \omega\Omega$ vier linear unabhängige Quaternionen. Wäre nämlich:

$$x_0 + x_1 \omega + x_2 \Omega + x_3 \omega\Omega = 0,$$

wo die x_k Zahlen sind, so folgt durch Multiplikation von links mit ω, nachheriger Multiplikation von rechts mit ω und Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$(x_2 + x_3\omega)(\omega\Omega - \Omega\omega) = 0,$$

woraus nach Annahme: $x_2 + x_3\omega = 0$; d. h. ω wäre entweder eine Zahl gegen Annahme, oder $x_2 = x_3 = 0$, woraus $x_0 + x_1\omega = 0$, also auch $x_0 = x_1 = 0$ folgte.

Daher ist jedes Quaternion Ξ von $\mathfrak{Q}$ in der Gestalt:

$$\Xi = x_0 + x_1\omega + x_2\Omega + x_3\omega\Omega, \; x_k \text{ rational}$$

darstellbar. Ist daher Ξ mit ω vertauschbar, so muß:

$$\omega\Xi - \Xi\omega = (x_2 + x_3\omega)(\omega\Omega - \Omega\omega) = 0$$

sein, d. h. $x_2 = x_3 = 0$.

Aus dem Beweise folgt:

2. Satz: *Sind ω, Ω zwei nicht vertauschbare Quaternionen von I, so sind 1, ω, Ω, $\omega\Omega$ linear unabhängig.*

Wir können ω eine der beiden Wurzeln seiner quadratischen Gleichung zuordnen. Die Quaternionen $x + y\omega$ sind dann allen Zahlen des quadratischen Körpers $k(\omega)$ umkehrbar eindeutig zugeordnet, falls x, y alle rationalen Zahlen durchlaufen. Nach Satz 1 ist jedem mit ω vertauschbaren Quaternion eine solche Zahl von $k(\omega)$ zugeordnet. Wir bezeichnen die *Zahlen* von $k(\omega)$ gleich wie die zugeordneten Quaternionen, sprechen also von jetzt an von den *Zahlen* von $k(\omega)$.

Durchlaufen die x, y nur die *ganzen* rationalen Zahlen, so erhält man einen Ring $r(\omega)$ von $k(\omega)$. Da ω ein ganzes Quaternion ist, wird sein Führer eine ganze rationale Zahl q sein. Auch hier gilt, daß die Quaternionen $x + y\omega$, x, y ganz und rational, umkehrbar eindeutig auf die Zahlen des Ringes $r(\omega)$ bezogen sind.

3. Spezielle Quaternionenringe

Es sei ω ein ganz beliebiges nicht rationales *ganzes* Quaternion. Wir nehmen ein weiteres ganzes Quaternion Ω, das nur durch folgende Bedingungen eingeschränkt ist: a) ω, Ω sind nicht vertauschbar: $\omega\Omega - \Omega\omega \neq 0$. b) ω, Ω sind *konkordant*, d. h. ihre Zwischennorm $n(\omega, \Omega)$ ist ganz

und rational. ω, Ω gehören dann sowohl der gleichen Algebra $\mathfrak{Q}$ als dem gleichen maximalen Integritätsbereich I an. $\mathfrak{Q}$ ist sehr einfach zu bestimmen. Denn nach Satz 2 sind $1, \omega, \Omega, \omega\Omega$ linear unabhängig, also muß jedes Quaternion von $\mathfrak{Q}$ in der Gestalt darstellbar sein:

$$\Xi = x_0 + x_1\omega + (x_2 + x_3\omega)\,\Omega,$$

wo die x_k rationale Zahlen sind. Alle I zu bestimmen, wird eine Hauptaufgabe sein.

Wir betrachten zunächst den Integritätsbereich, der durch den Modul $[1, \omega, \Omega, \omega\Omega]$ gegeben ist, d. h. alle Ξ, in denen die x_k ganze rationale Zahlen sind.

3. Satz: *Alle Quaternionen des Moduls* $[1, \omega, \Omega, \omega\Omega]$ *bilden einen Ring.*

Denn wir können jedes Quaternion des Moduls in der Form:

$$\Xi = \xi + \eta\,\Omega,$$

darstellen, wo ξ, η irgend welche Zahlen von $r(\omega)$ sind. Da letztere einen Ring bilden, haben wir nur zu beweisen, daß auch $\Omega\xi$ im Modul ist für ein beliebiges ξ in $r(\omega)$. Man sieht aber leicht, daß die Beziehung gilt:

(a) $$\Omega\xi = \bar{\xi}\Omega + s(\Omega)\xi - n(\xi, \Omega)\ .$$

Die rechte Seite ist im Modul, da $n(\xi, \Omega)$ eine ganze rationale Zahl und $\xi, s(\Omega)\xi$ Zahlen von $r(\omega)$ sind.

$[1, \omega, \Omega, \omega\Omega]$ ist daher ein Integritätsbereich. Wann ist er ein *maximaler*? In diesem Falle haben wir in den Entwicklungen 1.:

$$\omega_1 = \omega,\ \omega_2 = \Omega,\ \omega_3 = \omega\Omega,\ o_3 = \omega\Omega - \Omega\omega,\ \ldots$$

zu nehmen. Aus der Definition der g_{ik} ersieht man, daß:

$$g_{03} = s(\omega\Omega)$$

wird. Setzt man dies in der Formel (1), S. 202 für $i = 3$ ein, so wird:

$$\omega\Omega(\omega\Omega - \Omega\omega) + (\omega\Omega - \Omega)\,\omega\Omega = \mp d + s(\omega\Omega)\,(\omega\Omega - \Omega\omega),$$

oder: $$\pm d = \bar{\Omega}\,\bar{\omega}(\omega\Omega - \Omega\omega) - (\omega\Omega - \Omega\omega)\,\omega\Omega\ .$$

Nun gelten folgende sehr leicht einzusehende Formeln:

$$\text{(b)} \qquad \omega\Omega - \Omega\omega = -(\bar{\omega}\Omega - \Omega\bar{\omega}) = -(\omega\bar{\Omega} - \bar{\Omega}\omega) = \bar{\omega}\bar{\Omega} - \bar{\Omega}\bar{\omega} ,$$

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} (\omega\Omega - \Omega\omega)\,\omega &= -(\bar{\omega}\Omega - \Omega\bar{\omega})\,\omega = \bar{\omega}(\omega\Omega - \Omega\omega) , \\ (\omega\Omega - \Omega\omega)\,\Omega &= -(\omega\bar{\Omega} - \bar{\Omega}\omega)\,\Omega = \bar{\Omega}(\omega\Omega - \Omega\omega) . \end{aligned}$$

Daher wird:

$$\text{(2)} \qquad \pm d = \bar{\Omega}\,\bar{\omega}(\omega\Omega - \Omega\omega) - \bar{\omega}\,\bar{\Omega}(\omega\Omega - \Omega\omega) = n(\omega\Omega - \Omega\omega) .$$

4. Satz: *$1, \omega, \Omega, \omega\Omega$ sind dann und nur dann Basis eines maximalen Integritätsbereiches, wenn $n(\omega\Omega - \Omega\omega) = \pm d$ ist, wo d die Grundzahl der Algebra ist*[7]).

Wir haben noch zu beweisen, daß die Bedingung hinreichend ist. Es sei Ξ irgend ein Quaternion von I. Dann gibt es Zahlen von $k(\omega)$: ξ, η, für die:

$$\Xi = \xi + \eta\Omega .$$

Wir haben zu beweisen, daß ξ, η auch in $r(\omega)$ liegen. Dazu bilden wir:

$$\omega\Xi - \Xi\omega = \eta(\omega\Omega - \Omega\omega),$$

woraus mit $\omega\Omega - \Omega\omega$ von rechts erweitert wegen $n(\omega\Omega - \Omega\omega) = \pm d$: $\pm d\,\eta = (\omega\Xi - \Xi\omega)(\omega\Omega - \Omega\omega)$, folgt. Nach Hilfssatz 2 ist dann aber η sicherlich in I. Wäre nun:

$$\eta = \frac{1}{t}(n + m\omega),$$

wo n, m, t ohne gemeinsamen Teiler und ganz und rational sind, so wäre:

$$\omega = \frac{1}{m}(t\eta - n),\ n(\omega\Omega - \Omega\omega) = \frac{t^2}{m^2} n(\eta\Omega - \Omega\eta) = \pm d .$$

Hätten nun t, m den größten gemeinsamen Teiler $t' > 1$, so wäre $\frac{t}{t'}\eta - \frac{m}{t'}\omega = \frac{n}{t'}$ in I, was unmöglich ist, da t' teilerfremd zu n ist,

[7]) Herr Brandt hat mir brieflich diesen Satz mitgeteilt.

und in I keine gebrochenen rationalen Zahlen liegen. Also muß $t' = 1$ sein, und die obige Gleichung ergibt, da nach Hilfssatz 2 $n(\eta\Omega - \Omega\eta)$ Vielfaches von d ist, $t = \pm 1$. Somit ist η in $r(\omega)$. Dann ist aber auch $\xi = \Xi - \eta\Omega$ in I und in $r(\omega)$, was ebenso zu beweisen ist wie für η.

Mit diesem Satze ist allerdings direkt nichts gewonnen, da bei gegebenem ω, Ω die Grundzahl d noch nicht bekannt ist.

Ist $n(\omega\Omega - \Omega\omega) = \pm d$, so heißt $1, \Omega$ eine *Linksrelativbasis* von I in bezug auf $k(\omega)$. Ist $1, \omega, \Omega, \Omega\omega$ eine Basis, so heißt $1, \Omega$ eine *Rechtsrelativbasis* von I in bezug auf $k(\omega)$. Wegen der Symmetrie der Bedingungsgleichung besteht der

5. Satz: *Jede Linksrelativbasis in bezug auf $k(\omega)$ ist zugleich eine Rechtsrelativbasis in bezug auf $k(\omega)$.*

Man kann daher kurz von einer *Relativbasis* sprechen.

4. Maximale Integritätsbereiche

Wir wollen jetzt an das Problem herangehen, die maximalen Integritätsbereiche zu bestimmen, in denen der unter 3. angegebene Integritätsbereich $[1, \omega, \Omega, \omega\Omega]$ eingebettet ist. Wir setzen:

$$\Delta = \omega\Omega - \Omega\omega, \quad D = n(\omega\Omega - \Omega\omega) \ .$$

D ist dann $\neq 0$ und ein Vielfaches der Grundzahl d der Algebra. Es sei I ein ω, Ω enthaltender maximaler Integritätsbereich. Seine Quaternionen haben die Gestalt:

$$\Xi = \frac{1}{n}(\xi + \eta\Delta), \ \xi, \eta \text{ in } r(\omega), \ n \text{ ganz rational.}$$

Denn wegen (a) ist:

$$\Delta = (\omega - \bar{\omega})\Omega - s(\Omega)\omega + n(\omega, \Omega) \ . \tag{d}$$

Da nach Annahme $\omega - \bar{\omega} \neq 0$ ist, so darf man Ω durch Δ ersetzen. Da Ξ in I liegen soll, und I die ganzen Quaternionen ω, Ω enthalten soll, muß Ξ ganz und mit $\omega, \Delta, \omega\Delta, \Omega, \omega\Omega$ konkordant sein. Dies gibt folgende Bedingungen:

a) $\Xi + \bar{\Xi} = \frac{1}{n}(\xi + \bar{\xi})$ ist ganz und rational.

Wegen (b) und (c) ist nämlich:

$$\eta \Delta + \Delta \bar{\eta} = \eta \Delta - \Delta \bar{\eta} = \eta \Delta - \eta \Delta = 0 \ .$$

b) $\Xi \bar{\Xi} = \frac{1}{n^2}(\xi \bar{\xi} + \eta \bar{\eta} \Delta \bar{\Delta})$ ist ganz und rational.

Denn wegen (b) und (c) ist:

$$\xi \bar{\Delta} \bar{\eta} + \eta \Delta \bar{\xi} = + \eta \xi \Delta - \xi \Delta \bar{\eta} = \xi \eta \Delta - \xi \eta \Delta = 0 \ .$$

c) $n(\omega, \Xi) = \Xi \bar{\omega} + \omega \bar{\Xi} = \frac{1}{n}(\xi \bar{\omega} + \omega \bar{\xi})$ ist ganz und rational.

d) $n(\Delta, \Xi) = \Xi \bar{\Delta} + \Delta \bar{\Xi} = \frac{1}{n}(\eta + \bar{\eta}) \Delta \bar{\Delta}$ ist ganz und rational.

e) $n(\omega \Delta, \Xi) = \Xi \bar{\Delta} \bar{\omega} + \Delta \omega \bar{\Xi} = \frac{1}{n}(\eta \bar{\omega} + \omega \bar{\eta}) \Delta \bar{\Delta}$ ist ganz und rational.

f) $n(\Omega, \Xi) = n\left(\frac{\xi}{n}, \Omega\right) - \frac{y}{n} D$, $\eta = x + y\omega$, x, y ganz und rational.

g) $n(\omega\Omega, \Xi) = n\left(\frac{\xi}{n}, \omega\Omega\right) + \frac{x}{n} D$, $\eta = x + y\omega$, x, y ganz und rational.

Aus a), c) und ebenso aus d), e) folgt:

$$(\omega - \bar{\omega}) \xi \equiv 0 \pmod{n}, \qquad (\omega - \bar{\omega}) \eta D \equiv 0 \pmod{n} \text{ in } k(\omega) \ .$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

A) $(n, (\omega - \bar{\omega})^2) = 1$. Dann darf man $\xi = 0$ setzen. Denn ξ/n ist in $k(\omega)$ ganz. Weil n zum Führer von $r(\omega)$ nach Annahme A) teilerfremd ist, muß ξ/n auch in $r(\omega)$ liegen. Man darf daher statt Ξ auch $\Xi - \frac{\xi}{n}$ nehmen, d. h. $\xi = 0$ setzen. Ebenso darf man annehmen, daß η durch keinen rationalen Teiler von n teilbar ist. Daher folgt aus der zweiten der Kongruenzen, daß $D \equiv 0 \pmod{n}$ sein muß. Ist p^s der größte Primzahlpotenzteiler von p in n, so gibt es wegen b) nur die zwei Möglichkeiten: Entweder ist $D \equiv 0 \pmod{p^{2s}}$, oder es ist $D \equiv 0 \pmod{p^r}$, $2s > r \geqq s$, $\eta \bar{\eta} \equiv 0 \pmod{p^{2s-r}}$. Im zweiten Falle zerfällt p stets in $r(\omega)$. Der erste Fall muß immer auftreten, wenn p nicht zerfällt in $r(\omega)$. Im ersten Falle denkt man sich n und η erweitert mit p^s. Das neue n, η wird wieder gleich bezeichnet, und n bleibt ein Teiler von D. Dann muß, wenn dies für alle p durchgeführt wird, $n = n(\mathfrak{n})$ werden, wo $\mathfrak{n}$ ein Ringideal von $r(\omega)$ ist.

Man nimmt jetzt umgekehrt den größten Teiler n von D, der noch Norm eines Ringideales von $r(\omega)$ wird und zu $(\omega - \bar{\omega})^2$ teilerfremd ist. Es sei $n = n(\mathfrak{n})$ eine solche Darstellung. Ist ν eine Zahl von $\mathfrak{n}$, für die $\nu\bar{\nu}/n$ zu D teilerfremd ist, so setze man:

$$\Delta' = \frac{\nu \Delta}{n}.$$

Δ' ist ganz, da seine Spur null und seine Norm ganz ist. Δ' ist konkordant mit ω, Ω nach c) und f). Also liegt Δ' in einem I. d ist jetzt Teiler von D/n, da:

$$\omega\Delta' - \Delta'\omega = \frac{\nu}{n}(\omega - \bar{\omega})\Delta,\ n(\omega\Delta' - \Delta'\omega) = -(\omega - \bar{\omega})^2 \frac{\nu\bar{\nu}D}{n^2}$$

nur den Faktor D/n, abgesehen von den Teilern von $(\omega - \bar{\omega})^2$, enthält.

Nach dem Bewiesenen kann n einen Primteiler p von D, der in $k(\omega)$ *nicht* zerfällt, nur in gerader Potenz enthalten. Geht p auch in D in gerader Potenz auf, so ist p nicht in d enthalten. Geht dagegen p in D zu ungerader Potenz auf, so ist $n(\Delta') = D'$ genau einmal durch p teilbar. Nun läßt sich jedes andere ganze Quaternion ω' von $\mathfrak{Q}$ in der Form darstellen:

$$\omega' = \xi + \eta\Delta',$$

wo ξ, η Zahlen von $k(\omega)$ sind, deren Nenner zu p teilerfremd sind. ω' genügt der quadratischen Gleichung:

$$x^2 - (\xi + \bar{\xi})x + (\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}D') = 0,$$

deren Diskriminante die Kongruenz befriedigt:

$$(\xi - \bar{\xi})^2 - 4\eta\bar{\eta}D' \equiv (\xi - \bar{\xi})^2 \pmod{4p}.$$

p zerfälllt nicht in $k(\omega)$. Würde es nun in $k(\omega')$ zerfallen, so müßte $(\xi - \bar{\xi})^2$ einer ganzen rationalen Quadratzahl (mod. $4p$) kongruent sein, also p auch in $k(\omega)$ zerfallen, außer wenn $\xi \equiv \bar{\xi}$ wäre. In diesem Falle ist aber p Teiler der Diskriminante von $k(\omega')$. p zerfällt also in keinem $k(\omega')$ in zwei verschiedene Primideale.

Umgekehrt sind alle Primzahlen p, die in D in ungerader Potenz aufgehen, Teiler von d. Denn jedes Quaternion Ξ von I ist $\equiv \xi + \eta \Delta'$, (mod. p), wo ξ, η in $r(\omega)$ sind. Nach (b) und (c) wird daher für zwei Quaternione Ξ', Ξ'' von I:

$$\Xi'\Xi'' - \Xi''\Xi' \equiv \lambda\Delta' \qquad (\text{mod. } p),$$

wo λ in $r(\omega)$ liegt. Das Produkt von zwei solchen Ausdrücken ist durch p teilbar, da es $\Delta'\Delta' = -D'$ ist. Nach Hilfssatz 3 ist daher d durch p teilbar.

6. Satz: *Ist $D = n(\omega\Omega - \Omega\omega)$, so enthält die Grundzahl d der ω, Ω enthaltenden Algebra $\mathfrak{Q}$ alle in D in ungerader Potenz aufgehenden Primzahlen einfach, die in $k(\omega)$ nicht zerfallen, dagegen keine in D aufgehenden Primzahlen, die in $k(\omega)$ in zwei verschiedene Primideale zerfallen oder in D in gerader Potenz aufgehen.*

Man sieht übrigens leicht, daß diejenigen p, die in $k(\omega)$ nicht zerfallen, und in D in gerader Potenz aufgehen, in andern $k(\omega')$ in zwei verschiedene Primideale zerfallen.

Wir bilden jetzt dasjenige I, das außer ω, Ω das Quaternion Δ' enthält, das zu der Zerlegung $n = n(\mathfrak{n})$ gehört. Es fragt sich, ob zu zwei verschiedenen Zerlegungen $n = n(\mathfrak{n}') = n(\mathfrak{n}'')$, $\mathfrak{n}' \neq \mathfrak{n}''$, auch verschiedene I' und I'' gehören. Es sei p^r die höchste Potenz der Primzahl p, die in n aufgehe. Zerfällt p in $k(\omega)$ nicht, so ist $\mathfrak{n}'$ und $\mathfrak{n}''$, durch dieselbe Potenz von p teilbar. Zerfällt dagegen $p = n(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \neq \bar{\mathfrak{p}}$, so sei $\mathfrak{n}'$ genau durch $(p^s)\ \mathfrak{p}^{r-2s}$, $\mathfrak{n}''$ genau durch $(p^t)\ \mathfrak{p}^{r-2t}$ teilbar, wo s, t irgend welche der Zahlen 0, 1, 2, ... r sind. Wir wählen ν', ν'' in $r(\omega)$ und in $\mathfrak{n}'$, resp. $\mathfrak{n}''$ so, daß $(\nu')/(p^s)\,\mathfrak{p}^{r-2s}$ und $(\nu'')/(p^t)\,\mathfrak{p}^{r-2t}$ zu p teilerfremd sind. Ferner sei etwa $s < t$. Gehören dann:

$$\Delta' = \frac{\nu'\Delta}{n} \quad \text{und} \quad \Delta'' = \frac{\nu''\Delta}{n}$$

demselben I an, so muß:

$$n(\Delta', \Delta'') = \frac{D}{n^2}(\nu'\bar{\nu}'' + \nu''\bar{\nu}')$$

ganz und rational sein. Nun sind D und n genau durch p^r teilbar. Somit muß:

$$\nu'\bar{\nu}'' + \nu''\bar{\nu}' \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mathfrak{p}^r)$$

sein. Der erste Summand ist genau durch $\mathfrak{p}^{r+t-s}$, also durch $\mathfrak{p}^r$ teilbar, der zweite aber blos durch $\mathfrak{p}^{r-t+s}$, da $s < t$. Also sind Δ' und Δ'' nicht konkordant, und die beiden legen verschiedene I fest. Der Faktor p^r, wo p zerfällt, erzeugt daher genau $r+1$ verschiedene I. Das Produkt der $(r+1)$ für alle in D enthaltenen, in $k(\omega)$ zerfallenden p ergibt die Gesamtzahl der I.

B) $\underline{((\omega-\bar{\omega})^2, n) \neq 1.}$

Es sei:

$\Xi = \frac{\xi+\eta\Omega}{n}$, ξ, η in $r(\omega)$, $\frac{\xi}{n'}$, $\frac{\eta}{n'}$ nicht in $r(\omega)$, $n' \neq 1$ Teiler von n, ganz und konkordant mit ω, Ω. *Dann muß n ein Teiler von D sein.* Denn ist p^r die größte in D enthaltene Primzahlpotenz von p, so kann Ξ niemals für $p^{r+1} = n$ ganz und kongruent mit ω, Ω sein, wo $r > 0$. Nach Annahme ist nämlich:

$$\Xi\omega - \omega\Xi = \frac{\eta\Delta}{p^{r+1}}, \quad \Xi\Delta - \frac{\eta\Delta}{p^{r+1}}\bar{\Omega} = \frac{\xi\Delta}{p^{r+1}}$$

ganz und konkordant mit ω, Ω, daher nach (b), (c):

$$n\left(\frac{\xi\Delta}{p^{r+1}}, \Omega\right) = \frac{(\xi\Omega - \Omega\xi)\Delta}{p^{r+1}} = -\frac{y}{p^{r+1}}D,$$

$$n\left(\frac{\eta\Delta}{p^{r+1}}, \Omega\right) = \frac{(\eta\Omega - \Omega\eta)\Delta}{p^{r+1}} = -\frac{v}{p^{r+1}}D,$$

wo $\xi = x + y\omega$, $\eta = u + v\omega$ ist, ganz und rational. Es müßte somit y, v durch p teilbar sein, d. h. auch x, u, da $\xi\bar{\xi}$, $\eta\bar{\eta}$ durch p^2 teilbar sind. Dies wiederspricht der Annahme.

Ist p ein ungerader Primteiler von D und $(\omega - \bar{\omega})^2$, so setzen wir voraus, daß für $\omega' = \omega - \bar{\omega}$, niemals ω'/p^s ganz und konkordant mit Ω, d.h. $n\left(\frac{\omega'}{p^s}, \Omega\right)$ ganz und rational ist, für irgend ein $s > 0$. Denn sonst nehme man für ω die Zahl ω'/p^s.[8]) Für den Teiler 2 von D und $(\omega - \bar{\omega})^2$ ist sicherlich jede Spur der Zahlen von $r(\omega)$ gerade und $\frac{1}{2}\omega' = \omega - \frac{1}{2}s(\omega)$ ganz. Man setze voraus, daß niemals $\omega'/2^{s+1}$ ganz und konkordant mit Ω ist d. h. $n\left(\frac{\omega'}{2^{s+1}}, \Omega\right)$ ganz und rational ist, für $s > 0$.

[8]) Wegen $2\Delta = \omega'\Omega - \Omega\omega'$ würde D durch p^{2s} resp. p^{2s+1} teilbar sein.

Nun ist, wie eine elementare Rechnung zeigt:

$$\text{(e)} \qquad D = n(\tfrac{1}{2}\omega')\, n(\Omega') - n(\tfrac{1}{2}\omega',\ \Omega)^2, \begin{cases} \omega' = \omega - \bar{\omega} \\ \Omega' = \Omega - \bar{\Omega} \end{cases}.$$

Geht die ungerade Primzahl p in ω'^2 zu höherer als erster Potenz auf, und ist p Teiler von D, so muß $n(\frac{1}{2}\omega', \Omega)$ durch p teilbar sein. Dann ist ω'/p ganz und konkordant mit Ω gegen Annahme. Also kann p in $n(\omega')$ höchstens zur ersten Potenz aufgehen. p ist daher Quadrat eines Primideales in $k(\omega)$, falls es Teiler von $n(\omega')$ ist, und ist zum Führer von $r(\omega)$ teilerfremd.

Ist D und $n(\frac{1}{2}\omega')$ gerade, so muß nach (e) auch $n(\frac{1}{2}\omega', \Omega)$ eine gerade Zahl sein; ist daher $n(\frac{1}{2}\omega')$ durch 4 teilbar, so ist $\omega'/4$ ganz und konkordant mit ω gegen Annahme. Also kann auch 2 höchstens einfach in $n(\frac{1}{2}\omega')$ aufgehen, d. h. 2 ist dann Quadrat eines Primideals von $k(\omega)$ und zum Führer von $r(\omega)$ teilerfremd.

Es sei jetzt n der größte Teiler von D, dessen Primteiler sämtlich in $n(\frac{1}{2}\omega')$ aufgehen. Dann ist $n = \mathfrak{n}^2$ und $\mathfrak{n}$ eindeutig bestimmt. Wir nehmen eine Zahl ν von $\mathfrak{n}$, die in $r(\omega)$ liegt und für die $\nu\bar{\nu}/n$ zu n teilerfremd ist und adjungieren zu ω, Ω das Quaternion:

$$\Omega^* = \frac{\nu \Delta}{n},$$

das sicherlich ganz und nach dem vorigen konkordant mit ω, Ω ist. Außerdem ist $\frac{1}{2}(\Omega^* - \bar{\Omega}^*) = \Omega^*$ zu n teilerfremd in $k(\Omega^*)$. Die Primteiler von n werden nach Fall A) in d aufgehen oder nicht, je nachdem sie in $k(\Omega^*)$ nicht zerfallen oder zerfallen. Die Bedingung ist, daß $-\Omega^* \bar{\Omega}^*$ quadratischer Rest oder Nichtrest nach der Primzahl ist[9]).

Für verschiedene ν erhält man denselben Integritätsbereich. Es fragt sich, ob derselbe noch erweitert werden kann durch das Quaternion Ξ. Nach dem Bewiesenen müssen dann ξ, η durch $\mathfrak{n}$ teilbar sein. Wegen (a) kann man schreiben:

$$\Xi = (\omega - \bar{\omega})^{-1} \frac{\nu' + \nu'' \Delta}{n},$$

[9]) Ist $n\left(\frac{\omega'}{2}\right)$ ungerade, so ist entweder (2) Quadrat eines Ideals von $k(\omega)$ und in n aufzunehmen, oder $\frac{1}{2}\left(\frac{\omega'}{2} + 1\right)$ ist ganz und konkordant mit Ω und statt $\frac{\omega'}{2}$ zu setzen.

wo ν', ν'' durch $\mathfrak{n}$ teilbar sind und $(\nu'')/\mathfrak{n}$ zu n teilerfremd sein muß. Ξ muß ganz sein, also:

$$n(\Xi) = -(\omega - \bar{\omega})^{-2} \frac{\nu' \bar{\nu}' + \nu'' \bar{\nu}'' D}{n^2}$$

ganz. Da $\nu'' \bar{\nu}'' D/n^2$ ganz ist, muß es auch $\nu' \bar{\nu}'/n^2$, d. h. $\xi = \nu'/n$ ist ganz und in $r(\omega)$; daher muß:

$$\xi^2 + \frac{n(\nu'') D}{n^2} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } (\omega - \bar{\omega})^2)$$

sein. Diese Kongruenz ist nur für diejenigen Primteiler von $(\omega - \bar{\omega})^2$ in zu ihnen teilerfremden Zahlen lösbar, für die $-n(\nu'') D/n^2$ quadratischer Rest ist, die also in $k(\Omega^*)$ zerfallen. Es sei n_1 der Faktor von n, der alle diese Primzahlen (einfach, 2 ev. doppelt) enthält. Es ist $n_1 = n(\mathfrak{n}_1) = \mathfrak{n}_1^2$. Man setzt dann:

$$\Xi = \frac{m}{\nu_1}\left(\xi + \frac{\nu''}{n} \Delta\right),$$

wo ν_1 in $\mathfrak{n}_1$ liegt, $(\nu_1)/\mathfrak{n}_1$ zu n_1 teilerfremd ist, und m eine natürliche Zahl ist, für die $n_1 m/n(\nu_1)$ ganz und zu n_1 teilerfremd wird. Ist r die Zahl der verschiedenen in n_1 aufgehenden Primzahlen, so gibt es 2^r verschiedene Lösungen für ξ (mod. n_1). Ist ξ_1 eine zweite Lösung, so sind die zugehörigen Ξ, Ξ_1 nicht konkordant, wie aus:

$$n(\Xi, \Xi_1) = \frac{2m^2}{n_1}\left(\xi\xi_1 + \frac{\nu''\bar{\nu}'' D}{n^2}\right)$$

sofort folgt. Dagegen ist Ξ mit ω, Ω und den frühern Größen $\frac{\nu \Delta}{n}$ konkordant.

I. Hauptsatz: *Es seien ω, Ω zwei beliebige nicht vertauschbare, konkordante ganze Quaternione. Man setze $n(\omega\Omega - \Omega\omega) = fd$, wo d die Grundzahl der Algebra $\mathfrak{Q}$ von ω, Ω ist; dann ist $f = n(\mathfrak{f})$, wo $\mathfrak{f}$ ein Ideal in $k(\omega)$ ist. Gibt es keine natürliche Zahl n, so daß $(\omega - \bar{\omega})/n$, resp. $(\omega - \bar{\omega})/2n$ zu Ω konkordant und ganz ist, so gibt es eben so viele maximale Integritätsbereiche I, in denen ω, Ω liegen, als f in $k(\omega)$ als Norm eines Ideals darstellbar ist. Dabei ist für diejenigen Primzahlpotenzen von f, deren Basisprimzahl in der Diskriminante von $k(\omega)$, nicht aber in d aufgeht, die Zahl der Zerlegungen als 2 einzusetzen*[10]).

[10]) Dieser Satz enthält die Latimer'schen Resultate, wie man sieht, wenn man $\omega = \sqrt{-\alpha} i_1$, $\Omega = \sqrt{\beta} i_2$, $\Delta = 2\sqrt{-\alpha\beta} i_3$, $D = +4\alpha\beta$ setzt.

Wir wollen jetzt einen festen Bereich I herausgreifen, der zu einer festen Zerlegung $\mathfrak{f}$ gehört. Man sieht aus dem Beweise, daß man dann Ω stets in der Form darstellen kann:

$$r\Omega = \mu + \varphi H, \ \mu \text{ in } r(\omega),$$

wo φ eine Zahl von $\mathfrak{f}$, H ein Quaternion von I, und r eine natürliche zu f teilerfremde Zahl ist, die verschieden gewählt werden kann. Nimmt man die zu zwei teilerfremden r_1, r_2 gehörenden Darstellungen:

$$r_1\Omega = \mu_1 + \varphi_1 H_1, \ r_2\Omega = \mu_2 + \varphi_2 H_2,$$

und bestimmt x_1, x_2 so, daß $x_1 r_1 + x_2 r_2 = 1$, so wird:

$$\Omega = \mu + \varphi_1 H_1' + \varphi_2 H_2', \ \mu \text{ in } r(\omega) \ .$$

5. Allgemeinere Quaternionenringe

Ist ω irgend ein ganzes Quaternion von $\mathfrak{Q}$, I ein maximaler Integritätsbereich, in dem ω liegt, so nehme man ein beliebiges Ringideal $\mathfrak{f}$ von $r(\omega)$, das zum Führer von $r(\omega)$ teilerfremd ist. Wir bilden den Bereich $R(\mathfrak{f})$ aller Quaternionen:

$$P = \xi + \varphi\Xi,$$

wo ξ in $r(\omega)$, φ in $\mathfrak{f}$ liegt, und Ξ ein solches Quaternion von $\mathfrak{Q}$ ist, für das es eine zu $f = n(\mathfrak{f})$ teilerfremde Zahl η in $r(\omega)$ gibt, so daß $\eta\Xi$ in I liegt.

7. Satz: *$R(\mathfrak{f})$ ist ein Ring.*

Denn die Summe von zwei seiner Zahlen hat wieder die Form:

$$P' + P'' = (\xi' + \xi'') + (\varphi'\Xi' + \varphi''\Xi'') \ .$$

Ist φ eine Zahl von $\mathfrak{f}$, für die $(\varphi)/\mathfrak{f}$ zu f teilerfremd ist, so wird:

$$P' \dot{+} P'' = \xi + \varphi\Xi, \text{ wo } \Xi = \varphi^{-1}(\varphi'\Xi' + \varphi''\Xi'')$$

allen Bedingungen genügt. Ebenso ist:

$$P'P'' = \xi'\xi'' + \varphi'\Xi'P'' + \varphi''\xi'\Xi' = \xi + \varphi\Xi \ .$$

$\mathfrak{f}$ heißt der *Führer des Ringes.*

Es ist klar, daß auch die Quaternionen $\xi + \Xi\varphi$ einen Ring mit dem Führer $\mathfrak{f}$ bilden, den man *Rechtsring* $R(\mathfrak{f})$ im Gegensatz zum *Linksring* $R(\mathfrak{f})$ nennen kann. Wir beschränken uns im folgenden auf Linksringe und lassen das Wort „Links“ weg.

Es besteht nun der Satz:

8. Satz: *Sind ω, Ω gemäß dem 1. Hauptsatz zwei nicht vertauschbare, konkordante ganze Quaternionen von $\mathfrak{Q}$, für die $n(\omega\Omega - \Omega\omega) = fd$, und ist I derjenige, ω, Ω enthaltende maximale Integritätsbereich, der zur Darstellung $f = n(\mathfrak{f})$ gehört, so wird $R(\mathfrak{f})$ in I gegeben durch alle Quaternionen:*

$$P = \xi + \Xi, \qquad \xi \text{ in } r(\omega),$$

wo $\Xi = \mu + \nu\Omega$, μ, ν in $k(\omega)$, die Eigenschaft hat, daß für eine zu $n(\mathfrak{f}) = f$ teilerfremde Zahl η von $r(\omega)$ $\eta\Xi$ in I liegt.

Denn nach der Bemerkung am Schlusse von 4. muß Ω in $R(\mathfrak{f})$ liegen, somit ist P stets in $R(\mathfrak{f})$. Umgekehrt ist für jede Basiszahl H von I nach 4. $\varphi H = \xi + \eta\Omega$, wo ξ, η in $r(\Omega)$ liegen und φ eine solche Zahl von $\mathfrak{f}$ ist, daß $(\varphi)/\mathfrak{f}$ zu f teilerfremd ist. Daher läßt sich auch jedes Quaternion von $R(\mathfrak{f})$ in der Form $\xi + \Xi$ darstellen.

Es erhebt sich die Frage, welche Bedingungen $\mathfrak{f}$ erfüllen muß, daß $R(\mathfrak{f})$ durch zwei Quaternionen ω, Ω erzeugt werden kann? Gibt es zwei ω', Ω', die I selbst erzeugen ($\mathfrak{f} = (1)$), so wird man für jedes $\mathfrak{f}$ solche ω, Ω geben können. Im allgemeinen Falle wollen wir dieses Problem hier nicht behandeln.

6. Quaternionenideale

Wir kehren jetzt zu unserm speziellen Ringe zurück, der alle Quaternionen des Moduls $[1, \omega, \Omega, \omega\Omega] = \mathfrak{o}$ enthält. Dabei ist $n(\omega\Omega - \Omega\omega) = fd$, $n(\mathfrak{f}) = f$. Wir nennen den viergliedrigen Modul $[\iota_0, \iota_1, \iota_1, \iota_2]$ ein Links-Ringideal in $\mathfrak{o}$ wenn die ι_k in $\mathfrak{o}$ liegen, und wenn $\Xi\iota_k$, $k = 0, 1, 2, 3$, wieder in dem Modul liegt, falls Ξ alle Quaternionen von $\mathfrak{o}$ durchläuft, und setzen:

$$(\mathfrak{i} = (\iota_0, \iota_1, \iota_2, \iota_3).$$

Es sei $\iota_k = \xi_k + \eta_k\Omega$, wo die ξ_k, η_k in $r(\omega)$ liegen. Nun ist in $r(\omega)$, da $(\mathfrak{i}$ ein Ideal ist:

$$[\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3] = (\eta', \eta''),$$

wo η', η'' in $r(\omega)$ sind, und ganze rationale Zahlen x_k', x_k'' existieren müssen, für die:

$$\eta' = \sum_{k=0}^{3} x_k' \eta_k, \quad \eta'' = \sum_{k=0}^{3} x_k'' \eta_k,$$

sein muß. Wir setzen:

$$\iota' = \sum_{k=0}^{3} x_k' \iota_k, \quad \iota'' = \sum_{k=0}^{3} x_k'' \iota_k .$$

Umgekehrt gibt es für jede Zahl ι von $(\mathfrak{i}$ zwei ganze rationale Zahlen y', y'', für die:

$$\iota - y' \iota' - y'' \iota'' = \xi$$

eine Zahl von $r(\omega)$ ist. Alle Zahlen von $r(\omega)$, die zugleich in $(\mathfrak{i}$ liegen, bilden einen Modul, weil $(\mathfrak{i}$ ein Modul ist. Sie sind aber auch ein Ringideal in $r(\omega)$, da auch $(\mathfrak{i}$ ein Ideal ist. Diese Zahlen haben daher eine Basisdarstellung (ξ', ξ''), wo ξ', ξ'' in $r(\omega)$ liegen. Somit kann jedes ι von $(\mathfrak{i}$ in der Form dargestellt werden:

$$\iota = y'\iota' + y''\iota'' + x'\xi' + x''\xi'', \; y', y'', x', x'' \text{ ganz und rational,}$$

oder:

$$(\mathfrak{i} = (\iota', \iota'', \xi', \xi'') \; .$$

Ist ξ in (ξ', ξ''), so liegt es auch in $(\mathfrak{i}$, und ebenso $\Omega\xi$. Nun ist nach (a):

$$\Omega\xi = \bar{\xi}\Omega + s(\Omega)\,\xi - n(\xi, \Omega),$$

somit muß ξ in $(\bar{\eta}', \bar{\eta}'')$ liegen, und $(\bar{\eta}', \bar{\eta}'')$ ist Teiler von (ξ', ξ''). Setzt man $(\bar{\eta}', \bar{\eta}'') = (m)\,\mathfrak{t}$, wo m der größte rationale Teiler des Ideals ist, so muß $(\xi', \xi'') = (m)\,\mathfrak{tn}$ sein. Wir setzen von nun an voraus, daß m und $\mathfrak{t}$ zum Führer von $r(\omega)$ teilerfremd seien[11]) und $m = 1$ ist, weil $(\mathfrak{i} = (m)\,(\mathfrak{i}'$ ist, und $(\mathfrak{i}'$ wieder ein Linksideal wird. Dann ist:

$$(\bar{\eta}', \bar{\eta}'') = (\tau', \tau'') = \mathfrak{t}, \; (\xi', \xi'') = \mathfrak{tn},$$

wobei wir τ' so wählen können, daß $(\tau') = \mathfrak{ta}$ wird, wo $\mathfrak{a}$ zu $n(\mathfrak{tn})$ und zum Führer von $r(\omega)$ teilerfremd ist. Ist α eine Zahl von $\mathfrak{a}$, teilerfremd zu $n(\mathfrak{tn})$, so ist:

$$\beta = -\alpha \frac{\tau''}{\tau'}$$

11) Ist $\mathfrak{t}$ nicht teilerfremd zum Führer von $r(\omega)$, so muß man in den Darstellungen nur diejenigen Quaternionen nehmen, die in $\mathfrak{o}$ liegen.

in $r(\omega)$, da τ' zum Führer von $r(\omega)$ teilerfremd ist. Dann wird, wenn $\iota' = \bar{\tau}'\Omega + \sigma'$, $\iota'' = \tau''\Omega + \sigma''$ gesetzt wird:

$$\beta\iota' + \bar{\alpha}\iota'' = \beta\sigma' + \bar{\alpha}\sigma'',$$

muß also in (ξ', ξ'') liegen:

$$\beta'\sigma' + \bar{\alpha}\sigma'' \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mathfrak{tn}) .$$

Erweitert man die Kongruenz mit $\frac{\tau'}{\bar{\alpha}}$, so wird:

$$\tau''\sigma' - \tau'\sigma'' \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mathfrak{t}\mathfrak{t}\mathfrak{n}) .$$

Genügt α noch der weiteren Bedingung:

$$\alpha \equiv 1 \qquad (\text{mod. } n(\mathfrak{tn})),$$

so setze man $\sigma = \bar{\alpha}\frac{\sigma'}{\bar{\tau}'}$; σ ist gebrochen, hat aber nur den Idealteiler $\mathfrak{t}$ im Nenner und $\bar{\tau}\sigma$ ist für jedes τ von $\mathfrak{t}$ und $r(\omega)$ in letzterm Ringe. Jetzt wird:

$$\iota' = \bar{\tau}'(\Omega + \sigma) + (\bar{\alpha} - 1)\sigma' = \bar{\tau}'(\Omega + \sigma) + \xi_1,$$

$$\iota'' = \bar{\tau}''(\Omega + \sigma) + (\bar{\alpha} - 1)\sigma'' - \bar{\alpha}\left(\tau''\frac{\sigma'}{\bar{\tau}'} - \sigma''\right) = \bar{\tau}''(\Omega + \sigma) + \xi_2,$$

wo ξ_1, ξ_2 in $\mathfrak{tn}$ und $r(\omega)$ liegen. Daher können alle Quaternionen von $\mathfrak{i}$ in der Gestalt dargestellt werden: $\xi + \bar{\tau}\iota$, wo τ in $\mathfrak{t}$, ξ in $\mathfrak{tn}$, und $\iota = \Omega + \sigma$ sein muß. Wir nennen $\mathfrak{tn}$, $\mathfrak{t}\iota$ *eine kanonische Relativbasis von* $\mathfrak{i}$ *in bezug auf* $r(\omega)$. Jedes $\mathfrak{i}$ besitzt eine solche, falls $n(\mathfrak{t})$ zum Führer von $r(\omega)$ teilerfremd ist. Man sieht, daß alle Quaternionen $\xi + \bar{\tau}\iota$ in $\mathfrak{i}$ liegen müssen, setzt also:

$$\mathfrak{i} = (\mathfrak{tn}, \mathfrak{t}\iota) .$$

Es fragt sich, welche Bedingungen $\mathfrak{t}, \mathfrak{n}, \iota$ befriedigen müssen, damit alle Quaternionen $\xi + \bar{\tau}\iota$ umgekehrt ein Ideal $\mathfrak{i}$ festlegen? Durch Linksmultiplikation mit einer Zahl von $r(\omega)$ bleibt die Form erhalten. Es treten daher nur die Bedingungen auf, die aus der Annahme folgen, daß auch $\Omega\xi$ und $\Omega\bar{\tau}\iota$ wieder die Gestalt $\xi + \bar{\tau}\iota$ haben.

a) $\Omega\xi$ muß für jedes ξ von $\mathfrak{tn}$ wieder die Gestalt $\xi + \bar{\tau}\iota$ haben. Aus:

$$\Omega\xi = \bar{\xi}\iota + s(\Omega)\,\xi - n(\xi, \Omega) - \bar{\xi}\sigma$$

folgt, daß:

(f) $$n(\xi, \Omega) + \bar{\xi}\sigma \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mathfrak{tn})$$

sein muß. Diese Kongruenz ist für alle ganzen rationalen Zahlen von $\mathfrak{tn}$ erfüllt. Sie muß daher nur noch für eine Basiszahl $\xi = (r + \omega)\,n$ von $\mathfrak{tn}$ erfüllt sein, dann ist sie stets erfüllt.

b) Da $\Omega\bar{\tau}\iota$ die Form $\xi + \bar{\tau}\iota$ haben soll, folgt aus:

$$\Omega\bar{\tau}\iota = (\tau\bar{\sigma} + n(\tau, \Omega))\,\iota + (s(\Omega)\,\bar{\tau}\sigma - n(\bar{\tau}\sigma, \Omega) - \tau\Omega\bar{\Omega} - (\tau\bar{\sigma} + n(\tau, \Omega)\,\sigma)),$$

daß:

(g) $$\tau\sigma + n(\tau, \Omega) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mathfrak{t})$$

und:

$$\sigma(\Omega)\,\tau\sigma - n(\tau\sigma, \Omega) - \tau\Omega\bar{\Omega} - \tau\sigma\bar{\sigma} - \sigma\,n(\tau, \Omega) \equiv 0 \ (\text{mod. } \mathfrak{tn}), \text{ d. h.}$$
$$-\tau\,n(\Omega + \sigma) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mathfrak{tn})$$

sein muß. Man erweitert die letzte Kongruenz mit $-\tau$:

(h) $$n(\bar{\tau}(\Omega + \sigma)) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \bar{\mathfrak{t}}\mathfrak{n})$$

Wir nehmen jetzt auch $\mathfrak{n}$ zum Führer von $r(\omega)$ teilerfremd an, und setzen $\mathfrak{n} = (n)\,\mathfrak{n}'$, wo n der größte in $\mathfrak{n}$ enthaltene ganze rationale Teiler ist. $\mathfrak{n}'$ hat dann eine Basiszahl $r + \omega = \xi'$, und für dieselbe ist nach (f):

$$n(\xi', \Omega) + \bar{\xi}'\,\sigma \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mathfrak{n}'\mathfrak{t}).$$

Es habe $\mathfrak{t}$ die kanonische Basis $\tau' = r' + \omega$, $\tau'' = t$, wo $t = n(\mathfrak{t})$ ist. Da ξ' durch $\mathfrak{t}$ teilbar ist, so muß daher:

$$r + \omega = \xi' = x't + (r' + \omega)$$

sein, wo x' eine ganze rationale Zahl ist. Daher lautet die Bedingung

$$(x't + r')\,s(\Omega) + n(\omega, \Omega) + (x't + r' + \bar{\omega})\,\sigma \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mathfrak{n}'\mathfrak{t}).$$

Nun ist aber $\xi' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{t}\mathfrak{n}'}$, also $x't + r' \equiv -\omega \pmod{\mathfrak{n}'\mathfrak{t}}$. Erweitern wir noch die Kongruenz mit τ', damit $\tau'\sigma$ ganz wird, so folgt nach einer kleinen Rechnung:

$$\text{(i)} \qquad (\omega - \omega)\tau'(\sigma + \Omega) - \bar{\tau}'\Delta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{t}\mathfrak{n}'},\ \Delta = \omega\Omega - \Omega\omega\ ,$$

woraus durch Normbildung nach (b), (c):

$$-(\omega - \bar{\omega})^2\, n(\tau'(\sigma + \Omega)) \equiv D\, n(\tau') \qquad \pmod{\mathfrak{t}\bar{\mathfrak{t}}\mathfrak{n}'\bar{\mathfrak{n}}'}.$$

Wegen (h) ist somit:

$$D \equiv 0 \qquad \pmod{n(\mathfrak{n}')}\ .$$

Ist $D = fd$, so kann aber $\mathfrak{n}'$ nur Teiler von f sein, da d durch keine Norm eines Ideals in $r(\omega)$ teilbar ist und $\mathfrak{n}'$ keinen rationalen Teiler enthält. $\mathfrak{n}'$ *muß daher primitiver Teiler von* f *sein.* Wir setzen daher $\mathfrak{n}' = \mathfrak{f}'$, wo $\mathfrak{f}'$ ein Teiler von f in $r(\omega)$ ist.

Die Voraussetzungen, daß $n(\mathfrak{t})$ und $n(\mathfrak{n})$ zum Führer von $r(\omega)$ teilerfremd sind, verlangen, daß es in $(\mathfrak{i}$ Quaternionen gibt, deren Normen zu diesem Führer teilerfremd sind. *Wir sagen, daß* $(\mathfrak{i}$ *zu letzterem teilerfremd ist.* Wir können jetzt den Hauptsatz aussprechen:

II. Hauptsatz: *Ist* $(\mathfrak{i}$ *ein zum Führer von* $r(\omega)$ *teilerfremdes Ringideal von* $\mathfrak{o} = (1, \omega, \Omega, \omega\Omega)$, *so besitzt es eine kanonische Relativbasis:* $n\mathfrak{t}\mathfrak{f}'$, $\bar{\mathfrak{t}}(\Omega + \sigma)$ *d. h. alle seine Quaternionen können in der Gestalt:*

$$\xi n + \bar{\tau}(\Omega + \sigma)$$

dargestellt werden, wo ξ *alle Zahlen des Ringideals* $\mathfrak{t}\mathfrak{f}'$, τ *alle Zahlen von* $\mathfrak{t}$ *durchläuft,* $\mathfrak{f}'$ *ein primitiver Idealteiler von* f *ist, und* σ *die folgenden Bedingungen befriedigt:*

$$\begin{aligned}
&\bar{\tau}\sigma \text{ ist eine ganze Zahl von } r(\omega),\\
&n(\bar{\tau}(\Omega + \sigma)) \equiv 0 \qquad \pmod{n\mathfrak{t}\bar{\mathfrak{t}}\mathfrak{f}'\bar{\mathfrak{f}}'},\ \tau = r + \omega \text{ in } \mathfrak{t},\\
&\bar{\tau}\sigma + n(\tau, \Omega) \equiv 0 \qquad \pmod{\mathfrak{t}},\\
&(\omega - \bar{\omega})\,\bar{\tau}(\Omega + \sigma) \equiv \bar{\tau}\Delta \qquad \pmod{\mathfrak{f}'},\ \Delta = \omega\Omega - \Omega\omega\ .
\end{aligned}$$

Sind umgekehrt alle diese Bedingungen befriedigt, so bilden alle Quaternionen $\xi n + \bar{\tau}(\Omega + \sigma)$ *ein Ideal* $(\mathfrak{i}$ *in* $\mathfrak{o}$, *falls* ξ *alle Zahlen von* $\mathfrak{f}'\mathfrak{t}$, τ *von* $\mathfrak{t}$ *durchläuft.*

Setzt man wieder $\mathfrak{f}\mathfrak{f}' = (\xi', \xi'')$, $\mathfrak{t} = (\tau', \tau'')$, so läßt sich ξ, τ in der Form: $\xi = x'\xi' + x''\xi''$, $\tau = t'\tau' + t''\tau''$ darstellen. Ist:

$$\xi^{(k)} = u^{(k)} + v^{(k)}\omega,\ \tau^{(k)} = r^{(k)} + s^{(k)}\omega,\ k = 1,2\ ,$$

so wird die zur kanonischen Basis gehörende Determinate in bezug auf die Basis $1, \omega, \Omega, \omega\Omega$ lauten:

$$\begin{vmatrix} nu' & nv' & 0 & 0 \\ nu'' & nv'' & 0 & 0 \\ - & - & r' & s' \\ - & - & r'' & s'' \end{vmatrix} = (u'v'' - u''v')(r's'' - r''s')n^2 = n(\mathfrak{f}\mathfrak{f}')\,n(\mathfrak{t})\,n^2\ .$$

$$= n(\mathfrak{f}')\,n(\mathfrak{t})^2 n^2\ .$$

Anderseits sieht man, daß die zu den Quaternionen von $\mathfrak{i}$ gehörenden quaternäre Form in x', x'', t', t'' lauter durch $nn(\mathfrak{t})$ teilbare Koeffizienten hat; denn sie lautet:

$$n^2 n(\xi) + ns(\bar{\xi}\bar{\tau}(\Omega + \sigma)) + n(\bar{\tau}(\Omega + \sigma))$$

und für jedes ξ in $\mathfrak{f}'\mathfrak{t}$ und τ in $\mathfrak{t}$ ist wegen der obigen Bedingungen $s(\bar{\xi}\bar{\tau}(\Omega + \sigma)) \equiv 0 \pmod{n(\mathfrak{f}'\mathfrak{t})}$, $n(\bar{\tau}(\Omega + \sigma)) \equiv 0 \pmod{nn(\mathfrak{t}\mathfrak{f}')}$.

Man sieht, daß die Determinante das Quadrat des Teilers der Koeffizienten der quaternären Form nur dann ist, wenn $n(\mathfrak{f}') = 1$, oder $\mathfrak{f}' = 1$. In diesem Falle gibt es Quaternionen in $\mathfrak{i}$, deren Norm zu f teilerfremd sind. Solche Ideale wollen wir *regulär* nennen[12]).

7. Ringidealklassen

Es seien $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}'$ zwei reguläre Ringideale gemäß 6. Wir nennen dieselben äquivalent, wenn es in $R(\mathfrak{f})$ ein Quaternion P gibt, so daß:

$$\mathfrak{i}' = \mathfrak{i}P\ .$$

Dabei ist $\mathfrak{f}$, $R(\mathfrak{f})$ in Satz 8. definiert. Die Definition der Aequivalenz ist reflektif. Denn da $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}'$ regulär sind, so wird $n(P)$ einen zu f teilerfremden Zähler und Nenner besitzen. Also liegt auch P^{-1} in $R(\mathfrak{f})$. Die Definition ist transitif; somit können alle Ideale in Ringklassen eingeteilt werden. Die Anzahl der Ringklassen ist endlich. Man kann dieselbe berechnen, falls die gewöhnliche Klassenzahl bekannt ist.

[12]) Siehe hiezu die Definitionen von *Brandt*, a. a. O. S. 16.

8. Hermite'sche Formen

Alle Quaternionen des regulären Ringideals (i sind in der Gestalt:

$$\Xi = n\tau_1 + \tau(\Omega + \sigma)$$

darstellbar, wo τ_1, τ alle Zahlen von t durchlaufen, und n eine natürliche Zahl ist. Bilden wir die Norm $n(\Xi)$, so ergibt sich:

$$n(\Xi) = n^2\tau_1\tau_1 + ns(\tau_1\bar{\tau}(\Omega+\sigma)) + \tau\tau n(\Omega+\sigma)\ .$$

Nun ist aber, wie eine kleine Rechnung zeigt:

$s(\tau_1\tau(\Omega + \sigma)) = s(\tau_1\bar{\tau}(\varkappa + \sigma))$, wo

$$\varkappa = (\omega - \omega)^{-1}(\omega\Omega - \Omega\bar{\omega}) = (\omega - \bar{\omega})^{-1}(s(\Omega)\,\omega - n(\omega, \Omega))$$

eine Zahl von $k(\omega)$ ist. Daher ist:

$$\frac{n(\Xi)}{n} = n\tau_1\tau_1 + (\varkappa + \sigma)\tau_1\tau + (\bar{\varkappa} + \bar{\sigma})\tau_1\tau + \frac{n(\Omega+\sigma)}{n}\tau\tau$$

eine *Hermite*'sche Form, die (i zugeordnet heiße. Ihre Determinante ist:

$$\begin{vmatrix} n & \varkappa + \sigma \\ \bar{\varkappa} + \bar{\sigma} & \dfrac{n(\Omega+\sigma)}{n} \end{vmatrix} = -\frac{n(\omega\Omega - \Omega\omega)}{(\omega - \bar{\omega})^2} = -\frac{fd}{(\omega - \bar{\omega})^2}$$

also von (i unabhängig. Ist t = (1), so heiße das Ideal (i *primitif*. Wir wollen uns nur noch mit diesem Falle beschäftigen. Die Variablen der zugeordneten Hermite'schen Form durchlaufen dann alle Zahlen von $r(\omega)$. Es seien (i und (i' zwei äquivalente, primitive reguläre Ringideale und

$$(\mathfrak{i} = (n, \Omega + \sigma), \qquad (\mathfrak{i}' = (n', \Omega + \sigma')$$

ihre kanonischen Basisdarstellungen. Dann muß es ein Quaternion P geben, so daß:

$$(\Omega + \sigma)P = \alpha(\Omega + \sigma') + \beta n',$$
$$nP = \gamma(\Omega + \sigma') + \delta n',$$

wird, wo $\alpha\delta - \beta\gamma$ eine Einheit ist, und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in $r(\omega)$ liegen. Ist nun $\gamma = 0$, so sind α, δ Einheiten, und es folgt $n = n'$, $n(P) = 1$, $\alpha\delta = 1$. Ist $\gamma \neq 0$, so ist:

$$\frac{\Omega + \sigma}{n} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}(\alpha\delta - \beta\gamma)\,\frac{\frac{\gamma\Omega}{n'} + \dots}{n\left(\gamma\frac{\Omega + \sigma'}{n'} + \delta\right)}.$$

woraus $n' n\left(\gamma\frac{\Omega + \sigma'}{n'} + \delta\right) = (\alpha\delta - \beta\gamma)\, n$ folgt. Somit ist:

$$n^2 n(P) = n(\gamma(\Omega + \sigma') + \delta n') = nn'(\alpha\delta - \beta\gamma), \text{ oder:}$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,\ n(P) = \frac{n'}{n}.$$

Diese beiden Beziehungen gelten also in jedem Falle. Man erhält alle äquivalenten Ideale durch die unimodularen Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ der Gruppe in $r(\omega)$.

Betrachten wir jetzt die (i zugeordnete Hermite'sche Form, so wird, wenn $\Xi = \xi n + \eta(\Omega + \sigma)$:

$$\frac{n(\Xi)}{n} = \frac{n(P\Xi)}{n'} = \frac{n(\xi(\gamma(\Omega + \sigma') + \delta n') + \eta(\alpha(\Omega + \sigma') + \beta n'))}{n'} = \frac{n(\Xi')}{n'},$$

wo:

$$\Xi' = \xi' n' + \eta'(\Omega + \sigma'), \text{ und } \xi' = \delta\xi + \beta\eta,\ \eta' = \gamma\xi + \alpha\eta,\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist. $n(\Xi')/n'$ ist aber die (i' zugeordnete Hermite'sche Form, somit müssen sie beiden Formen äquivalent sein.

9. Satz: *Zwei regulären äquivalenten Ringidealen entsprechen zwei äquivalente Hermite'sche Formen.*

Man sieht daher, daß die Theorie der Idealklassen in $R(\mathfrak{f})$ die Theorie der Hermite'schen Formen in $r(\omega)$ enthält.

(Eingegangen den 20. Dezember 1933)