

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 6 (1934)

Artikel: Zur Theorie der Bewegungsgruppen.
Autor: Burckhardt, J.J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7587>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Theorie der Bewegungsgruppen

Von J. J. BURCKHARDT, Zürich

Anschließend an die geometrischen Untersuchungen von Fedorow¹⁾ und Schönflies²⁾ stellte Hilbert³⁾ die Vermutung auf, daß es im n -dimensionalen euklidischen Raume nur endlich viele verschiedene Raum- oder Bewegungsgruppen gebe. Diese Vermutung ist von Bieberbach⁴⁾ bestätigt worden, Frobenius⁵⁾ hat die Beweise vereinfacht. Schönflies und Fedorow stellten die 230 Bewegungsgruppen des dreidimensionalen Raumes durch Kombination der verschiedenen möglichen Symmetrieelemente auf, wobei gewisse Sätze über deren gegenseitige Abhängigkeit wertvolle Dienste leisten. Bieberbach und Frobenius formulieren die Aufgabe analytisch und verwenden im Endlichkeitsbeweis wesentlich Sätze arithmetischer Natur über die Substitutionsgruppen. Diese Methoden sind aber nicht soweit entwickelt, daß man mit ihnen die Bewegungsgruppen explizit angeben könnte. Eng hiermit verbunden ist die folgende Tatsache: Sieht man sich die Verteilung der 230 Raumgruppen auf die verschiedenen Klassen an, so bemerkt man eine scheinbar völlige Gesetzlosigkeit. Während z. B. zu der Klasse C_{3h} nur eine einzige Bewegungsgruppe gehört, enthält die Klasse V_h deren 28. Da nun die Bewegungsgruppen durch die Klassen bestimmt werden, tritt die Frage auf, welche Eigenschaften der Klasse für dieses Verhalten maßgebend sind. Diese Frage ist bisher weder durch die Arbeiten von Bieberbach und Frobenius, noch durch die geometrische Ableitung von Schönflies und Fedorow beantwortet worden. Ich werde aus den Ansätzen von Frobenius heraus gewisse Sätze herleiten, die für zyklische Gruppen und Gruppen, die sich aus solchen zyklischen Gruppen zusammensetzen, diese Verzweigung der Klassen in die verschiedenen Bewegungsgruppen regeln. Dadurch ist dann zugleich die Aufgabe gelöst, die Bieberbach-Frobenius'sche Methode soweit durchzuführen, daß man zu gegebener Klasse die zugehörigen Bewegungsgruppen angeben kann.

Betrachtet man eine ganzzahlige Darstellung einer Klasse, so kann diese ganzzahlig irreduzibel sein, oder sie kann zerfallen. Beim Zerfall

1) *E. von Fedorow*, Zusammenstellung der kristallographischen Resultate etc. Z. Kristallogr. Bd. 20.

2) *A. Schönflies*, Kristallsysteme und Kristallstruktur, 1891.

3) *D. Hilbert*, Mathematische Probleme, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1900.

4) *L. Bieberbach*, Ueber die Bewegungsgruppen der euklidischen Räume, Math. Ann., Bd. 70, 72.

5) *G. Frobenius*, Ueber die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen, S.-B. preuss. Akad. Wiss. 1911.

kann als irreduzibler Bestandteil die identische Darstellung auftreten und es wird sich zeigen, daß diese für das Vorkommen von weiteren Bewegungsgruppen verantwortlich ist. Hierdurch tritt diese Arbeit in begrifflichen Zusammenhang mit den Untersuchungen zur systematischen Strukturtheorie von Heesch⁶⁾. Darin werden die 230 Raumgruppen aus dem Begriff der Blickrichtung abgeleitet, der eng verwandt ist mit dem der identischen Darstellung. Heesch ordnet nämlich einer Schar von Symmetrieachsen die Richtung dieser Achsen, einer Schar von Symmetrieebenen die Ebenennormale als Blickrichtung zu. Das bedeutet aber, daß man in der zugehörigen Klasse die identische Darstellung betrachtet, denn die Blickrichtung geht bei jeder Operation dieser Klasse in sich über. Je nachdem die Klasse die identische Darstellung einmal oder mehrmals enthält, spricht Heesch von Einklassen oder von Vielklassen. Auch wir werden sehen, daß diese Unterscheidung sehr wichtig ist.

In § 1 stelle ich die nötigen Sätze über die Kristallklassen zusammen. Ferner gebe ich die von Frobenius entwickelte Symbolik für das Rechnen mit den Bewegungsgruppen und den Fundamentalsatz an, der ihr Verhalten zu den Klassen regelt. Daraus ergeben sich für ihre Bestimmung die sogenannten Frobenius'schen Kongruenzen. Besonders wichtig ist dabei, daß man den Begriff der Klasse richtig faßt⁷⁾. Man muß ihn etwas enger nehmen als in der geometrischen Kristallographie, um die durchsichtigen Gesetze für die Verzweigung zu erhalten.

In § 2 entwickle ich die Lösung der Frobenius'schen Kongruenzen für zyklische Gruppen. Da für die Anwendung die Gruppen der Ordnung zwei eine besonders wichtige Rolle spielen, behandle ich sie gesondert, die Beweise lassen sich dabei etwas einfacher führen als im allgemeinen Falle.

Die Ausdehnung dieser Sätze auf Gruppen, die sich aus solchen zyklischen Gruppen zusammensetzen, wird in § 3 gegeben. Dadurch sind die Methoden vorhanden, um die 230 Raumgruppen aufzustellen, ich gebe als Beispiel die Herleitung der 17 ebenen Bewegungsgruppen.

In § 4 behandle ich ein Problem, das von Heesch⁸⁾ gestellt wurde. Bekanntlich hat L. Weber⁹⁾ die 17 ebenen Bewegungsgruppen erweitert, indem er die Ebene als doppelseitig annahm, und kam so zu den 80 Bewegungsgruppen der zweiseitigen Ebene. Heesch stellt nun das Pro-

⁶⁾ *H. Heesch*, Zur Strukturtheorie der ebenen Symmetriegruppen; Zur systematischen Strukturtheorie II, Z. Kristallogr., Bd. 71, 72.

⁷⁾ *J. J. Burckhardt*, Zur Kristallographie, Verh. d. Schweizer. Naturforsch. Ges., St. Gallen 1930.

⁸⁾ *H. Heesch*, Zur systematischen Strukturtheorie III. Z. Kristallogr. Bd. 73.

⁹⁾ *L. Weber*, Z. Kristallogr. Bd. 70.

blem, in analoger Weise die 230 Raumgruppen zu erweitern, indem man noch Spiegelung am dreidimensionalen Raum zuläßt. Ich zähle die entstehenden Bewegungsgruppen für den hexagonalen und rhomboedrischen Fall auf, wo die Verhältnisse besonders einfach liegen. Doch reichen die Methoden aus, um die Aufstellung sämtlicher Gruppen zu ermöglichen, was aber bei ihrer großen Anzahl sehr zeitraubend sein dürfte.

§ 1. In der geometrischen Kristallographie pflegt man den Begriff der Bewegungsgruppe entweder aus dem des homogenen Diskontinuums oder dem des regelmäßigen Punktsystems abzuleiten¹⁰⁾. Für unsere Darstellung ist es zweckmäßiger, vom regelmäßigen Punktsystem auszugehen, weil dieses in engem Zusammenhang mit dem Punktgitter steht. Sei im ν -dimensionalen Raum ein Punktgitter I gegeben, das von ν linear unabhängigen Vektoren ξ_1, \dots, ξ_ν aufgespannt werde. Die Operationen, die dieses Gitter mit sich zur Deckung bringen, bilden eine Gruppe, und wendet man auf einen Punkt allgemeiner Lage die Operationen dieser Gruppe an, so erhält man ein zum ursprünglichen Gitter kongruentes Gitter. In gewissen Fällen ist es möglich, in das Gitter noch weitere Symmetrieelemente einzubauen, durch die das Gitter wiederum in sich übergeführt wird, wodurch aber die Symmetrie des Raumes erhöht wird. Wendet man dann auf einen Punkt allgemeiner Lage alle Operationen der erweiterten Gruppe an, so erhält man ein sogenanntes regelmäßiges Punktsystem, das nun aus ineinandergestellten Gittern besteht. Durch die Symmetrie solcher regelmäßiger Punktsysteme definiert man in der geometrischen Kristallographie die Bewegungsgruppen. Da wir voraussetzen, daß die ν aufspannenden Vektoren linear unabhängig sind, betrachten wir nur solche Bewegungsgruppen, die nach der Terminologie von Bieberbach nicht zerfallend sind.

Bedeute x ein Punkt allgemeiner Lage mit den rechtwinkligen Koordinaten x_1, \dots, x_ν , den wir durch die Operation S_1 der Bewegungsgruppe G in den Punkt x' mit den Koordinaten x'_1, \dots, x'_ν überführen. Dann gilt

$$S_1: x' = Ax + t \quad (1.1)$$

wobei A eine quadratische Matrix mit ν Reihen bedeutet, und

$$t = \begin{pmatrix} t^{(1)} \\ \vdots \\ t^{(\nu)} \end{pmatrix}$$

¹⁰⁾ Siehe z.B. *P. Niggli*, Baugesetze kristalliner Materie, Z. Kristallogr., Bd. 63.

eine Matrix mit einer einzigen Spalte ist, die die Translation bestimmt. Ist

$$S_2 : x' = Bx + s$$

eine zweite Operation der Gruppe, so gilt für die Zusammensetzung

$$S_1 S_2 : x' = A(Bx + s) + t = ABx + As + t,$$

wobei AB wiederum eine quadratische Matrix mit ν Reihen und $As + t$ eine einzige Spalte ist.

Die Substitutionen S_1 und S_2 bezeichnen wir kurz durch

$$S_1 = (A, t), \quad S_2 = (B, s).$$

Dann gilt

$$S_1 S_2 = (A, t) (B, s) = (AB, As + t). \quad (1.2)$$

An weiteren Regeln für das Rechnen mit diesen Substitutionen erhält man leicht die folgenden:

Sei E die ν -dimensionale Einheitsmatrix, dann lautet das Einheits-element der Bewegungsgruppe (E, O) , wo O eine Spalte von ν Nullen ist. Ferner erhält man durch Auflösen der Gleichungen (1.1) für das zu (A, t) inverse Element:

$$(A, t)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}t). \quad (1.3)$$

Aus (1.2) sieht man, daß die Matrizen $E, A, B \dots$ für sich eine Gruppe \mathfrak{G} bilden. An Stelle der rechtwinkligen Koordinaten x_1, \dots, x_ν ist es für alles Weitere vorteilhaft, Gitterkoordinaten einzuführen. Diese lassen wir mit den das Gitter aufspannenden Vektoren ξ_1, \dots, ξ_ν zusammenfallen, die Längen der Vektoren ξ_1, \dots, ξ_ν nehmen wir als Längeneinheit auf den entsprechenden Achsen. In diesem Koordinatensystem werden die Koordinaten aller Gitterpunkte ganze Zahlen; indem wir die Substitutionen der Gruppe \mathfrak{G} auf die Gitterpunkte anwenden, sehen wir, daß sich in den Gitterkoordinaten die Gruppe \mathfrak{G} ganzzahlig schreiben läßt. Ferner läßt \mathfrak{G} eine positiv definite quadratische Form invariant, ist also eine endliche Gruppe, die man eine Kristallklasse nennt. Wenn wir im Folgenden von einer Kristallklasse \mathfrak{G} und ihren Elementen

E, A, B, \dots sprechen, so denken wir uns \mathfrak{G} stets ganzzahlig durch ν -reihige quadratische Matrizen dargestellt, und bezeichnen eine dieser Darstellungen ebenfalls mit E, A, B, \dots .

Zwischen der Kristallklasse \mathfrak{G} und einer zu ihr gehörenden Bewegungsgruppe G besteht der folgende Zusammenhang:

Betrachtet man alle Elemente (E, t) , wobei die Spalte t willkürlich gelassen ist, so bildet ihre Gesamtheit einen Abel'schen Normalteiler \mathfrak{T} . Dieser Normalteiler \mathfrak{T} heißt die Translationsgruppe, und es gilt der Fundamentalsatz, daß die Faktorgruppe G/\mathfrak{T} isomorph zu \mathfrak{G} ist. Dies bedeutet:

Sind $(A, s), (B, t), (C, r)$ drei Elemente der Bewegungsgruppe, und gilt

$$AB = C,$$

so folgt

$$(A, s) (B, t) \equiv (C, r) \pmod{\mathfrak{T}} \quad (1.4)$$

und mit Rücksicht auf (1.2)

$$At + s \equiv r \pmod{\mathfrak{T}}. \quad (1.5)$$

Diese Kongruenzen sind zuerst von Frobenius¹¹⁾ aufgestellt worden, aus ihnen sind bei gegebener Kristallklasse \mathfrak{G} die zugehörigen Bewegungsgruppen zu bestimmen. Frobenius zeigte, daß bei passender Wahl des Koordinatenursprunges die t, r, s, \dots stets rationale Zahlen mit dem Nenner n sind, falls die Kristallklasse eine Gruppe der Ordnung n ist. Daraus folgt dann leicht, daß es zu gegebener Klasse nur endlich viele Bewegungsgruppen geben kann. Wenn wir noch an die Festsetzung erinnern, daß wir auf den Gitterkoordinaten stets den aufspannenden Vektor als Längeneinheit nehmen, so schreiben sich die Frobenius'schen Kongruenzen (1.5) folgendermaßen:

$$At + s \equiv r \pmod{1}, \quad (1.6)$$

d. h. die auftretenden Translationen sind nur bis auf additive Vielfache von 1 bestimmt, sind also echte Brüche mit dem Nenner n . In dieser Weise findet man die 230 Raumgruppen bei Niggli¹²⁾ und bei Wyckoff¹³⁾ dargestellt.

¹¹⁾ Siehe unter 5) in § 5.

¹²⁾ P. Niggli, Geometrische Kristallographie des Diskontinuums, Leipzig 1919.

¹³⁾ R.W.G. Wyckoff, The analytical expression of the results of the theory of space groups. Washington 1930.

Eine Lösung von (1.6) läßt sich leicht angeben. Man setzt für alle Elemente $t = r = s = \dots = 0$, wo 0 eine Spalte von ν Nullen bedeutet. Diese Lösung und die zugehörige Bewegungsgruppe nennt man die Null-Lösung.

Bevor wir in § 2 zur weiteren Auflösung der Frobenius'schen Kongruenzen gehen, ist es wichtig, zu bestimmen, wann zwei Lösungen äquivalent heißen und als gleich zu betrachten sind. Dazu führt die folgende Ueberlegung. Wir haben die Raumgruppe durch ein regelmäßiges Punktsystem bestimmt, dieses wird aus einem Gitter I erhalten, das noch spezielle Symmetrien aufweisen kann. I wurde durch die Vektoren ξ_1, \dots, ξ_ν aufgespannt und ging durch die Substitutionen von \mathfrak{G} in sich über. Nun kann aber I auf unendlich viele verschiedene Weisen durch ν linear unabhängige Vektoren aufgespannt werden, der Uebergang zwischen zwei verschiedenen Systemen wird durch eine unimodulare ganzzahlige Substitution U vermittelt. Mit der Kristallklasse werden wir also alle diejenigen als äquivalent betrachten, die aus ihr durch unimodulare ganzzahlige Transformation hervorgehen, aber auch nur diese. Dieser arithmetische Aequivalenzbegriff für die Klassen ist enger als derjenige, den der Kristallograph verwendet. Er nennt zwei Klassen schon dann äquivalent, wenn sie durch eine beliebige Transformation auseinander hervorgehen. Wenn wir im Folgenden von Klassen sprechen, so meinen wir immer Klassen im arithmetischen Sinne, nicht im kristallographischen. Ich werde dafür in § 3 einige Beispiele geben. Daß es für gegebene Ordnung n nur endlich viele inäquivalente Klassen gibt, ist von Minkowski bewiesen worden. Durch diesen arithmetischen Klassenbegriff erreichen wir geometrisch, daß sich die Bewegungsgruppen stets durch einen primitiven Fundamentalbereich bestimmen lassen. Dies ist bekanntlich in den Darstellungen von Niggli und Wyckoff nicht immer der Fall, wo mehrfach primitive Fundamentalbereiche verwendet werden müssen.

Nachdem wir nun wissen, wann die Klassen als gleich zu betrachten sind, ist es noch möglich, daß durch eine Verschiebung des Koordinaten Ursprungs dieselbe Bewegungsgruppe in verschiedener Gestalt dargestellt werden kann. Zusammenfassend sehen wir somit, daß wir zwei Bewegungsgruppen G_1 und G_2 , dann und nur dann als gleich betrachten und ihre Darstellung äquivalent nennen, wenn es eine unimodulare ganzzahlige Matrix U und eine Spalte s gibt, so daß

$$(U, s)^{-1} G_1 (U, s) = G_2 \quad (1.7)$$

ist. Diese Bedingung soll eingehender untersucht werden. G_1 und G_2

mögen aus derselben Klasse \mathfrak{G} stammen, deren Ordnung n sei, und deren Elemente wir mit e_1, e_2, \dots, e_n bezeichnen. e_1 sei stets das Einheitsselement. Ferner seien die Elemente von G_1 mit $(e_1, 0), (e_2, p_2), \dots, (e_n, p_n)$ und diejenigen von G_2 mit $(e_1, 0), (e_2, q_2), \dots, (e_n, q_n)$ bezeichnet. (1.7) besagt, daß G_1 und G_2 dann und nur dann äquivalent sind, wenn es eine unimodulare ganzzahlige Matrix u und eine Spalte s gibt, so daß

$$(u, s)^{-1} (e_i, p_i) (u, s) = (e_k, q_k) \quad (1.8)$$

ist. Durchläuft dabei i alle Zahlen von 1 bis n , so nimmt auch k alle Werte zwischen 1 und n an. (1.8) stellt unendlich viele Gleichungen dar entsprechend dem Umstande, daß die Gruppen G_1 und G_2 unendlich viele Elemente enthalten. Doch können wir daraus ein System von ν Kongruenzen aussondern, wenn wir die p_i und die q_k nur modulo 1 betrachten. Somit erhalten wir

$$(u, s)^{-1} (e_i, p_i) (u, s) \equiv (e_k, q_k) \pmod{1} \quad (1.9)$$

als Bedingung für die Äquivalenz. Diese ergibt

$$u^{-1} e_i u = e_k \quad (1.10)$$

und

$$u^{-1} (e_i s + p_i - s) = q_k \pmod{1}. \quad (1.11)$$

In dieser Gestalt sind die Äquivalenzbedingungen für zwei Bewegungsgruppen nur schwer zu übersehen, und dies mag der Grund dafür sein, weshalb bisher die Methoden von Frobenius nicht weiter ausgebaut wurden. In der geometrischen Ableitung tritt diese Schwierigkeit nicht auf, da dort die Anschauung unmittelbar entscheidet, ob zwei Kombinationen von Symmetrieelementen gleich sind oder nicht.

Aus (1.11) leitet man leicht eine hinreichende Bedingung für die Äquivalenz von G_1 und G_2 her. Ist nämlich

$$p_i - q_i \equiv (e_1 - e_i) s \pmod{1} \quad (1.12)$$

dann gilt

$$q_i \equiv (e_i - e_1) s + p_i \pmod{1}$$

und (1.10) und (1.11) sind erfüllt, indem man $u = e_1$ wählt.

Ferner ist es wichtig, zu sehen, wann eine Bewegungsgruppe der Null-Lösung äquivalent ist. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß sich eine solche Spalte s finden läßt, daß

$$(e_i - e_1) s + p_i \equiv 0 \pmod{1} \quad (1.13)$$

für alle $i = 1, \dots, n$ eine Lösung hat. Es ist also in diesem Falle lediglich die Spalte s zu bestimmen, für die Matrix u wählt man die Einheitsmatrix.

§ 2. Ich behandle die zyklischen Gruppen und gebe für sie die Anzahl der inäquivalenten Lösungen der Frobenius'schen Kongruenzen an. Zunächst sei die Kristallklasse eine Gruppe \mathfrak{G}_2 zweiter Ordnung, ν -dimensional ganzzahlig dargestellt. Ihre Elemente seien e und a , dabei gelte

$$e^2 = a^2 = e, \quad ea = ae = a.$$

Eine zugehörige Bewegungsgruppe G_2 bestehe aus den Elementen $(e, 0)$, (a, p) , wobei wir uns p aus den Frobenius'schen Kongruenzen bestimmt denken. Ich behaupte:

Satz 1. *Enthält die Darstellung e , a die identische Darstellung nicht, so ist jede Lösung $p \neq 0$ der Frobenius'schen Kongruenzen der Null-Lösung äquivalent.*

Dabei bedeutet $p \neq 0$, daß nicht alle ν Zahlen der Spalte p kongruent Null (mod 1) sein sollen. Um den Satz zu beweisen, müssen wir nach (1.13) zeigen, daß

$$(a - e) s + p \equiv 0 \pmod{1} \quad (2.1)$$

eine Lösung in s hat. Da nun die identische Darstellung in e , a nicht enthalten ist, so gilt¹⁴⁾

$$e + a = 0$$

wo 0 die ν -reihige quadratische Matrix mit lauter Nullen ist. Also ist $a = -e$, dies in (2.1) eingesetzt ergibt

$$p \equiv 2es \pmod{1}$$

$$\text{oder} \quad p \equiv 2s \pmod{1},$$

$$\text{woraus} \quad s \equiv p/2 \pmod{1},$$

und damit ist die Spalte s bestimmt.

¹⁴⁾ Siehe A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Auflage, § 52.

Satz 2. Enthält die Darstellung e , a von \mathfrak{G}_2 die identische Darstellung genau einmal, und ist sie unimodular ganzzahlig vollständig reduzibel auf die Form

$$e = \begin{pmatrix} e' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wo e' , a' eine $(\nu-1)$ -reihige Matrixendarstellung bilden, die die identische Darstellung nicht mehr enthält, dann gibt es zu \mathfrak{G}_2 genau zwei inäquivalente Bewegungsgruppen G_2 und G_2' .

Es ist dabei wesentlich, daß wir als Transformationen der Gruppe nur die unimodularen ganzzahligen zulassen, weil wir in derselben Klasse bleiben müssen. Sei

$$G_2 : (e, 0), (a, 0)$$

$$G_2' : (e, 0), (a, p).$$

Für die Elemente der Spalte p kommen nur die Werte 0 und $1/2$ in Betracht. Ich zeige zuerst, daß die Gruppe G_2' mit

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

nicht der Null-Lösung äquivalent ist. Denn wäre sie der Null-Lösung äquivalent, so wäre nach (I.13)

$$p \equiv (e - a) s \equiv \begin{pmatrix} e' - a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} s \pmod{1}$$

lösbar. Von diesen ν Kongruenzen besagt die letzte, daß $p^{(\nu)}$ eine ganze Zahl sein soll, während wir doch $p^{(\nu)} = 1/2$ angenommen haben.

Jede beliebige Lösung $(e, 0), (a, q)$ ist einer der Gruppen G_2 oder G_2' äquivalent. Denn nach (I.12) ist für die Äquivalenz hinreichend, daß

$$p - q \equiv (e - a) s \equiv \begin{pmatrix} 2e' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} s \pmod{1}$$

eine Lösung hat. Diese lautet für die $\nu-1$ ersten dieser Kongruenzen

$$s^{(i)} \equiv \frac{1}{2} (p^{(i)} - q^{(i)}) \pmod{1}, \quad i = 1, \dots, \nu-1$$

während $s^{(v)}$ beliebig ist, und die Lösung zu G_2 oder zu G_2' äquivalent ist, je nachdem $q^{(v)} = 0$ oder $q^{(v)} = 1/2$.

Außer den in Satz 1 und 2 genannten Fällen ist es noch möglich, daß \mathfrak{G}_2 wohl die identische Darstellung enthält, sich aber nicht auf die Form von Satz 2 transformieren läßt. Dann sind die Verhältnisse im allgemeinen nicht mehr so einfach zu übersehen. Ich will hier auf den Zusammenhang mit den invarianten Linearformen hinweisen. Ist die identische Darstellung in \mathfrak{G}_2 genau einmal enthalten, so tritt eine solche Form auf. Diese erhalten wir, indem wir bilden

$$(e + a) x$$

wo x eine Spalte mit ν Variablen ist. Jedes Element dieses Produktes stellt dieselbe Linearform $L(x)$ dar. Die Frobenius'schen Kongruenzen erhält man daraus, indem man setzt

$$L(x) \equiv 0 \pmod{1}.$$

Denn aus $a^2 = e$ folgt $(a, p)^2 = (e, 0)$ und das heißt

$$(e + a) p \equiv 0 \pmod{1}.$$

Diese reduzieren sich also auf eine einzige Gleichung, die eine lineare Abhängigkeit zwischen den primitiven Translationen ausdrückt. Geometrisch bleibt unter der Gruppe \mathfrak{G}_2 nicht mehr eine Achse invariant, wie in Satz 2, sondern ein gewisses lineares Gebilde. Ich werde dafür in § 3 ein Beispiel geben.

Ich gehe jetzt zu den zyklischen Gruppen von der Ordnung $n > 2$ über. \mathfrak{G}_n werde erzeugt durch das Element a , eine zugehörige Bewegungsgruppe bestehe aus den Elementen $(e, 0)$, (a, p_1) , (a^2, p_2) , ..., (a^{n-1}, p_{n-1}) . Die Frobenius'schen Kongruenzen besagen

$$(a, p_1)^2 \equiv (a^2, ap_1 + p_1) \equiv (a^2, p_2) \pmod{1}$$

woraus
$$p_2 \equiv (a + e) p_1 \pmod{1};$$

ferner
$$(a, p_1)(a^2, p_2) \equiv (a^3, (a^2 + a + e)p_1) \equiv (a^3, p_3) \pmod{1}$$

woraus
$$p_3 \equiv (a^2 + a + e)p_1 \pmod{1},$$

und allgemein

$$p_i \equiv (a^{i-1} + \dots + a + e)p_1 \pmod{1} \quad (2.2)$$

für $i = 1, \dots, n-1$. Dadurch werden p_2, \dots, p_{n-1} durch p_1 ausgedrückt. Wir setzen zur Abkürzung stets $p_1 = p$ und nennen (a, p) das erzeugende Element von G_n . Wir erhalten die Null-Lösung, wenn wir $p = 0$ setzen, denn nach (2.2) folgt daraus $p_2 = \dots = p_{n-1} = 0$.

Falls eine beliebige Gruppe G_n der Null-Lösung äquivalent sein soll, so muß nach (1.13) gelten

$$\left. \begin{array}{l} p \equiv (e - a) s \\ (a + e) p \equiv (e - a^2) s \\ \dots\dots\dots \\ (a^{n-2} + \dots + a + e) p \equiv (e - a^{n-1}) s \end{array} \right\} \pmod{1}. \quad (2.3)$$

Die formale Lösung hiervon lautet

$$s = (e - a)^{-1} p \quad (2.4)$$

denn es ist $(e - a^i) = (e - a)(e + a + \dots + a^{i-1})$.

Ueber die Existenz der Lösung (2.3) gilt

Satz 3: Enthält die zyklische Gruppe \mathfrak{G}_n die identische Darstellung nicht, so existiert die Matrix $(e - a)^{-1}$, und somit ist jede Lösung der Frobenius'schen Kongruenzen der Null-Lösung äquivalent.

Um zu zeigen, daß $(e - a)^{-1}$ existiert, muß ich nur zeigen, daß die Determinante von $(e - a)$ von Null verschieden ist. Dazu bestimme ich eine Transformation v derart, daß

$$v^{-1} a v = a^*$$

die Diagonalform hat. In der Hauptdiagonalen von a^* stehen lauter Einheitswurzeln, diese sind von $+1$ verschieden, da \mathfrak{G}_n die identische Darstellung nicht enthalten soll. Folglich ist

$$|(e - a)| = |(e - a^*)| \neq 0.$$

Die Inverse von $(e - a)$ hat die Form

$$(e - a)^{-1} = \frac{1}{n} \left\{ (n-1) e + (n-2) a + \dots + 2a^{n-3} + a^{n-2} \right\}$$

wie man mittels

$$e + a + \dots + a^{n-1} = 0$$

leicht zeigt.

Satz 4: Enthält die zyklische Gruppe \mathfrak{G}_n die identische Darstellung genau einmal und kann ihr erzeugendes Element unimodular ganzzahlig auf die Form

$$a = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

transformiert werden, so haben die Frobenius'schen Kongruenzen genau n inäquivalente Lösungen.

Es kann nicht jede Lösung der Null-Lösung äquivalent sein, denn sonst müßte wie eben $|(e - a)| \neq 0$ sein, während doch

$$|(e - a)| = \begin{vmatrix} e' - a' & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ist. Sei (a, p) das erzeugende Element der Bewegungsgruppe. Dann behaupte ich, daß die folgenden n Lösungen inäquivalent sind:

$$p^{(1)} \equiv p^{(2)} \equiv \dots \equiv p^{(n-1)} \equiv 0, p^{(n)} \equiv \frac{k}{n} \pmod{1}, k = 0, \dots, n-1 \quad (2.5)$$

Diese Werte sind wirklich Lösungen der Frobenius'schen Kongruenzen, denn aus

$$(a, p)^n \equiv (e, 0) \pmod{1}$$

folgt

$$(e + a + \dots + a^{n-1}) p \equiv 0 \pmod{1}$$

oder

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} p \equiv 0 \pmod{1},$$

was durch die Werte (2.5) sicher erfüllt wird.

Bevor ich zeige, daß die n Lösungen (2.5) wirklich inäquivalent sind, zeige ich, daß jede beliebige Lösung, die etwa durch das Element (a, q) erzeugt werde, einer der Lösungen (2.5) äquivalent ist. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die beiden erzeugenden Elemente einander entsprechen sollen. Dann muss nach (1.12) gelten

$$p - q \equiv (e - a) s \pmod{1}.$$

Die $\nu - 1$ ersten Kongruenzen lassen sich wiederum in s lösen, da $|(e' - a')| \not\equiv 0$. Ferner sagt die ν -te Kongruenz, daß die durch (a, q) erzeugte Gruppe derjenigen Lösung äquivalent ist, für die

$$q^{(\nu)} \equiv p^{(\nu)} \pmod{1}$$

ist.

Wir betrachten jetzt eine zyklische Gruppe \mathfrak{G}_n , die die identische Darstellung gerade λ -mal ($\lambda < n$) enthält, und nehmen an, ihr erzeugendes Element a lasse sich unimodular ganzzahlig auf die Form

$$a = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

transformieren, wobei die durch die $(\nu - \lambda)$ -reihige Matrix a' erzeugte Gruppe die identische Darstellung nicht mehr enthält. 1 bedeutet die λ -reihige Einheitsmatrix.

Seien (a, p) und (a, q) die erzeugenden Elemente zweier zu \mathfrak{G}_n gehöriger Bewegungsgruppen G_n und G_n' . Wir können wiederum ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass diese Elemente einander entsprechen. Damit dann G_n und G_n' äquivalent sind, muß es nach (I.10) und (I.11) eine Matrix u und eine Spalte s geben, so daß

$$u^{-1} a u = a \tag{2.6}$$

$$\text{und} \quad p - (e - a) s \equiv u q \pmod{1}. \tag{2.7}$$

Zerspalten wir u in der gleichen Weise wie a in Kästchen

$$u = \begin{pmatrix} u' & v' \\ v'' & u'' \end{pmatrix}$$

wobei u' bzw. u'' je $\nu - \lambda$ bzw. λ -reihige quadratische Matrizen sind. Dann folgt aus (2.6)

$$\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' & v' \\ v'' & u'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' & v' \\ v'' & u'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

woraus

$$\begin{pmatrix} a' u' & a' v' \\ v'' & u'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' a' & v' \\ v'' a' & u'' \end{pmatrix}$$

und somit $v' = v'' = 0$.

Ich setze in analoger Weise

$$p = \begin{pmatrix} p' \\ p'' \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} q' \\ q'' \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} s' \\ s'' \end{pmatrix},$$

wobei p' , q' und s' Spalten mit $\nu - \lambda$ Elementen, p'' , q'' und s'' Spalten mit λ Elementen bedeuten.

Dadurch wird (2.7) zu

$$\begin{pmatrix} p' \\ p'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e' - a' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s' \\ s'' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u' & 0 \\ 0 & u'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' \\ q'' \end{pmatrix} \pmod{1}$$

oder

$$p' = (e' - a') s' \equiv u' q' \pmod{1} \quad (2.8)$$

und

$$p'' \equiv u'' q'' \pmod{1}, \quad (2.9)$$

zerfällt also in zwei voneinander unabhängige Systeme. Wegen $|u| = 1$ folgt aus (2.6) $|u'| = |u''| = 1$.

Um nun den Rest von Satz 4 zu beweisen, wo $\lambda = 1$ ist, muß ich nur zeigen, daß (2.7) für zwei verschiedene der in (2.5) angegebenen Werte keine Lösung haben kann. Dazu bemerken wir, daß (2.9) in diesem Falle nicht lösbar ist, dies ist hier eine einzige Gleichung. Setze ich noch $p'' = \frac{k}{n}$, $q'' = \frac{l}{n}$, $k \equiv l \pmod{1}$, so ist es nicht möglich, daß

$$\frac{k}{n} \equiv \frac{l}{n} \pmod{1}$$

wird. (2.8) läßt sich lösen, indem man für u' die Einheitsmatrix nimmt. Wir nehmen für das Folgende an, die Ordnung n von \mathfrak{G}_n sei eine Primzahl.

Ist die identische Darstellung in \mathfrak{G}_n mehr als einmal enthalten, so gilt

Satz 5: Enthält unter den angegebenen Bedingungen G_n die identische Darstellung mehr als einmal, so haben die Frobenius'schen Kongruenzen genau zwei inäquivalente Lösungen.

Für zwei beliebige Lösungen p und q lassen sich die Gleichungen (2.8) stets befriedigen, denn $|(e' - a')| \neq 0$, für u' wählt man die Einheitsmatrix.

Um also über die Äquivalenz von (a, p) und (a, q) zu entscheiden, müssen wir noch (2.9) untersuchen, es fallen daher nur die Werte von p'' und q'' in Betracht. Ich zeige, daß jede Lösung entweder der Null-Lösung oder der Lösung

$$p'' = \begin{pmatrix} \frac{k}{n} \\ \vdots \\ \frac{k}{n} \end{pmatrix}$$

äquivalent ist, wobei $k \neq 0$ eine beliebige fest gewählte Zahl $< n$ ist. Dazu zeige ich, daß jede Lösung

$$q'' = \begin{pmatrix} \frac{l_1}{n} \\ \vdots \\ \frac{l_\lambda}{n} \end{pmatrix}$$

wo l_1, \dots, l_λ gleiche oder verschiedene, von Null verschiedene ganze Zahlen $< n$ sind, der Lösung p'' äquivalent ist, durch vollständige Induktion nach λ . Für $\lambda = 2$ lautet (2.9), wenn $u'' = (u_{ik})$, $i, k = 1, \dots, \lambda$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \frac{k}{n} &\equiv u_{11} \frac{l_1}{n} + u_{12} \frac{l_2}{n} \\ \frac{k}{n} &\equiv u_{21} \frac{l_1}{n} + u_{22} \frac{l_2}{n} \end{aligned} \quad (\text{mod } 1).$$

Ich wähle $u_{11} = 1$. Dann bestimme ich u_{12} so, daß

$$\frac{k}{n} \equiv \frac{l_1}{n} + u_{12} \frac{l_2}{n} \quad (\text{mod } 1)$$

erfüllt ist. Dies ist stets möglich, denn diese Kongruenz besagt

$$k - l_1 \equiv u_{12} l_2 \quad (\text{mod } n).$$

Da nun $(k, n) = 1$, $(l_2, n) = 1$, ebenso, weil n eine Primzahl $(k - l_1, n) = 1$, so läßt sich stets eine solche ganze Zahl u_{12} finden, daß $u_{12} l_2$ den Rest $k - l_1$ nach n läßt.

Da die Determinante

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = 1$$

sein muß, nehme ich

$$u_{22} = 1 + u_{21} u_{12}.$$

Somit lautet die zweite Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{k}{n} &\equiv u_{21} \frac{l_1}{n} + (1 + u_{21} u_{12}) \frac{l_2}{n} \equiv u_{21} \left(\frac{l_1}{n} + u_{12} \frac{l_2}{n} \right) + \frac{l_2}{n} \\ &\equiv u_{21} \frac{k}{n} + \frac{l_2}{n} \pmod{1}, \end{aligned}$$

was sich wie eben mit ganzzahligem u_{21} lösen läßt.

Ich nehme nun an, der Satz sei bewiesen für $\lambda - 1$ und zeige, daß er dann auch für λ gilt. Hier lauten unsere Kongruenzen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{k}{n} &\equiv u_{11} \frac{l_1}{n} + \dots + u_{1\lambda} \frac{l_\lambda}{n} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{k}{n} &\equiv u_{\lambda 1} \frac{l_1}{n} + \dots + u_{\lambda \lambda} \frac{l_\lambda}{n} \end{aligned} \right\} \pmod{1}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gehen diese über in

$$\left. \begin{aligned} \frac{k}{n} &\equiv u_{11} \frac{l_1}{n} + \frac{k}{n} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{k}{n} &\equiv u_{\lambda-1,1} \frac{l_1}{n} + \frac{k}{n} \\ \frac{k}{n} &\equiv u_{\lambda 1} \frac{l_1}{n} + u_{\lambda 2} \frac{l_2}{n} + \dots + u_{\lambda \lambda} \frac{l_\lambda}{n} \end{aligned} \right\} \pmod{1}.$$

Ich wähle: $u_{11} = \dots = u_{\lambda-1,1} = 0$, ferner

$$u_{\lambda 1} = 1, u_{\lambda 2} = \dots = u_{\lambda, \lambda-1} = 0,$$

und bestimme $u_{\lambda\lambda}$ so, daß

$$\frac{k}{n} = \frac{l_1}{n} + u_{\lambda\lambda} \frac{l_\lambda}{n} \pmod{1},$$

was wiederum in ganzzahligem $u_{\lambda\lambda}$ möglich ist. Damit ist auch die Bedingung erfüllt, daß $|u''| = 1$ ist.

Wir haben bei diesem Beweise angenommen, daß die l_1, \dots, l_λ von Null verschieden seien. Durchgeht man aber den Beweis, so sieht man leicht, daß er auch richtig bleibt, wenn beliebig viele l_i bis auf eines gleich Null sind, wir können annehmen, daß dies l_λ sei.

Ich zeige noch, daß die Lösung p'' nicht der Null-Lösung $q'' = 0$ äquivalent sein kann. Wären diese beiden Lösungen äquivalent, so müßten sich die folgenden Gleichungen auflösen lassen

$$p'' \equiv u'' q'' \equiv 0 \pmod{1},$$

was aber nicht der Fall ist, da $k \not\equiv 0 \pmod{1}$ vorausgesetzt wurde. Somit ist Satz 5 in allen Teilen bewiesen.

§ 3. Die Bestimmung der Bewegungsgruppen in einer nicht zyklischen Klasse kann in bestimmten Fällen auf den zyklischen Fall zurückgeführt werden. Ich werde dies zuerst für gewisse Klassen durchführen, die ein System von Erzeugenden zweiter Ordnung besitzen, und nachher für Klassen, die Untergruppen vom Index zwei enthalten. Als Beispiele gebe ich die 17 ebenen Bewegungsgruppen¹⁵⁾; in § 4 wird sich zeigen, daß die Methoden sehr weit reichen.

Die Klasse habe das System a, a', \dots von Erzeugenden zweiter Ordnung, $a^2 = a'^2 = \dots = e$ (e = Einheitselement), b sei ein beliebiges Element der Gruppe. In einer zugehörigen Bewegungsgruppe mögen die entsprechenden Elemente lauten: $(a, p), (a', p'), \dots$ und (b, q) . Falls nun aus $a^2 = a'^2 = \dots = e$ für alle Erzeugende folgt, daß $p \equiv p' \equiv \dots \equiv 0 \pmod{1}$ die einzige Lösung der Frobenius'schen Kongruenzen ist, so sieht man leicht, daß dann auch $q \equiv 0 \pmod{1}$ für jedes beliebige Element sein muß.

¹⁵⁾ Siehe hierzu meine Arbeit „Bemerkungen zur arithmetischen Berechnung der Bewegungsgruppen“ in dieser Zeitschr. Bd. 2, und die dort angegebene weitere Literatur.

Ein Beispiel bildet das hexagonale System. Wir schreiben die Substitutionen in Gitterkoordinaten, das sind hier zwei Achsen, die einen Winkel von 120° miteinander bilden.

C_{3v} hat zu Erzeugenden die Spiegelungen α und α' an den Koordinatenachsen. e , α und e , α' sind dann Gruppen, die die identische Darstellung enthalten, aber nicht in der Form von Satz 2. Man zeigt leicht, daß es zu diesen Gruppen nur die Null-Lösung gibt. Folglich gibt es zu C_{3v} nur \mathfrak{C}_{3v}^I .

Eine in unserem Sinne neue Klasse, die ich C_{3s} nenne, wird durch die Spiegelungen α und α' an zwei Geraden erzeugt, die mit den Koordinatenachsen einen Winkel von 30° bilden (Winkelhalbierende). Die Gruppen e , α und e , α' lassen ebenfalls nur die Null-Lösung zu, und folglich gibt es nur \mathfrak{C}_{3s}^I (in der geometrischen Kristallographie mit \mathfrak{C}_{3v}^{II} bezeichnet).

Endlich hat C_{6v} sowohl die Spiegelungen an den Koordinatenachsen als auch diejenigen an den Winkelhalbierenden zu Erzeugenden, und somit gibt es nur \mathfrak{C}_{6v}^I .

Um die Aufzählung der Bewegungsgruppen des hexagonalen Systems vollständig zu machen, muß ich nur noch bemerken, daß C_3 und C_6 zyklische Gruppen sind, die die identische Darstellung nicht enthalten, und es deshalb nur \mathfrak{C}_3^I und \mathfrak{C}_6^I gibt.

Ich gehe jetzt zur zweiten Methode über, nach der übrigens auch die obigen Beispiele behandelt werden können. \mathfrak{G}_{2n} sei eine Klasse, die einen Normalteiler \mathfrak{G}_n vom Index zwei enthält. Wir zerlegen \mathfrak{G}_{2n} in Nebengruppen nach \mathfrak{G}_n : $\mathfrak{G}_{2n} = \mathfrak{G}_n + b \mathfrak{G}_n$. Die aus e und b gebildete Gruppe heiße \mathfrak{G}_2 . Im übrigen gelte folgende Bezeichnung:

$$\mathfrak{G}_n : e, a_1, \dots, a_{n-1}; G_n : (e, 0), (a_1, p_1), \dots, (a_{n-1}, p_{n-1})$$

$$\mathfrak{G}_2 : e, b; G_2 : (e, 0), (b, q)$$

$$G_{2n} : (e, 0), (a_1, t_1), \dots, (a_{n-1}, t_{n-1}), (b, t_n), (ba_1, t_{n+1}), \dots, (ba_{n-1}, t_{2n-1})$$

Ich nehme an, daß zu \mathfrak{G}_n und zu \mathfrak{G}_2 die Bewegungsgruppen bekannt sind, und will daraus die zu \mathfrak{G}_{2n} gehörenden ableiten. Für die t_i können nur die folgenden Werte in Frage kommen:

$$t_i \equiv p_i \pmod{1} \text{ für } i = 1, \dots, n-1. \quad (3.1)$$

$$t_n \equiv q \pmod{1}. \quad (3.2)$$

Aber nicht alle beliebigen von diesen Werten sind zulässig, denn es besteht zwischen den p_i und q eine bemerkenswerte Relation, die man folgendermaßen erhält:

Es sei $a_k \cdot b = b a_i$, woraus mit (3.1)

$$a_k q + p_k \equiv t_{n+i} \pmod{1}. \quad (3.3)$$

Ferner folgt aus $b \cdot a_i = b a_i$, daß

$$b p_i + q \equiv t_{n+i} \pmod{1}. \quad (3.4)$$

Also muß
$$a_k q + p_k \equiv b p_i + q \pmod{1}. \quad (3.5)$$

t_{n+i} wird dann durch (3.3) oder (3.4) bestimmt.

Ich behaupte weiter, daß alle Werte von p_i und q , die (3.5) genügen, wirklich Lösungen zu \mathfrak{G}_{2n} sind. Dazu muß ich nur noch zeigen, daß die aus dem Produkt zweier beliebigen Elemente aus $b \mathfrak{G}_n$ sich ergebenden Kongruenzen aus Obigem folgen. Sei zu diesem Zweck

$$b a_i = a_k b \text{ und } b a_j = a_l b, \text{ ferner } b a_i b a_j = a_k a_j = a_m.$$

Hieraus folgt

$$b a_i t_{n+j} + t_{n+i} \equiv p_m \pmod{1}.$$

Für t_{n+j} den Wert aus (3.4) und für t_{n+i} denjenigen aus (3.3) eingesetzt:
 $b a_i (b p_j + q) + a_k q + p_k \equiv p_m \pmod{1}$ oder

$$a_k p_j + p_k - p_m + b a_i q + a_k q \equiv 0 \pmod{1}.$$

Nun ist $a_k p_j + p_k - p_m \equiv 0 \pmod{1}$, wie aus $a_k a_j = a_m$ nach Voraussetzung über \mathfrak{G}_n folgt. Ferner ist $b a_i q + a_k q \equiv a_k b q + a_k q \equiv a_k (b + e) q \equiv 0 \pmod{1}$ nach Voraussetzung über \mathfrak{G}_2 . Somit ist die Behauptung bewiesen.

Besonders einfach werden die Verhältnisse, wenn man weiß, daß es zu \mathfrak{G}_n nur die Null-Lösung gibt und sich (3.5) bei beliebigem q nur für $p \equiv 0 \pmod{1}$, nicht aber für einen dazu äquivalenten Wert lösen läßt.

Ist \mathfrak{G}_n nicht nur Normalteiler in \mathfrak{G}_{2n} , sondern ist \mathfrak{G}_{2n} das direkte Produkt aus \mathfrak{G}_2 und \mathfrak{G}_n : $\mathfrak{G}_{2n} = \mathfrak{G}_2 \times \mathfrak{G}_n$, so wird $a_k b = b a_k$, und somit ist in (3.5) $k = i$ zu setzen.

Unter sämtlichen so gefundenen Lösungen von \mathfrak{G}_{2n} sind die inäquivalenten auszusondern. Damit zwei Lösungen äquivalent sind, muß (1.10) und (1.11) bestehen. (1.10) besagt, daß die Transformation u einen Automorphismus von \mathfrak{G}_{2n} bewirkt. Falls $n > 2$ ist, muß dabei \mathfrak{G}_n in

sich übergehen, ebenso \mathfrak{G}_2 . Falls man also unter Berücksichtigung von (3.4) und (3.5) zwei inäquivalente Lösungen der einen Klasse mit einer Lösung der anderen Klasse zusammensetzt, so erhält man sicher zwei inäquivalente Lösungen von \mathfrak{G}_{2n} .

Als erstes Beispiel nehmen wir diejenigen ebenen Bewegungsgruppen, die ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Gitterkoordinaten haben.

C_2 und C_4 sind zyklische Gruppen, die die identische Darstellung nicht enthalten, es gibt also nur \mathfrak{C}_2^I und \mathfrak{C}_4^I .

Die Klasse C_s wird durch Spiegelung a an einer Koordinatenachse erzeugt. e, a enthält die identische Darstellung wie in Satz 2, es gibt also zwei zugehörige Bewegungsgruppen: \mathfrak{C}_s^I und \mathfrak{C}_s^{II} .

Eine neue Klasse, die ich C_k nenne, entsteht durch Spiegelung a an einer Winkelhalbierenden. Die Gruppe enthält die identische Darstellung, und man zeigt leicht, daß sie sich nicht unimodular ganzzahlig in die Form von Satz 2 transformieren läßt. Jede Lösung der Frobenius'schen Kongruenzen ist der Null-Lösung äquivalent, es gibt also nur \mathfrak{C}_k^I (in der geometrischen Kristallographie mit \mathfrak{C}_s^{III} bezeichnet).

In C_{2v} ist C_2 Normalteiler vom Index zwei, und C_{2v} ist das direkte Produkt von C_2 und e, b , wo b die Spiegelung an einer Koordinatenachse. Ist (b, q) dem Element b zugeordnet, so können wir nach (3.5) mit der Null-Lösung von C_2 sowohl die Lösung $q=0$ als auch die Lösung $q = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ kombinieren und erhalten so \mathfrak{C}_{2v}^I und \mathfrak{C}_{2v}^{II} . \mathfrak{C}_{2v}^{III} entsteht, wenn man $q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ mit der Null-Lösung von C_2 zusammensetzt.

In C_{4v} ist C_4 Normalteiler, C_{4v} ist die Summe von C_4 und bC_4 , wo b wiederum die Spiegelung an einer Koordinatenachse bedeutet. Indem man die Null-Lösung von C_4 mit den beiden zu e, b gehörenden inäquivalenten Lösungen zusammensetzt, erhält man \mathfrak{C}_{4v}^I und \mathfrak{C}_{4v}^{II} .

§ 4. Ich gehe jetzt dazu über, das Heesch'sche Problem im hexagonalen und im rhomboedrischen Falle zu lösen. Dabei wird sich zugleich eine Ableitung sämtlicher hierher gehörenden dreidimensionalen Bewegungsgruppen ergeben, der Vollständigkeit halber gebe ich noch die entsprechenden Weber'schen Gruppen an. Dadurch wird der durchsichtige Aufbau der Bewegungsgruppen von den zweidimensionalen zu den Weber'schen, zu den dreidimensionalen und den Heesch'schen besonders schön hervortreten.

Vorerst noch eine Bemerkung über die Klassen: Sei \mathfrak{G} eine zwei- bzw. dreidimensionale Klasse. Wir denken uns \mathfrak{G} drei- bzw. vierdimen-

sional geschrieben, indem wir in der Darstellung durch Matrizen die identische Darstellung einmal hinzunehmen. Sei e die Identität und b die Spiegelung am zwei- bzw. dreidimensionalen Raume. Dann tritt als neue Klasse das direkte Produkt $\mathfrak{G} \times (e, b)$ auf. Hat ferner \mathfrak{G} einen Normalteiler \mathfrak{N} vom Index zwei und ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$, so erhalten wir eine weitere Klasse \mathfrak{G}' , indem wir bilden $\mathfrak{G}' = \mathfrak{N} + b\mathfrak{N}'$. Auf diese Weise werden wir die neuen Klassen sehr leicht übersehen können. Die Substitutionen gebe ich in der kurzen Schreibweise der Kristallographen an.

A. Die hexagonalen Klassen.

1. Klasse C_3 : $[x, y, z]$, $[y - x, x, z]$, $[y, x - y, z]$ ist eine zyklische Gruppe.

a) Sie enthält dreidimensional die identische Darstellung einmal in der Form von Satz 2, daher \mathfrak{C}_3^1 , \mathfrak{C}_3^2 , \mathfrak{C}_3^3 . Weber'sche Gruppe (49). Vierdimensional geschrieben: $[x, y, z, w]$, $[y - x, x, z, w]$, $[\bar{y}, x - y, z, w]$ enthält sie die identische Darstellung genau zweimal, also tritt außer der Null Lösung noch eine Bewegungsgruppe auf, die wir in der Form $[x, y, z, w]$, $[y - x, \bar{x}, z + \frac{1}{3}, w]$, $[\bar{y}, x - y, z + \frac{2}{3}, w]$ schreiben können. Diese beiden Heesch'schen Gruppen bezeichne ich mit H_{1a}^1 und H_{1a}^2 .

b) $C_3 \times (e, b)$ ist eine zyklische Gruppe, die durch $[y - x, \bar{x}, z, \bar{w}]$ erzeugt wird. Sie enthält die identische Darstellung in der dritten Zeile und folglich gibt es sechs zugehörige Heesch'sche Gruppen: $H_{1b}^1, \dots, H_{1b}^6$.

2. Die Klasse C_{3i} ist eine zyklische Gruppe, die durch $[x - y, x, \bar{z}]$ erzeugt wird.

a) Sie enthält die identische Darstellung nicht, folglich gibt es nur \mathfrak{C}_{3i}^1 . Webersche Gruppe (50). Vierdimensional enthält sie die identische Darstellung in der vierten Zeile, folglich gibt es sechs zugehörige Bewegungsgruppen, wovon jedoch nur die Null-Lösung eine Heesch'sche Gruppe ist: H_{2a}^1 .

b) $C_{3i} \times (e, b)$. Hierzu finden wir die Bewegungsgruppen, indem wir diejenigen zu C_{3i} mit denjenigen zu (e, b) unter Berücksichtigung von

$$(3.5) \text{ zusammensetzen. Außer } q = 0 \text{ kann noch der Wert } q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

auftreten: H_{2b}^1, H_{2b}^2 .

c) C_{3i} enthält den Normalteiler C_3 vom Index zwei. Wir bilden damit die neue Klasse $C_3 + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}] C_3$. Dies ist eine zyklische Gruppe,

die durch $[x-y, x, \bar{z}, \bar{w}]$ erzeugt wird. Sie enthält die identische Darstellung nicht, somit gibt es nur eine zugehörige Heesch'sche Gruppe H_{2c}^1 .

3. Klasse $C_{3v} = C_3 + [y, x, z] C_3$.

a) Aus (3.5) ergibt sich, daß außer der Null-Lösung \mathfrak{C}_{3v}^1 nur noch die Lösung $C_3 + [y, x, z + \frac{1}{2}] C_3$, die mit \mathfrak{C}_{3v}^3 bezeichnet wird, möglich ist. Weber'sche Gruppe (51).

Vierdimensional geschrieben: die Lösungen von C_3 sind mit denjenigen von $[x, y, z, w]$, $[y, x, z, w]$ nach (3.5) zusammenzusetzen. Setzt man die beiden Null-Lösungen zusammen, so erhält man H_{3a}^1 . Die Null-Lösung von C_3 mit der Lösung $[y, x, z + \frac{1}{2}, w]$ zusammengesetzt, ergibt H_{3a}^2 .

b) $C_{3v} \times (e, b)$: nach (3.5) kann man mit den beiden Lösungen von C_{3v} außer der Null-Lösung von (e, b) noch die Lösung $g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu-

sammensetzen, so daß man insgesamt vier Heesch'sche Gruppen erhält: $H_{3b}^1, \dots, H_{3b}^4$.

c) C_{3v} enthält C_3 als Normalteiler. Wir bilden damit die Klasse $C_3 + [y, x, z, \bar{w}] C_3$. Mit der Null-Lösung von C_3 kann man die beiden der anderen Gruppe zusammensetzen: H_{3c}^1, H_{3c}^2 . H_{1a}^2 kann wegen (3.5) zur Kombination nicht verwendet werden.

4. Klasse $C_{3s} = C_3 + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}] C_3$ läßt sich genau wie C_{3v} behandeln.

a) Gibt dreidimensional \mathfrak{C}_{3v}^2 und \mathfrak{C}_{3v}^4 . Weber'sche Gruppe (52). Vierdimensional H_{4a}^1, H_{4a}^2 .

b) $C_{3s} \times (e, b)$ ergibt $H_{4b}^1, \dots, H_{4b}^4$.

c) $C_3 + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}, \bar{w}] C_3$ ergibt H_{4c}^1, H_{4c}^2 .

5. Klasse $D_3 = C_3 + [y, x, \bar{z}] C_3$.

a) Nach (3.5) können alle drei Lösungen von C_3 mit der Null-Lösung zusammengesetzt werden: $\mathfrak{D}_3^2, \mathfrak{D}_3^4, \mathfrak{D}_3^6$. Weber'sche Gruppe (53). Vierdimensional hat C_3 zwei Lösungen, diese mit der Null-Lösung zusammengesetzt ergibt H_{5a}^1, H_{5a}^2 .

b) $D_3 \times (e, b)$. Die beiden Lösungen von D_3 können nach (3.5) mit den beiden von (e, b) zusammengesetzt werden: $H_{5b}^1, \dots, H_{5b}^4$.

c) C_3 ist Untergruppe von D_3 , was die neue Klasse $C_3 + [y, x, \bar{z}, \bar{w}] C_3$ gibt. Diese liefert zwei Heesch'sche Gruppen: H_{5c}^1, H_{5c}^2 .

6. Die Klasse $D_3^* = C_3 + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}] C_3$ wird analog untersucht wie D_3 .

a) Zu ihr gehören $\mathfrak{D}_3^1, \mathfrak{D}_3^3, \mathfrak{D}_3^5$. Weber'sche Gruppe (54). Vierdimensional liefert sie zwei Gruppen: H_{6a}^1, H_{6a}^2 .

b) $D_3^* \times (e, b)$ gibt die Gruppen $H_{6b}^1, \dots, H_{6b}^4$.

c) $C_3 + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}, \bar{w}] C_3$ liefert H_{6c}^1, H_{6c}^2 .

7. Klasse $D_{3d} = C_{3i} + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}] C_{3i} = D_3 + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}] D_3 = C_{3s} + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] C_{3s}$.

a) Jede dieser drei Zerlegungen gibt nach (3.5) Anlaß zu zwei Raumgruppen. Je drei davon sind aber, wie man leicht sieht, äquivalent, somit \mathfrak{D}_{3d}^3 und \mathfrak{D}_{3d}^4 . Ebenso sieht man aus dieser Zerlegung, daß es zwei Heesch'sche Gruppen gibt: H_{7a}^1, H_{7a}^2 . Weber'sche Gruppe (55).

b) $D_{3d} \times (e, b)$: die beiden Lösungen von D_{3d} können mit den beiden Lösungen von (e, b) zusammengesetzt werden: $H_{7b}^1, \dots, H_{7b}^4$.

c) $C_{3i} + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}, \bar{w}] C_{3i}$ liefert zwei Heesch'sche Gruppen: H_{7c}^1, H_{7c}^2 .

d) $D_3 + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}, \bar{w}] D_3$ „ „ „ „ : H_{7d}^1, H_{7d}^2 .

e) $C_{3s} + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}] C_{3s}$ „ „ „ „ : H_{7e}^1, H_{7e}^2 .

8. Die Klasse $D_{3d}^* = C_{3i} + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}] C_{3i} = D_3^* + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}] D_3^* = C_{3v} + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] C_{3v}$ wird analog D_{3d} behandelt.

a) Sie liefert \mathfrak{D}_{3d}^1 und \mathfrak{D}_{3d}^2 . Weber'sche Gruppe (56).

Vierdimensional: H_{8a}^1, H_{8a}^2 .

b) $D_{3d}^* \times (e, b)$ liefert vier Heesch'sche Gruppen: $H_{8b}^1, \dots, H_{8b}^4$.

c) $C_{3i} + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}, \bar{w}] C_{3i}$ „ zwei „ „ : H_{8c}^1, H_{8c}^2 .

d) $D_3^* + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}, \bar{w}] D_3^*$ „ „ „ „ : H_{8d}^1, H_{8d}^2 .

e) $C_{3v} + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}] C_{3v}$ „ „ „ „ : H_{8e}^1, H_{8e}^2 .

9. Die Klasse C_{3h} ist eine zyklische Gruppe, erzeugt durch $[\bar{y} - \bar{x}, \bar{x}, \bar{z}]$.

a) Sie enthält die identische Darstellung nicht: \mathfrak{C}_{3h}^1 . Weber'sche Gruppe (73). Vierdimensional enthält sie die identische Darstellung einmal, was sechs Bewegungsgruppen ergibt, wovon aber nur die Null-Lösung eine Heesch'sche Gruppe ist: H_{9a}^1 .

b) $C_{3h} \times (e, b)$: nach (3.5) läßt sich H_{9a}^1 mit den beiden Lösungen von (e, b) zusammensetzen: H_{9b}^1, H_{9b}^2 .

c) $C_3 + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}] C_3$ gibt nach (3.5) nur eine Heesch'sche Gruppe: H_{9c}^1 .

10. Klasse $D_{3h} = C_{3h} + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}] C_{3h} = D_3 + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}] D_3 = C_{3v} + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] C_{3v}$.

a) Von den sechs aus diesen drei Zerlegungen entspringenden Lösungen sind je drei äquivalent, sodaß $\mathfrak{D}_{3h}^3, \mathfrak{D}_{3h}^4$. Weber'sche Gruppe (74). Vierdimensional geschrieben sieht man, daß es zwei Heesch'sche Gruppen gibt: H_{10a}^1, H_{10a}^2 .

b) $D_{3h} \times (e, b)$: nach (3.5) lassen sich die beiden Lösungen von D_{3h} mit den beiden von (e, b) kombinieren, somit: $H_{10b}^1, \dots, H_{10b}^4$.

c) $C_{3h} + [\gamma, x, z, \bar{w}] C_{3h}$ liefert zwei Heesch'sche Gruppen: H_{10c}^1, H_{10c}^2 .

d) $D_3 + [\gamma, x, z, \bar{w}] D_3$ „ „ „ „ H_{10d}^1, H_{10d}^2 .

e) $C_{3v} + [x, \gamma, \bar{z}, \bar{w}] C_{3v}$ „ „ „ „ H_{10e}^1, H_{10e}^2 .

11. Klasse $D_{3h}^* = C_{3h} + [\gamma, \bar{x}, z] C_{3h} = D_3^* + [\gamma, x, z] D_3^* = C_{3s} + [x, \gamma, \bar{z}] C_{3s}$ wird analog untersucht wie D_{3h} .

a) Raumgruppen $\mathfrak{D}_{3h}^1, \mathfrak{D}_{3h}^2$. Weber'sche Gruppe (75). Heesch'sche Gruppen: H_{11a}^1, H_{11a}^2 .

b) $D_{3h}^* \times (e, b)$ liefert vier Heesch'sche Gruppen: $H_{11b}^1, \dots, H_{11b}^4$.

c) $C_{3h} + [\bar{\gamma}, \bar{x}, z, \bar{w}] C_{3h}$ „ zwei „ „ H_{11c}^1, H_{11c}^2 .

d) $D_3^* + [\bar{\gamma}, \bar{x}, z, \bar{w}] D_3^*$ „ „ „ „ H_{11d}^1, H_{11d}^2 .

e) $C_{3s} + [x, \gamma, \bar{z}, \bar{w}] C_{3s}$ „ „ „ „ H_{11e}^1, H_{11e}^2 .

12. Klasse C_6 ist eine zyklische Gruppe, erzeugt durch $[x - y, x, z]$.

a) Enthält die identische Darstellung genau einmal: $\mathfrak{C}_6^1, \dots, \mathfrak{C}_6^6$. Weber'sche Gruppe (76). Vierdimensional schreiben wir $C_6 = C_3 + [\bar{x}, \bar{y}, z, \bar{w}] C_3$, deshalb vier zugehörige Bewegungsgruppen: $H_{12a}^1, \dots, H_{12a}^4$.

b) $C_6 \times (e, b)$: nach (3.5) kann man die vier Lösungen von C_6 mit den beiden von (e, b) kombinieren: $H_{12b}^1, \dots, H_{12b}^8$.

c) $C_3 + [\bar{x}, \bar{y}, z, \bar{w}] C_3$ liefert vier Heesch'sche Gruppen: $H_{12c}^1, \dots, H_{12c}^4$.

13. Klasse $C_{6h} = C_6 + [x, \gamma, \bar{z}] C_6 = C_{3i} + [\bar{x}, \bar{y}, z] C_{3i} = C_{3h} + [\bar{x}, \bar{y}, z] C_{3h}$.

a) Jede dieser drei Zerlegungen liefert dieselben zwei Raumgruppen $\mathfrak{C}_{6h}^1, \mathfrak{C}_{6h}^2$. Weber'sche Gruppe (78). Ebenso sieht man, daß es zwei Heesch'sche Gruppen gibt: H_{13a}^1 und H_{13a}^2 .

b) $C_{6h} \times (e, b)$: die beiden Lösungen von C_{6h} können mit den beiden von (e, b) zusammengesetzt werden: $H_{13b}^1, \dots, H_{13b}^4$.

c) $C_6 + [x, \gamma, \bar{z}, \bar{w}] C_6$ liefert zwei Heesch'sche Gruppen: H_{13c}^1, H_{13c}^2 .

d) $C_{3i} + [\bar{x}, \bar{y}, z, \bar{w}] C_{3i}$ „ „ „ „ H_{13d}^1, H_{13d}^2 .

e) $C_{3h} + [\bar{x}, \bar{y}, z, \bar{w}] C_{3h}$ „ „ „ „ H_{13e}^1, H_{13e}^2 .

14. Klasse $C_{6v} = C_6 + [\gamma, x, z] C_6 = C_{3s} + [\bar{x}, \bar{y}, z] C_{3s} = C_{3v} + [\bar{x}, \bar{y}, z] C_{3v}$.

a) Aus jeder dieser Darstellungen entspringen nach (3.5) vier Raumgruppen, wovon je drei identisch sind. $\mathfrak{C}_{6v}^1, \dots, \mathfrak{C}_{6v}^4$. Weber'sche Gruppe (77). Ebenso erhalten wir vier Heesch'sche Gruppen: $H_{14a}^1, \dots, H_{14a}^4$.

b) $C_{6v} \times (e, b)$: Die vier Lösungen von C_{6v} können mit den beiden von (e, b) zusammengesetzt werden, somit $H_{14b}^1, \dots, H_{14b}^8$.

c) $C_6 + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}, \bar{w}] C_6$ liefert vier Heesch'sche Gruppen: $H_{14c}^1, \dots, H_{14c}^4$.

d) $C_{3s} + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}] C_{3s}$ „ „ „ „ $H_{14d}^1, \dots, H_{14d}^4$.

e) $C_{3v} + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}] C_{3v}$ „ „ „ „ $H_{14e}^1, \dots, H_{14e}^4$.

15. Klasse $D_6 = D_3 + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] D_3 = D_3^* + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] D_3^* =$
 $C_6 + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}] C_6$.

a) Aus diesen Zerlegungen sieht man nach (3.5), daß es sechs zugehörige Raumgruppen gibt: $\mathfrak{D}_6^1, \dots, \mathfrak{D}_6^6$. Weber'sche Gruppe (79). Ferner gibt es vier Heesch'sche Gruppen $H_{15a}^1, \dots, H_{15a}^4$.

b) $D_6 \times (e, b)$ liefert acht Heesch'sche Gruppen: $H_{15b}^1, \dots, H_{15b}^8$.

c) $D_3 + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}] D_3$ „ vier „ „ $H_{15c}^1, \dots, H_{15c}^4$.

d) $D_3^* + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}] D_3^*$ „ „ „ „ $H_{15d}^1, \dots, H_{15d}^4$.

e) $C_6 + [\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}, \bar{w}] C_6$ „ „ „ „ $H_{15e}^1, \dots, H_{15e}^4$.

16. Klasse $D_{6h} = C_{6v} + [x, y, z] C_{6v} = C_{6h} + [y, x, z] C_{6h} =$
 $D_{3h} + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] D_{3h} = D_{3h}^* + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] D_{3h}^* = D_{3d} + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] D_{3d} =$
 $D_{3d}^* + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] D_{3d}^* = D_6 + [y, x, z] D_6$.

a) Aus diesen Zerlegungen folgt leicht, daß es vier zugehörige Raumgruppen gibt: $\mathfrak{D}_{6h}^1, \dots, \mathfrak{D}_{6h}^4$. Ebenso gibt es vier Heesch'sche Gruppen: $H_{16a}^1, \dots, H_{16a}^4$.

b) $D_{6h} \times (e, b)$ liefert acht Heesch'sche Gruppen: $H_{16b}^1, \dots, H_{16b}^8$.

c) $C_{6v} + [x, y, z, \bar{w}] C_{6v}$ „ vier „ „ : $H_{16c}^1, \dots, H_{16c}^4$.

d) $C_{6h} + [y, x, z, \bar{w}] C_{6h}$ „ „ „ „ : $H_{16d}^1, \dots, H_{16d}^4$.

e) $D_{3h} + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}] D_{3h}$ „ „ „ „ : $H_{16e}^1, \dots, H_{16e}^4$.

f) $D_{3h}^* + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}] D_{3h}^*$ „ „ „ „ : $H_{16f}^1, \dots, H_{16f}^4$.

g) $D_{3d} + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}] D_{3d}$ „ „ „ „ : $H_{16g}^1, \dots, H_{16g}^4$.

h) $D_{3d}^* + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}] D_{3d}^*$ „ „ „ „ : $H_{16h}^1, \dots, H_{16h}^4$.

i) $D_6 + [y, x, z, \bar{w}] D_6$ „ „ „ „ : $H_{16i}^1, \dots, H_{16i}^4$.

Hiermit sind wir in der Aufstellung der zum hexagonalen Gitter gehörenden Bewegungsgruppen zu Ende, es gibt dazu insgesamt 212 Heesch'sche Gruppen.

B. Die Rhomboedrischen Klassen.

Für diese Klassen muß ich eine neue Bezeichnung einführen, da in der geometrischen Kristallographie die hier gehörenden Bewegungsgruppen unter das hexagonale System gerechnet werden.

1. Klasse $R_1 = [x, y, z], [z, x, y], [y, z, x]$.
 - a) Diese zyklische Gruppe enthält die identische Darstellung einmal, doch nicht in der Form von Satz 2. Man zeigt leicht, daß jede Lösung der Null-Lösung äquivalent ist: \mathfrak{C}_3^4 . Ebenso gibt es auch nur eine Heesch'sche Gruppe: R_{1a}^1 .
 - b) $R_1 \times (e, b)$ liefert ebenfalls eine Heesch'sche Gruppe R_{1b}^1 .
 2. Klasse $R_2 = R_1 + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] R_1$.
 - a) Sie gibt die Raumgruppe \mathfrak{C}_{3i}^2 und die Heesch'sche Gruppe R_{2a}^1 .
 - b) $R_2 \times (e, b)$ liefert nur R_{2b}^1 wegen (3.5).
 - c) $R_1 + [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}] R_1$ liefert R_{2c}^1 .
 3. Die Klasse $R_3 = R_1 + [x, z, y] R_1$.
 - a) Weil $[x, y, z], [x, z, y]$ die identische Darstellung einmal enthält, gibt es \mathfrak{C}_{3v}^5 und \mathfrak{C}_{3v}^6 . Ebenso R_{3a}^1 und R_{3a}^2 .
 - b) $R_3 \times (e, b)$ liefert R_{3b}^1 und R_{3b}^2 .
 - c) $R_1 + [x, z, y, \bar{w}] R_1$ liefert R_{3c}^1 und R_{3c}^2 .
 4. Klasse $R_4 = R_1 + [\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}] R_1$.
 - a) Sie gibt die Raumgruppe \mathfrak{D}_3^7 und die Heesch'sche Gruppe R_{4a}^1 .
 - b) $R_4 \times (e, b)$ liefert R_{4b}^1 .
 - c) $R_1 + [\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}, \bar{w}] R_1$ liefert R_{4c}^1 .
 5. Klasse $R_5 = R_4 + [x, z, y] R_4$.
 - a) Sie enthält die identische Darstellung wie R_3 , deshalb \mathfrak{D}_{3d}^5 und \mathfrak{D}_{3d}^6 . Ebenso die Heesch'schen Gruppen R_{5a}^1, R_{5a}^2 .
 - b) $R_5 \times (e, b)$ liefert R_{5b}^1, R_{5b}^2 .
 - c) $R_4 + [x, z, y, \bar{w}] R_4$ liefert R_{5c}^1, R_{5c}^2 .
- Somit haben wir aus den rhomboedrischen Klassen 20 Heesch'sche Gruppen gefunden.

(Eingegangen den 22. Juli 1933)