Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 6 (1934)

Artikel: Sur un théorème de Steiner.

Autor: Kollros, L. / Marchand, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7586

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur un Théorème de Steiner

Extraits d'une correspondance échangée entre MM. L. KOLLROS, Zurich et J. MARCHAND, Lausanne

Kollros à Marchand.

..... Voici le théorème de Steiner que j'ai trouvé dans un manuscrit du 27 décembre 1824:

"Sur un cercle, on a n points: 1, 2, 3, ..., n; ils déterminent $\binom{n}{2}$ cordes: $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{23}$, Si l'on abaisse d'un autre point quelconque A du cercle des perpendiculaires à ces cordes, les pieds: 12, 13, 23, ... de ces perpendiculaires sont trois à trois sur $\binom{n}{3}$ droites: $\overline{123}$, $\overline{124}$, Sur ces droites, on abaisse de nouveau des perpendiculaires du point A; leurs pieds: 123, 124, ... sont quatre à quatre sur $\binom{n}{4}$ droites, et ainsi de suite. On arrive enfin à $\binom{n}{n-1} = n$ droites; les pieds des perpendiculaires abaissées de A sur ces n droites sont encore en ligne droite."

Steiner en a donné deux démonstrations; voici celle qui me paraît la plus simple.

Pour n = 3, 123 est la droite de Simson de A pour le triangle 1, 2, 3; pour n = 4, la droite 1234 est la tangente au sommet de la parabole inscrite au quadrilatère 123, 124, 134, 234; (les quatre cercles de centres 1, 2, 3, 4 menés par A se coupent encore aux six sommets d'un quadrilatère homothétique au précédent).

Pour n = 5, Steiner remarque que, par chaque point à deux chiffres, par exemple 12, il passe trois droites à trois chiffres ($\overline{123}$, $\overline{124}$, $\overline{125}$). Les pieds (123, 124, 125) des perpendiculaires abaissées de A sur ces trois droites sont sur un cercle passant par A et 12. Les côtés du triangle (123, 124, 125) sont les droites à quatre chiffres ($\overline{1234}$, $\overline{1235}$, $\overline{1245}$) et la droite de Simson de A pour ce triangle est la droite $\overline{12345}$. On peut la désigner ainsi, car chacun des cinq points 1234, 1235, 1245, 1345, 2345 est sur la droite déterminée par deux quelconques des autres.

On démontre de la même manière que, si le théorème est vrai pour n-2 et n-1 points du cercle, il l'est encore pour n points.

Voici le texte du manuscrit:

"Durch jeden Punkt zu zwei Nummern gehen (n — 2) Geraden zu drei Nummern, die zusammen alle n Nummern enthalten. Fällt man aus dem Grundpunkt A auf diese (n-2) Geraden Lote, so liegen die Fußpunkte zu drei Nummern mit A und dem Punkt zu zwei Nummern zusammen in einem Kreis. Durch jeden Fußpunkt zu drei Nummern gehen (n-3)Geraden zu vier Nummern. Werden auf diese Geraden aus A Lote gefällt, so erhält man die Fußpunkte zu vier Nummern; durch jeden derselben gehen (n — 4) Geraden zu fünf Nummern usw. Am Ende gelangt man zu Fußpunkten zu (n - 3) Nummern; in jedem schneiden sich drei Geraden zu (n - 2) Nummern. Fällt man auf diese Lote aus A, so liegen die drei Fußpunkte mit A in einem Kreis. Drei solche zusammengehörige Fußpunkte zu (n — 2) Nummern bestimmen aber paarweise drei Geraden zu (n - 1) Nummern, die zusammen n Nummern enthalten, und da sie mit A in einem Kreis liegen, so liegen die Fußpunkte zu (n-1) Nummern der aus A auf diese drei Geraden gefällten Lote in einer Geraden. Da dies für je drei Geraden zu (n-1) Nummern stattfindet, so folgt daraus, daß die Fußpunkte der aus A auf die n Geraden gefällten Lote in einer Geraden liegen."

Le 29 décembre 1824, Steiner note le théorème que Miquel a trouvé 21 ans plus tard (Journal de Liouville X, p. 349): "Durch 4 Geraden entsteht ein Kreis (1, 2, 3, 4) und ein Punkt A. Bei 5 Geraden entstehen 5 solche Kreise und 5 solche Punkte: die 5 Kreise schneiden sich in einem Punkte B und die 5 Punkte A liegen in einem Kreis a der ebenfalls durch den Punkt B geht."

"Es ist nun zu vermuten, daß bei 6 Geraden die 6 Punkte B ebenfalls in einem Kreis liegen, und daß die 6 Kreise a mit diesem Kreis sich in einem Punkt schneiden; kurz es muß hiebei irgend ein Gesetz obwalten, welches sich auf jede folgende Anzahl Geraden erstreckt."

C'est le théorème que Clifford a trouvé en 1870 (Math. Papers, p. 38).

Marchand à Kollros.

..... Il m'a semblé qu'il vaut la peine d'établir le nouveau théorème de Steiner par le procédé même que la géométrie projective fournit pour la démonstration des théorèmes de Miquel et de Clifford; procédé que l'on peut considérer comme une méthode générale dans les questions de cette nature, ainsi que vous l'avez montré dans votre conférence à la S. M. S., lors de la réunion de Lausanne, en 1928.

Voici une démonstration qui me paraît simple et très harmonieuse.

Soit, sur le cercle, les n points $1, 2, 3, \ldots, n$ et le point A considérés par Steiner. Nommons B le point du cercle diamétralement opposé à A, t la tangente au cercle en B et I et \mathcal{F} les points cycliques du plan. Représentons, enfin, par C_n une courbe quelconque d'ordre n et par Γ_n une courbe quelconque de classe n.

A tout groupe de p points du cercle, nous allons attacher une Γ_p , une droite d et le pied P de la perpendiculaire abaissée de A sur d.

Par définition, la Γ_n attachée au groupe des points 1, 2, 3, ..., n sera apolaire à toutes les C_n circonscrites au triangle $AI\mathcal{F}$ et à toutes les C_n passant par les points 1, 2, 3, ..., n et ayant en B un point multiple d'ordre n-1.

L'apolarité aux C_n passant par A, I et \mathcal{F} soumet la Γ_n à

$$\frac{1}{2}n(n+3)-2$$

conditions linéaires.

Les C_n passant par 1, 2, 3, ..., n et ayant en B un point multiple d'ordre n-1 forment un système linéaire de dimension n. Ce système contient n-1 courbes, linéairement indépendantes, formées du cercle et de n-2 droites issues de B, qui sont apolaires à la Γ_n parce qu'elles passent par A, I et \mathcal{F} . Deux autres de ces C_n imposent à la Γ_n deux nouvelles conditions linéaires et complètent la base du système.

La première polaire de la droite joignant B à l'un quelconque des points du groupe de n points, soit la première polaire de B I, est apolaire aux C_{n-1} passant par A, I et \mathcal{F} et aux C_{n-1} passant par les autres points du groupe et ayant en B un point multiple d'ordre n-2. C'est la Γ_{n-1} attachée au groupe de n-1 points 2, 3, ..., n.

Il s'ensuit que les Γ_{n-1} attachées aux groupes de n-1 points que l'on déduit du groupe 1, 2, 3, ..., n par la suppression d'un point appartiennent au faisceau tangentiel des premières polaires des droites passant par B par rapport à la Γ_n attachée au groupe 1, 2, 3, ..., n.

Les points polaires de la tangente t par rapport à ces Γ_{n-1} sont alors sur une droite, la droite d que nous attachons au groupe de n points $1, 2, 3, \ldots, n$.

Enfin, d est la polaire de B par rapport à la conique polaire de t par rapport à la Γ_n . Cette conique polaire, apolaire aux C_2 passant par A, I et \mathcal{F} est une hyperbole équilatère de centre A. Le point polaire de t par rapport à la Γ_n est le pied P de la perpendiculaire abaissée de A sur d. (Le produit des distances du centre d'une hyperbole équilatère à un point et à sa polaire par rapport à l'hyperbole étant constant).

Le théorème de Steiner se déduit immédiatement des faits précédents. On peut l'établir en suivant l'énoncé même de Steiner. On le conçoit mieux dans l'ordre inverse, c'est-à-dire de la façon suivante:

A la paire de points 12, attachons la conique admettant les deux triangles polaires $AI\mathcal{F}$ et B12, inscrits dans le cercle; soit l'hyperbole équilatère Γ_2 de centre A conjuguée au triangle B12.

Le pôle de t par rapport à cette hyperbole est le pied P de la perpendiculaire abaissée de A sur la droite 12.

Au terne de points 123, attachons la Γ_3 apolaire aux C_3 circonscrites au triangle $AI\mathcal{F}$ et aux C_3 passant par 1, 2 et 3 et ayant un point double en B.

Les premières polaires des droites issues de B par rapport à cette Γ_3 forment un faisceau tangentiel contenant les Γ_2 attachées aux paires de points 12, 23 et 31. Le lieu des pôles de t par rapport à ces premières polaires est la droite d, attachée au terne 123; elle contient les points P, pieds des perpendiculaires abaissées de A sur les droites 12, 23 et 31. Le point polaire de t par rapport à cette Γ_3 est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur d; c'est le point P attaché au terne 123.

Au groupe de 4 points 1234, attachons la Γ_4 correspondante; les points P attachés aux ternes 123, 234, 341, 412 sont sur la droite d attachée au groupe 1234 et le point polaire de t par rapport à cette Γ_4 est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur d. Etc. ...

(Reçu le 12 juin 1933)