

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 6 (1934)

**Artikel:** Ueber Kugelteilung.  
**Autor:** Heesch, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7585>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ueber Kugelteilung

von H. HEESCH, Göttingen.

Die Frage der Flächenteilung ist vielfach behandelt worden, besonders für geschlossene Flächen im Rahmen der Polyedertheorie und speziell für die Kugel<sup>1)</sup>. Immer handelt es sich um die Frage nach der Einteilung, d. i. lückenlosen (ein- oder mehrfachen) Ueberdeckung einer Fläche in „gleichwertige“ Polygone, wobei verschiedene Begriffe der Gleichwertigkeit zugrundegelegt werden. In allen mir bekannten Darstellungen ist nun das Problem vom rein metrischen Standpunkt aus gesehen und unter die Herrschaft des Symmetriegedankens gestellt worden. Z. B. formuliert Heß das Problem seines Buches folgendermaßen: es sind alle diejenigen sphärischen Polygone ausfindig zu machen, durch deren (event. auch spiegelbildlich) rotative Wiederholungen ein Netz entsteht, das die Kugel ein- oder mehrfach bedeckt. Neuerdings hat Laves<sup>2)</sup> ein entsprechendes Problem für die Gitterebene, den Torus, behandelt, wo nur endlich viele, nämlich elf Teilungen zu unterscheiden sind. Durch die Formulierung macht er dabei auf die topologische Seite der Frage aufmerksam, wenn er auch metrische Beweismittel noch verwendet. Durch diese Arbeit angeregt, habe ich die rein topologische Auffassung des Problems der Flächenteilung für geschlossene Flächen in einer Note in den Göttinger Nachrichten dargestellt<sup>3)</sup>. Wegen der historischen Bedeutung des Beispiels soll die konkrete Diskussion von diesem Standpunkt aus im folgenden für die Kugel durchgeführt werden.

Der Gedanke ist folgender: die Aufmerksamkeit ist auf die fundamentale Eigenschaft eines Kontinuums, daß es Teile hat, gerichtet. Auf dieser Eigenschaft basiert die kombinatorische Topologie, in der eine Mannigfaltigkeit durch ein kombinatorisches Schema von speziellen Teilungen gegeben wird. Wir studieren die topologischen Abbildungen einer durch eine ihrer Teilungen (in beliebige endlich viele Teilmengen) gegebenen geschlossenen  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit auf sich. Sie bilden eine Gruppe, die im allgemeinen nur aus dem Einselement  $E$  bestehen

---

<sup>1)</sup> A. Bravais, Abhandlungen über symmetrische Polyeder, 1849, Ostwalds Klassiker, Nr. 17, 1890. — E. Heß, Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung, X u. 475 Seiten u. 16 lithogr. Tafeln, Leipzig, 1883. — Badoureaux, Comptes Rendus, t. 87, Paris, 1878, S. 823.

<sup>2)</sup> F. Laves, Ebenenteilung und Koordinationszahl, Z. Krist. **78**, 208, 1931.

<sup>3)</sup> Fachgruppe I (Mathematik), Nr. 27, 1932, S. 268.

wird. Umfaßt die Gruppe mehr als  $E$ , so gibt es Teilmengen, die durch die Operationen der Gruppe ineinander übergeführt werden oder die nach dieser Gruppe äquivalent sind. Wir rechnen sie in eine Klasse und nennen die Zahl der jetzt noch inäquivalenten Teilmengen die Klassenzahl  $K_n$ . Der Fall der Homogenität liegt vor für  $K_n = 1$ : die Teilung ist so beschaffen, daß die Gruppe aller topologischen Abbildungen jede  $n$ -dimensionale Teilmenge in jede überzuführen gestattet. Die Frage nach allen solchen einfach zusammenhängenden Teilmengen für den Fall  $n = 2$  ist in topologischer Form die klassische Frage der Flächenteilung, speziell für das Geschlecht 0: der Kugelteilung. Der Anschluß an die metrische Auffassung wird hergestellt durch die Forderung, daß die Flächen kongruente Großkreispolygone einer Kugel sind. Es wird im allgemeinen zu einer topologisch möglichen Teilung mehrere metrisch unterschiedene Teilungen geben. So entspricht z. B. dem regulären vom Zentrum aus auf die Umkugel projizierten Tetraeder dieselbe topologische Teilung wie der andern, die aus dem Aequator, dem Nullhalbmeridian auf der nördlichen und dem  $90^\circ$ -Halbmeridian auf der südlichen Halbkugel besteht. In der Aufzählung werden wir zur Abkürzung die metrischen Namen höchstsymmetrischer Verwirklichungen benutzen, wo stets deren allgemeinstes topologisches Bild gemeint ist.

Die Durchführung wird möglich lediglich durch Anwendung der Eulerschen Polyedergleichung

$$(1) \quad e - k + f = 2 - h$$

einer geschlossenen Fläche vom Zusammenhang  $h$  in  $e$  Ecken,  $k$  Kanten und  $f$  Teilflächen einfachen Zusammenhangs. Dabei ist der Zusammenhang der Kugel als  $h = 0$  gezählt. (Auch die Zählung  $h' = h + 1$  ist üblich). Die Ueberführbarkeit einer jeden Fläche in jede andere durch eine topologische Abbildung erfordert Gleichheit der Eckenzahl  $n$  einer Teilfläche für alle Polygone und überdies Gleichheit des Zyklus der  $n$  Anzahlen von Kanten, die in jeder der  $n$  Ecken zusammenstoßen. Der Beitrag einer jeden Teilfläche zu (1) ist derselbe. Wir dividieren

(1) durch  $f$ , der Kantenbeitrag ist  $\frac{1}{2}n$ , da jede Kante 2 Flächen trennt,

der Eckenbeitrag  $\sum \frac{1}{i}$ , die Summe über die  $n$  Ecken erstreckt, da jede Ecke bei  $i$  Flächen vorkommt. Mithin ist eine notwendige Bedingung für die Teilungen  $K_2 = 1$

$$(2) \quad \sum \frac{1}{i} - \frac{n}{2} + 1 = \frac{2 - h}{f}.$$

Das Folgende ist nur die Lösung dieser diophantischen Gleichung für den Fall der Kugel. Kugel und projektive Ebene,  $h = 0$  und  $h = 1$  sind die einzigen Fälle, in denen (2) unendliche Lösungszahl besitzt<sup>3)</sup>. Diese beiden Fälle hängen eng miteinander zusammen, weil die Kugel die zweiblättrige, zweiseitige Ueberlagerungsfläche der projektiven Ebene ist. Jeder Teilung der projektiven Ebene entspricht eine Kugelteilung, in der die Stücke  $e$ ,  $k$ ,  $f$  verdoppelt, aber  $n$  und der Zyklus der  $i$  dieselben sind. Nicht umgekehrt: Die Kugelteilungen, die keine Aufteilung in zwei gleichwertige projektive Ebenen zulassen, haben kein Gegenstück in der projektiven Ebene. Wir nennen sie „Kugelteilungen mit polaren Axen“. Trotzdem werden wir wegen der Bequemlichkeit, welche kleinere Ziffern bieten, die Diskussion für die projektive Ebene führen. Wegen

$$\frac{2}{f} = \frac{1}{\frac{f}{2}} = \frac{1}{f}$$

gehen die polaren Kugelteilungen mit gerader Flächenzahl  $f$  beim Ansatz  $h = 1$  nicht verloren. Und die mit ungeradem  $f$  treten nur für  $n = 2$  auf, in einer Schar gleichberechtigt mit den geradzahligen. Nach Aufstellung einer Teilung für die projektive Ebene werden wir die zugehörige Kugelteilung (KT) dahinter nur mit dem Namen ihrer höchstsymmetrischen Verwirklichung angeben.

Nicht alle Lösungen der notwendigen Bedingung (2) führen zu Teilungen. Zur weiteren Aussiebung dienen uns die beiden Gleichungen:

$$(3) \quad \sum i e_i = 2 k = n f,$$

die der Ausdruck für zwei verschiedene Abzählungen der doppelten Kantenzahl sind.  $e_i$  ist die Anzahl Ecken, in denen genau  $i$  Flächen zusammenstoßen,  $\sum e_i = e$ . Bezeichnen wir die Anzahl  $i$ -zähliger Ecken in einem Polygon mit  $\varepsilon_i$ ,  $\sum \varepsilon_i = n$ , so ist

$$(4) \quad e_i = \frac{\varepsilon_i}{i} \cdot f,$$

die Gesamtzahl  $i$ -zähliger Ecken gleich deren Anzahl pro Fläche mal der Flächenzahl, worin eine weitere Ganzzahligkeitsforderung liegt.

Nur Verzweigungen rechnen als Ecken, d. h.  $i \geq 3$ . Der äußerste Fall: Alle  $i = 3$  liefert mit (2) sofort  $n \leq 5$ . Wir führen somit 4 Diskussionen für jeden Wert  $n$  von 2 bis 5.



1.  $n = 2$ . (2) lautet dann  $\frac{1}{i} + \frac{1}{j} = \frac{1}{f}$ .

Falls  $e > 1$ , so würde mindestens ein Dreieck oder Viereck vorkommen; gibt es aber nur eine Ecke, so ist  $i = j$ , also  $i = 2f$ . Die Teilung ist das Strahlenbüschel mit  $f$  gezeichneten Geraden. KT: Zwei Punkte sind durch irgendwelche nicht schneidende Kurven verbunden.

2.  $n = 3$ . Gleichungen (2) und (3) lauten jetzt

$$(2_3) \quad \sum \frac{1}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{f}$$

$$(3_3) \quad 2k = 3f.$$

Da die Summe dreier Stammbrüche  $\frac{1}{2}$  übersteigen soll, muß mindestens ein  $i \leq 6$  sein. Wir unterscheiden die 4 Fälle  $i_1 = 3, 4, 5, 6$ . Innerhalb eines jeden der 4 Fälle gibt es 3 Unterfälle, je nachdem die Anzahl  $\varepsilon_{i_1}$  der  $i_1$ -fachen Verzweigungen in einer Teilfläche 3, 2 oder 1 ist.

1.  $i_1 = 3$ .

1 a)  $\varepsilon_3 = 3$ .  $f = 2$ ,  $k = 3$ ,  $e = 2$ . Keine Teilung der projektiven Ebene. KT: Tetraeder.

1 b)  $\varepsilon_3 = 2$  liefert nur gebrochene Werte für  $e_{i_3}$  aus (4).

1 c)  $\varepsilon_3 = 1$ . Die beiden andern  $i$ -Werte seien  $p$  und  $q$ .  $p \neq q$  ist unmöglich. Denn um die erste, dreizählige Ecke liegen

drei Dreiecke, die ja den Zyklus 3,  $p$ ,  $q$  als Verzweigungszahlen haben. Dies würde beim Aufbau um die Ecke herum ein Dreieck mit zwei  $p$ - oder zwei  $q$ -zähligen Ecken bedingen. Das gilt auch, wenn die mittlere Ecke statt 3 eine andere *ungerade* Verzweigungszahl hätte. Also bleibt nur die Wahl  $\varepsilon_p = 2$ , zwei  $p$ -zählige Ecken außer der dreizähligen.

$p < 12$ , sonst übersteigt die Summe  $\frac{1}{3} + \frac{2}{p}$  aus (2<sub>3</sub>) den Wert  $\frac{1}{2}$  nicht.

1 c<sub>1</sub>)  $p = 6$ .  $f = 6$ ,  $k = 9$ ,  $e = 4$ .  $e_3 = 2$ ,  $e_6 = 2$ . Keine Teilung der projektiven Ebene. Die entsprechende Kugelteilung mit polaren Axen ist das Triakistetraeder: Man wähle ein Tetraeder und auf jeder Fläche einen inneren Punkt, der mit den Ecken verbunden wird.

- 1 c<sub>2</sub>)  $p = 8$ .  $f = 12$ ,  $k = 18$ ,  $e = 7$ .  $e_3 = 4$ .  $e_8 = 3$ . Fig. 1. KT: Triakisoktaeder, das durch dieselbe Konstruktion aus dem Oktaeder wie die vorige KT aus dem Tetraeder entsteht.
- 1 c<sub>3</sub>)  $p = 10$ .  $f = 30$ ,  $k = 45$ ,  $e = 16$ .  $e_3 = 10$ ,  $e_{10} = 6$ . Fig. 2. KT: Triakisikosaeder, entsprechend aus dem Ikosaeder zu gewinnen.

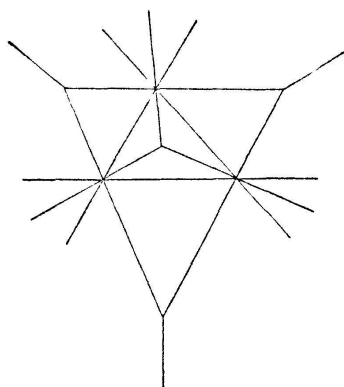


Fig. 1.

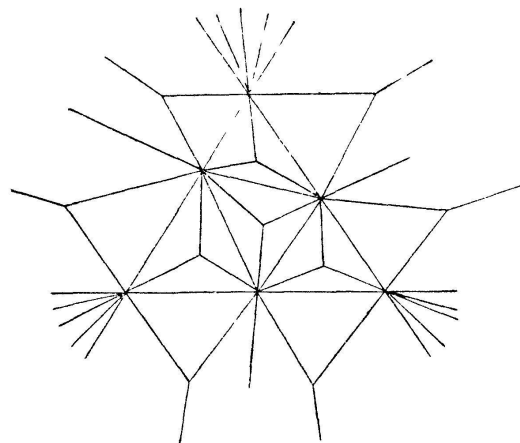


Fig. 2.

2.  $i_1 = 4$ .

2 a)  $\varepsilon_4 = 3$ .  $f = 4$ ,  $k = 6$ ,  $e = 3$ . Fig. 3. KT: Oktaeder.

2 b)  $\varepsilon_4 = 2$ .  $\varepsilon_p = 1$ . Für jedes gerade  $p$  gibt es eine Teilung (Fig. 4), das von einer Geraden geschnittene Büschel, von dem  $p$  Geraden (genau: topologische Bilder von Geraden) gezeichnet sind. KT (auch für ungerade  $p$ ): Doppelpyramiden.

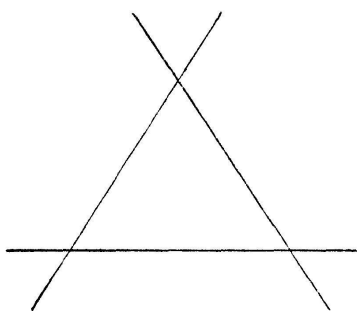


Fig. 3.

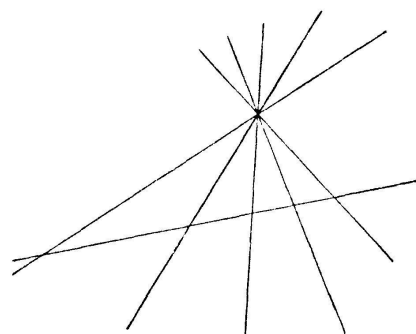


Fig. 4.

2 c)  $\varepsilon_4 = 1$ .

2 c<sub>1</sub>)  $\varepsilon_p = 2$ ,  $4 < p < 8$ , also nur  $p = 6$ , da  $p$  gerade nach 1 c). Die Teilung existiert mit  $f = 12$ ,  $k = 18$ ,  $e = 7$ .  $e_4 = 3$ ,  $e_6 = 4$ . Fig. 5. KT: Tetrakishexaeder oder Hexakistetraeder.

2 c<sub>2</sub>)  $\varepsilon_p = \varepsilon_q = 1$ ,  $4 < p < q$ ,  $p$  und  $q$  gerade nach 1 c). Da in 2 c<sub>1</sub>) 8 die obere Schranke für  $p$  war, so kommt hier nur  $p = 6$  in Betracht. Für  $q$  bleiben dann die Werte 8 und 10.

$2c_{2a})$   $q = 8$ ,  $f = 24$ ,  $k = 36$ ,  $e = 13$ .  $e_4 = 6$ ,  $e_6 = 4$ ,  $e_8 = 3$ .

Fig. 6. KT: Hexakisoktaeder.

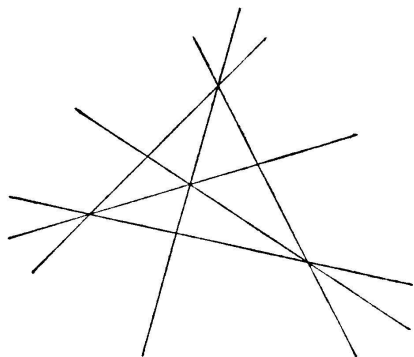


Fig. 5.

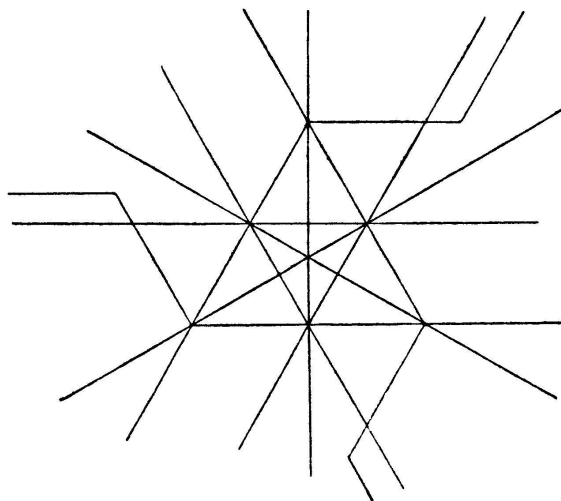


Fig. 6.

$2c_{2b})$   $q = 10$ ,  $f = 60$ ,  $k = 90$ ,  $e = 31$ ,  $e_4 = 15$ ,  $e_6 = 10$ ,  $e_{10} = 6$ .

Fig. 7. KT: Diakishexakontaeder.

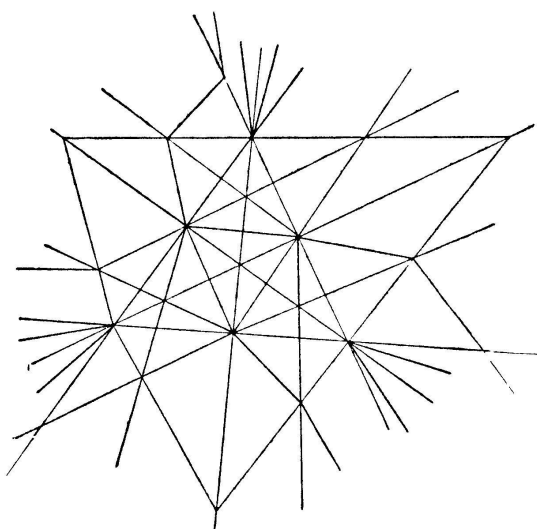


Fig. 7.

3.  $i_1 = 5$ .

3a)  $\varepsilon_5 = 3$ ,  $f = 10$ ,  $k = 15$ ,  
 $e = 6$ . Fig. 8. KT: Ikosaeder.

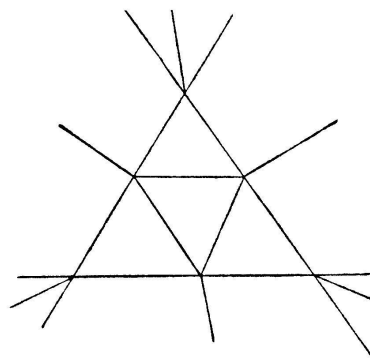


Fig. 8.

3b)  $\varepsilon_5 = 2$  scheidet aus nach 1c).

3c)  $\varepsilon_5 = 1$  zieht nach 1c)  $\varepsilon_p = 2$  bei geradem  $p$  nach sich. Nur für  $p = 6$  übersteigt die Summe in  $(2_3)$  den Wert  $\frac{1}{2}$ .

Dazu gehört eine Teilung mit  $f = 30$ ,  $k = 45$ ,  $e = 16$ .  $e_5 = 6$ ,  $e_6 = 10$ .

Fig. 9. KT: Pentakisdodekaeder.

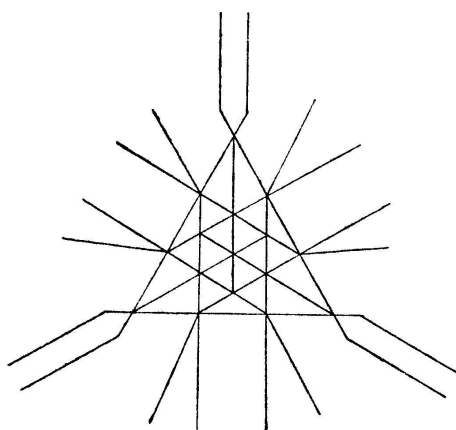


Fig. 9.

Der Fall 1. brachte 2 Teilungen der projektiven Ebene und 4 der Kugel; 2. lieferte eine unendliche Schar und 4 einzelne Teilungen für beide Flächen; 3. noch zwei weitere Teilungen für beide. Im ganzen gibt es also  $\omega_0 + 7$  topologisch reguläre (d. h.  $K_2 = 1$ ) Teilungen der projektiven Ebene in Dreiecke,  $\omega_0 + 9$  der Kugel.  $\omega_0$  ist dabei das Zeichen für „eine unendliche Serie“.

3.  $n = 4$ . Gleichungen (2) und (3) lauten jetzt

$$(2_4) \quad \sum \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{f}$$

$$(3_4) \quad k = 2f.$$

Damit die Summe von 4 Stammbrüchen 1 übersteige, muß mindestens ein Wert  $i_1 < 4$  sein. Wir unterscheiden daher 4 Fälle  $\varepsilon_3 = 4, 3, 2, 1$ .

1.  $\varepsilon_3 = 4$ .  $f = 3$ ,  $k = 6$ ,  $e = 4$ . Fig. 10. KT: Würfel.
2.  $\varepsilon_3 = 3$ .  $f = p$ ,  $k = 2p$ ,  $e = p + 1$ .  $e_3 = p$ ,  $e_p = 1$ . Für jedes ungerade  $p$  eine Teilung. (Fig. 11 für  $p = 7$ .) KT (auch für gerade  $p$ ): Sägerandige Polyeder.

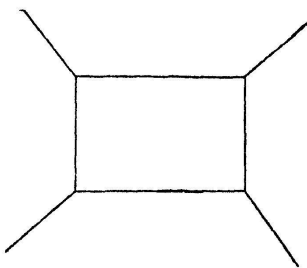


Fig. 10.

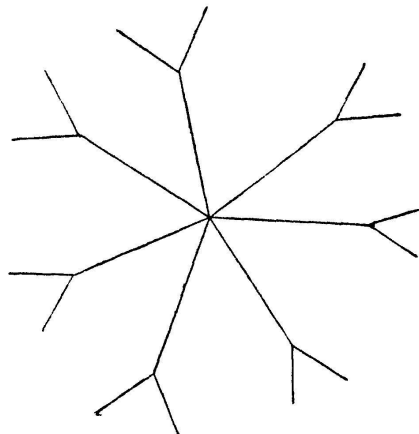


Fig. 11.

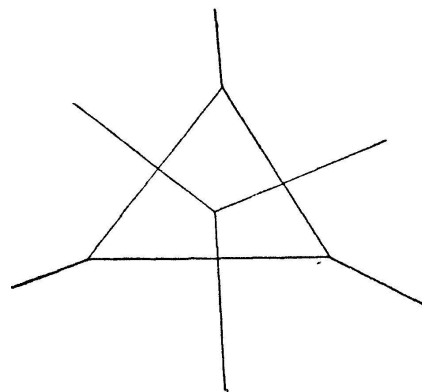


Fig. 12.

3.  $\varepsilon_3 = 2$ . 3a)  $\varepsilon_p = 2$ .  $3 < p < 6$ . a<sub>1</sub>)  $p = 4$ , a<sub>2</sub>)  $p = 5$ .  
 3a<sub>1</sub>)  $p = 4$ ,  $f = 6$ ,  $k = 12$ ,  $e = 7$ ,  $e_3 = 4$ ,  $e_4 = 3$ . Unter den beiden Möglichkeiten für den Zyklus der Verzweigungszahlen, 3344 und 3434 ist nur der letztere konstruktiv möglich, wie sofort zu sehen. Fig. 12. KT: Rhombendodekaeder.

3 a<sub>2</sub>)  $p = 5, f = 15, k = 30, e = 16, e_3 = 10, e_5 = 6$ . Eine Teilung, Fig. 13. KT: Rhombentriakontaeder.

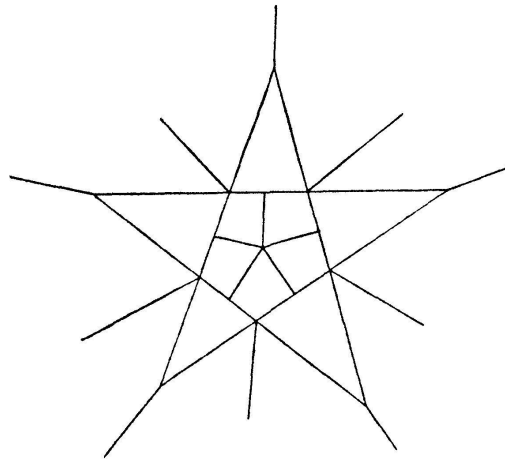


Fig. 13.

3 b)  $\varepsilon_p = \varepsilon_q = 1, 3 < p < q$ . Nach dem vorigen Fall 3 a) kann  $p$  nur 4 oder 5 sein.

3 b<sub>1</sub>)  $p = 4, 4 < q < 12$ . Für  $q = 6, 8, 9, 10, 11$  wird allen Bedingungen genügt. Doch führt keiner der Fälle auf eine Teilung. Es sind die beiden Zyklen der Verzweigungszahlen,  $334q$  und  $343q$  denkbar. Der erste führt, wie eine Betrachtung einer dreizähligen Ecke lehrt, sogleich auf ein Viereck mit  $\varepsilon_4 = 3$ . Dieselbe Betrachtung für den zweiten Zyklus führt auf ein Viereck mit  $\varepsilon_4 = 2$  oder  $\varepsilon_q = 2$ .

3 b<sub>2</sub>)  $p = 5, q = 6$  oder  $7$ . Keiner dieser beiden Fälle führt zu einer Teilung, aus dem nämlichen Grunde.

4.  $\varepsilon_3 = 1$ .

4 a)  $\varepsilon_4 = 3, f = 12, k = 24, e = 13, e_3 = 4, e_4 = 9$ . Fig. 14. KT: Diakisdodekaeder, spez. Deltoidikositetraeder.

4 b)  $\varepsilon_4 = 2, \varepsilon_5 = 1, f = 30, k = 60, e = 31, e_3 = 10, e_4 = 15, e_5 = 6$ . Fig. 15. KT: Deltoidhexekontaeder.

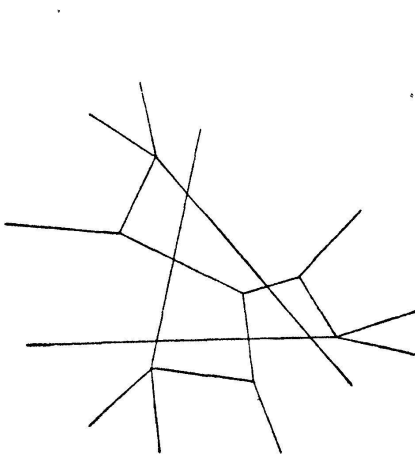


Fig. 14.

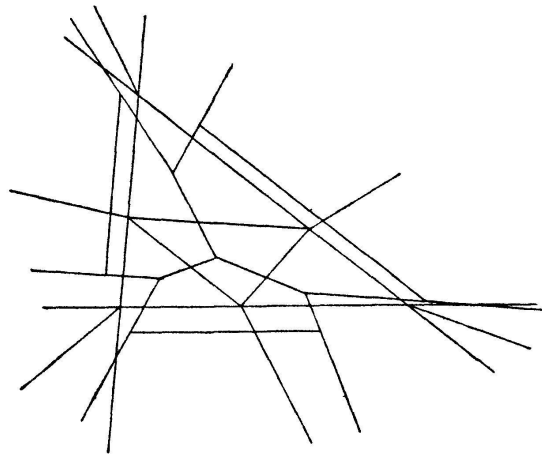


Fig. 15.

Es gibt also eine unendliche Schar plus fünf einzelnen Teilungen der projektiven Ebene wie der Kugel in Vierecke.

4.  $n = 5$ . Gleichungen (2) und (3) lauten jetzt

$$(2_5) \quad \sum \frac{1}{i} = \frac{3}{2} + \frac{1}{f}$$

$$(3_5) \quad 2k = 5f.$$

Damit die Summe von 5 Stammbrüchen  $\frac{3}{2}$  übersteige, müssen mindestens 4 der Werte  $i$  gleich 3 sein. Wir haben also nur die beiden Fälle  $\varepsilon_3 = 5$  oder  $\varepsilon_3 = 4$  zu unterscheiden.

1.  $\varepsilon_3 = 5$ .  $f = 6$ ,  $k = 15$ ,  $e = 10$ . Fig. 16.

KT: Pentagondodekaeder.

2.  $\varepsilon_3 = 4$ .  $\varepsilon_p = 1$ .  $3 < p < 6$ .

2a)  $p = 4$ .  $f = 12$ ,  $k = 30$ ,  $e = 19$ .  $e_3 = 16$ ,  $e_4 = 3$ .

2b)  $p = 5$ .  $f = 30$ ,  $k = 75$ ,  $e = 46$ .  $e_3 = 40$ ,  $e_5 = 6$ .

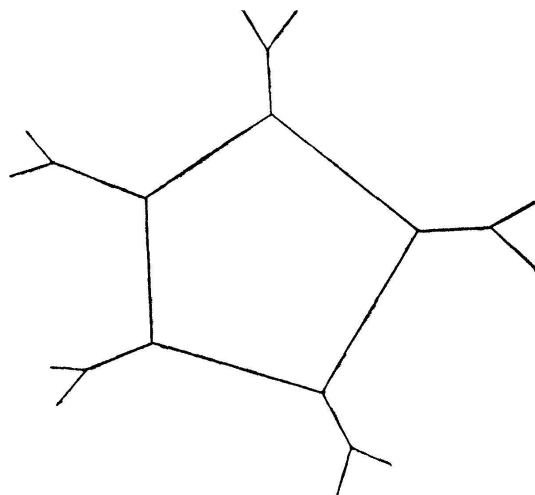


Fig. 16.

Beide Fälle führen nicht zu Teilungen der projektiven Ebene. Zu den doppelten Zahlen ihrer Werte gehören die KT des Pentagonikositetraeders und des Pentagonhexekontaeders.

Es gibt also eine Teilung der projektiven Ebene in Fünfecke und drei Teilungen der Kugel in Fünfecke, bei denen jedes Fünfeck in jedes andere durch eine topologische Abbildung der Teilungen auf sich überführbar ist.

Gewisse unter den Teilungen der projektiven Ebene sind Konfigurationen. Betrachtet man neben der soeben abgehandelten Gesamtheit  $K_2 = 1$  von Teilungen die folgenden Fälle wachsender Inhomogenität,  $K_2 = 2, 3, \dots$ , so möchte man Zusammenhänge mit den Konfigurationen vermuten. Versuche in dieser Richtung förderten nichts Bemerkenswerthes zutage.

(Eingegangen den 3. Juni 1933)