

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 6 (1934)

**Artikel:** Ueber symmetrische Monoide und Kegel.  
**Autor:** Emch, Arnold  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7584>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ueber symmetrische Monoide und Kegel

Von ARNOLD EMCH, Urbana, Illinois (U. S. A.)

## § 1. Einleitung

In verschiedenen früheren Arbeiten<sup>1)</sup> habe ich mich mit der Anwendung der Theorie der endlichen Substitutionsgruppen auf geometrische Probleme beschäftigt. Diese Theorie hat in der Geometrie schon öfters sehr schöne Resultate zu Tage gefördert, wie z. B. den Zusammenhang der Clebschen Diagonalfäche mit der symmetrischen Collineationsgruppe  $G_{120}$  von fünf homogenen Veränderlichen, der Kleinschen Kurve 4. Ordnung mit der  $G_{168}$ , der von Ciani behandelten Fläche 4. Ordnung mit 10 Deckebenen, die auch in der  $G_{120}$  invariant ist, etc.

Schon bei der symmetrischen  $G_{24}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  lassen sich sehr viele interessante geometrische Tatsachen feststellen.

Unter einem symmetrischen geometrischen Gebilde (Konfiguration, Kurve, Fläche, Hyperfläche) in einem projektiven Raum  $S_r(x_1, \dots, x_{r+1})$  von  $r$  Dimensionen verstehe ich die Punktmenge, welche eine oder mehrere symmetrische algebraische Gleichungen  $f(x_1, \dots, x_{r+1}) = 0$  befriedigt. Hat man nur eine Gleichung, so handelt es sich um symmetrische Kurven, Flächen, Hyperflächen in  $S_2, S_3, S_r (r > 3)$ . Bezeichnet man die elementaren symmetrischen Funktionen von  $r+1$  Veränderlichen mit  $\Phi_1 = \sum x_i, \Phi_2 = \sum x_i x_k, \Phi_3 = \sum x_i x_k x_r, \dots, \Phi_{r+1} = x_1 \dots x_{r+1}$ , so lässt sich eine symmetrische Hyperfläche  $n$ . Ordnung in der Form

$$(1) \quad F_n = \sum \alpha_{m_1 m_2 \dots m_{r+1}} \cdot \Phi_1^{m_1} \Phi_2^{m_2} \cdot \Phi_3^{m_3} \dots \Phi_{r+1}^{m_{r+1}} = 0$$

---

<sup>1)</sup> Some geometric applications of symmetric substitution groups. Amer. Journ. of Math., Vol. 45 (1923), pp. 192—207.

On the mapping of the Quadruples of the  $G_4$  in a plane upon a Steiner surface. Amer. Soc. Bull., Vol. 33 (1929), pp. 381—390.

On the mapping of the sextuples of the symmetric  $G_6$  in a plane upon a quadric. Amer. Soc. Bull., Vol. 33 (1927), pp. 745—750.

On the geometry of symmetric functions. Tohoku Math. Journ., Vol. 32 (1930), pp. 16—26.

Finite groups and their geometric representation. Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 162 (1930), pp. 238—255.

On algebraic surfaces which are invariant in a certain class of finite collineation groups. Amer. Math. Soc. Bull., Vol. 36 (1930), pp. 547—552.

darstellen, wobei die  $\alpha$  beliebige Koeffizienten und die  $m_i$  positive ganze Zahlen sind und die Relation gelten muß

$$(2) \quad m_1 + 2 m_2 + 3 m_3 + \dots + (r+1) m_{r+1} = n.$$

Die Konstruktion solcher Gebilde kommt somit auf die Lösung dieser diophantischen Gleichung oder eines bekannten Zerlegungsproblems der Zahlentheorie heraus.

In dieser Arbeit werde ich mich mit der Darstellung symmetrischer Monoide und Kegel, insbesondere derjenigen 6. Ordnung in  $S_3$  beschäftigen.

## § 2. Definition der Monoide und Kegel

Nach Cayley ist ein Monoid  $n$ . Ordnung eine Fläche mit einem  $(n-1)$ -fachen Punkt und ist somit rational. Ein symmetrisches Monoid ist in der symmetrischen Kollineationsgruppe  $G_{24}$  invariant. Der einzige Punkt der in  $G_{24}$  unverändert bleibt ist der Einheitspunkt  $E(1111)$ , so daß die Singularität des Monoids notwendigerweise in diesen Punkt fallen muß. Da ein Monoid  $n$ . Ordnung in der Form

$$(3) \quad z = \frac{f_n(x, y)}{f_{n-1}(x, y)}$$

in Cartesischen Koordinaten dargestellt werden kann, so muß ein symmetrisches Monoid in  $S_3$  notwendigerweise die Form haben

$$(4) \quad (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) F_{n-1}(x_1, x_2, x_3, x_4) - F_n(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

worin  $F_{n-1}$  und  $F_n$  symmetrische Polynome der Ordnung  $n-1$  und  $n$  sind, welche homogen durch drei linear unabhängige Formen 1. Grades  $y_1, y_2, y_3$ , die den Punkt  $E$  enthalten, dargestellt werden können. Setzt man nämlich

$$(5) \quad \begin{aligned} \varrho y_1 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \\ \varrho y_2 &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4, \\ \varrho y_3 &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \\ \varrho y_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \end{aligned}$$

so nimmt (4) die Form

$$(6) \quad y_4 F_{n-1}(y_1, y_2, y_3) - F_n(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

an, die sofort den Charakter eines Monoids aufweist. Bezeichnet man mit  $\Phi_i$  die in (1) gebrauchten elementaren symmetrischen Funktionen, so ergibt sich

$$(7) \begin{aligned} \varrho^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) &= \Sigma (x_i - x_k)^2 = 3 \Phi_1^2 - 8 \Phi_2 = Y_2, \\ \varrho^4 (y_1^4 + y_2^4 + y_3^4) &= 3 \Phi_1^4 - 16 \Phi_1^2 \Phi_2 - 32 \Phi_1 \Phi_3 + 32 \Phi_2^2 + 128 \Phi_4, \\ \varrho^4 (y_1^2 y_2^2 + y_2^2 y_3^2 + y_3^2 y_1^2) &= 3 \Phi_1^4 - 16 \Phi_1^2 \Phi_2 + 16 \Phi_1 \Phi_3 + 16 \Phi_2^2 - 64 \Phi_4 = Y_4, \\ \varrho^3 \cdot y_1 y_2 y_3 &= \Phi_1^3 - 4 \Phi_1 \Phi_2 + 8 \Phi_3 = Y_3, \end{aligned}$$

wobei natürlich  $Y_2^2 - (y_1^4 + y_2^4 + y_3^4) = 2 Y_4$  ist. Man sieht, daß  $Y_2$ ,  $Y_3$ ,  $Y_4$  symmetrische Funktionen der  $x$  von der Ordnung 2, 3, 4 mit vielfachen Punkten derselben Ordnung in  $E$  sind. Konstruiert man Polynome  $P_{n-1}(Y_2, Y_3, Y_4)$  und  $P_n(Y_2, Y_3, Y_4)$  von  $Y_2, Y_3, Y_4$ , welche in den  $x$  homogen und bezüglich von den Graden  $n-1$  und  $n$ , und folglich symmetrisch sind, so ergibt sich ohne weiteres:

*Satz I. Der Ausdruck*

$$\lambda \Phi_1 P_{n-1}(Y_2, Y_3, Y_4) + \mu P_n(Y_2, Y_3, Y_4) = 0$$

stellt ein symmetrisches Monoid der Ordnung  $n$  mit einem  $(n-1)$ -fachen Punkt in  $E$  dar. Für  $\lambda = 0$  hat man die allgemeine Form

$$P_n(Y_2, Y_3, Y_4) = 0$$

des symmetrischen Kegels  $n$ . Ordnung.

Es versteht sich von selbst, daß  $\Phi_1$  nicht ein Teiler von  $P_n$  sein darf.

Ein Kegel von ungerader Ordnung enthält  $Y_3$  oder eine Potenz von  $Y_3$  als einen Faktor. Der einzige Kegel dritter Ordnung ist einfach

$$y_1 y_2 y_3 = Y_3 = \Phi_1^3 - 4 \Phi_1 \Phi_2 + 8 \Phi_3 = 0.$$

Als symmetrischer Kegel 5. Ordnung ergibt sich  $Y_2 Y_3 = 0$ .  $Y_2^2 Y_3 = 0$ ,  $Y_3^2 = 0$ ,  $Y_2 Y_3^2 = 0$  sind bezüglich Kegel 7., 9., 11. Ordnung, usw.

### § 3. Die Monoide und Kegel 4. Ordnung

I. Es sollen zunächst einige Bezeichnungen eingeführt werden, die ich schon in früheren Arbeiten gebrauchte.  $A_1(1,0,0,0)$ ,  $A_2(0,1,0,0)$ ,  $A_3(0,0,1,0)$ ,

$A_4(0,0,0,1)$  seien die Ecken des Koordinatentetraeders;  $E(1,1,1,1)$  der Einheitspunkt;  $\mathcal{E}_{12}(1,-1,0,0), \mathcal{E}_{13}(1,0,-1,0), \mathcal{E}_{14}(1,0,0,-1), \mathcal{E}_{34}(0,0,1,-1), \mathcal{E}_{24}(0,1,0,-1), \mathcal{E}_{23}(0,1,-1,0)$  die Schnittpunkte der Kanten des Tetraeders mit der Einheitsebene  $\Phi_1 = 0$ ;  $D_1(1,-1,1,-1), D_2(1,-1,-1,1), D_3(1,1,-1,-1)$  die Diagonalpunkte des von den Koordinatenebenen auf  $\Phi_1 = 0$  ausgeschnittenen Vierseits. Die in (5) gegebenen Gleichungen  $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0$  sind dann die durch den Einheitspunkt und diese Diagonalpunkte gehenden Ebenen.

Nach Satz I hat nun ein Monoid der 4. Ordnung die Form

$$(8) \quad \Phi_1 Y_3 + \lambda Y_2^2 + \mu Y_4 = 0,$$

oder

$$(9) \quad \Phi_1(\Phi_1^3 - 4\Phi_1\Phi_2 + 8\Phi_3) + \lambda(9\Phi_1^4 - 48\Phi_1^2\Phi_2 + 64\Phi_2^2) + \mu(3\Phi_1^4 - 16\Phi_1^2\Phi_2 + 16\Phi_1\Phi_3 + 16\Phi_2^2 - 64\Phi_4) = 0.$$

Für  $\lambda = 0$  ergibt sich die bekannte Römerfläche von Steiner. Ist  $\mu = -4\lambda$ , so läßt sich (9) in die Gestalt bringen

$$(10) \quad \Phi_1 Y_3 + \lambda(4x_1 - \Phi_1)(4x_2 - \Phi_1)(4x_3 - \Phi_1)(4x_4 - \Phi_1) = 0,$$

woraus sofort hervorgeht, daß dieses Monoid die sechs Geraden  $\overline{E\mathcal{E}_{ik}}$  einfach enthält und die  $\mathcal{E}_{ik}$  als Doppelpunkte hat. Im allgemeinen liegen auf einem Monoid  $n$ . Ordnung (3)  $n(n-1)$  durch  $E$  gehende Schnittgeraden, nämlich diejenigen von  $f_{n-1} = 0$  und  $f_n = 0$ .

In dem besonderen Falle (10) sind die  $\overline{E\mathcal{E}_{ik}}$  doppelt zu zählen. Zudem liegen die vier Geraden  $\mathcal{E}_{ik}\mathcal{E}_{ij}$  auch auf der Fläche.

Daß auch auf dem allgemeinen symmetrischen Monoid 4. Ordnung 12 durch  $E$  gehende Geraden liegen, kann direkt wie folgt bewiesen werden. In einer der drei Ebenen  $y_i = 0$ , etwa  $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$  nehmen wir eine beliebige durch  $E$  gehende Gerade  $s$   $\rho x_1 = \lambda + 1, \rho x_2 = \lambda - 1, \rho x_3 = \lambda + \alpha, \rho x_4 = \lambda + \alpha$  an, die durch den Punkt  $(1, -1, \alpha, -\alpha)$  bestimmt ist. Liegt diese Gerade auf der Fläche

$$\lambda_1 \Phi_1^4 + \lambda_2 \Phi_1^2 \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_1 \Phi_3 + \lambda_4 \Phi_2^2 + \lambda_5 \Phi_4 = 0,$$

so muß diese Gleichung für alle Werte von  $\lambda$  befriedigt werden. Für einen Punkt der Geraden findet man  $\Phi_1 = 4\lambda, \Phi_2 = 6\lambda^2 - \alpha^2 - 1, \Phi_3 = 4\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda(\alpha^2 + 1), \Phi_4 = \lambda^4 - \lambda^2(\alpha^2 + 1) + \alpha^2$ . Setzt man diese Werte in obige Gleichung ein, so kommt dann  $\lambda^3$  nur in dem Gliede  $\Phi_1 \Phi_3$  vor. Also muß  $\lambda_3$  verschwinden.  $\lambda$  kommt nirgends vor,

somit gibt es nur die Glieder welche  $\lambda^4$ ,  $\lambda^3$ , 1 enthalten, deren Verschwinden auf drei Gleichungen mit den Unbekannten  $\frac{\lambda_1}{\lambda_5}$ ,  $\frac{\lambda_2}{\lambda_5}$ ,  $\frac{\lambda_3}{\lambda_5}$ ,  $\frac{\lambda_4}{\lambda_5}$ , führt. Diese sind erfüllbar und zwar auf  $\infty$ -fache Art. Da sich alles innerhalb der  $G_{24}$  abspielt, so bestimmt also  $s$  elf andere durch  $E$  gehende Geraden, wovon 4 in jeder Ebene  $y_i$  liegen.  $E$  wird dreifacher Punkt und die Fläche ein Monoid.

Als Ergebnis hat man

*Satz 2.* *Jede durch  $E$  gehende und in einer Ebene  $y_i$  liegende Gerade  $s$  führt durch  $G_{24}$  zu einer Gruppe von zwölf Geraden durch  $E$ , die sich zu vieren auf die drei Ebenen  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  verteilen. Eine solche Gruppe bestimmt ein Büschel von symmetrischen Monoiden 4. Ordnung, welches die ganze Gruppe enthält. Es gibt also  $\infty^3$  Monoide dieser Art ( $\infty^5$  in  $S_3$ ). In dieser Mannigfaltigkeit kommen  $\infty^1$  Steinersche Flächen vor, ferner  $\infty^1$  Flächen von der Art, sechs doppelt zuzählende Geraden  $E\mathcal{E}_{ik}$ , sechs Doppelpunkte  $\mathcal{E}_{ik}$  und ihre vier Verbindungsgeraden zu enthalten.*

2. Die symmetrische Funktion  $Y_4$  lässt sich wie folgt schreiben:

$$(11) \quad 4(y_1^2y_2^2 + y_2^2y_3^2 + y_3^2y_1^2) = (y_1 + y_2 + y_3)(-y_1 + y_2 + y_3) \\ (y_1 - y_2 + y_3)(y_1 + y_2 - y_3) + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^2.$$

Hierin ist

$$(12) \quad y_1 + y_2 + y_3 = -(\Phi_1 - 4x_1), \quad -y_1 + y_2 + y_3 = \Phi_1 - 4x_3, \\ y_1 - y_2 + y_3 = \Phi_1 - 4x_4, \quad y_1 + y_2 - y_3 = \Phi_1 - 4x_2.$$

Das sind die Gleichungen der Ebenen, welche  $E$  mit den Schnittgeraden der Koordinatenebenen mit der Einheitsebene verbinden. Sie sollen mit  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  bezeichnet werden. Man hat auf die Bauart von (11) gestützt den

*Satz 3.* *Der Kegel 4. Ordnung  $Y_4 = 0$  hat die Ebenen  $e_i$  zu Doppeltangentialebenen. Die je zwei Berührungsgeraden in jeder werden durch den Kegel  $Y_2 = 0$  ausgeschnitten.*

Betrachtet man den Büschel von Steinerschen Flächen  $\Phi_1 Y_3 + \lambda Y_4$ , so bildet der Schnitt desselben mit der Einheitsebene eine Kurve 4. Ordnung ( $\Phi_1 = 0$ ,  $Y_4 = 0$ ), welche die Schnittgeraden  $e_i$  der Koordinatenebenen mit der Einheitsebene zu Doppeltangenten hat. Zudem sind die Diagonalpunkte Doppelpunkte dieser Kurve. Somit

*Satz 4.* Alle Flächen des Büschels  $\Phi_1 Y_3 + \lambda Y_4 = 0$  gehen durch dieselbe Kurve 4. Ordnung  $C_4$  in der Einheitsebene. Diese merkwürdige Kurve hat die Eigenschaft vier reelle Doppeltangenten zu besitzen, die ein Vierseit bilden, dessen reellen Diagonalpunkte Doppelpunkte der Kurve sind. Außer diesen Doppelpunkten ist die Kurve imaginär.

3. Aehnliches gilt für den Büschel von Kegeln

$$(13) \quad \lambda Y_2^2 + \mu Y_4 = 0, \text{ oder wenn } \mu/\lambda = \nu \text{ gesetzt wird,}$$

$$(14) \quad 9\Phi_1^4 - 48\Phi_1^2\Phi_2 + 64\Phi_2^2 + \nu(3\Phi_1^4 - 16\Phi_1^2\Phi_2 + 16\Phi_1\Phi_3 + 16\Phi_2^2 - 64\Phi_4) = 0.$$

Man kann wieder Größen wie

$$\begin{aligned} z_1 &= 4x_1 - \Phi_1, \\ z_2 &= 4x_2 - \Phi_1, \\ z_3 &= 4x_3 - \Phi_1, \\ z_4 &= 4x_4 - \Phi_1, \end{aligned}$$

einführen, welche die Bedeutung der  $e_i$  haben. Dann wird aus (14)

$$(15) \quad (\sum z_i^2)^2 - \frac{64\nu}{\nu+1} z_1 z_2 z_3 z_4 = 0,$$

oder

$$(16) \quad \left[ \sum (x_i - x_k)^2 \right]^2 - \frac{4\nu}{\nu+1} (4x_1 - \Phi_1)(4x_2 - \Phi_1)(4x_3 - \Phi_1)(4x_4 - \Phi_1) = 0.$$

Daraus ergibt sich

*Satz 5.* Der Büschel von symmetrischen Kegeln 4. Ordnung  $\lambda Y_2^2 + \mu Y_4 = 0$  hat dieselben vier Doppeltangentialebenen  $z_i = 0$ , deren Berührungsgeraden von dem Kegel  $Y_2 = 0$  ausgeschnitten werden.

## § 4. Die Monoide und Kegel 6. Ordnung

1. Die allgemeine symmetrische Fläche 6. Ordnung hängt von 8 wesentlichen Konstanten ab und hat die Form

$$(17) \quad \alpha_0 \Phi_1^6 + \alpha_1 \Phi_1^4 \Phi_2 + \alpha_2 \Phi_1^3 \Phi_3 + \alpha_3 \Phi_1^2 \Phi_2^2 + \alpha_4 \Phi_1^2 \Phi_4 + \alpha_5 \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 + \alpha_6 \Phi_2 \Phi_4 + \alpha_7 \Phi_2^3 + \alpha_8 \Phi_3^2 = 0.$$

Damit diese Fläche ein Monoid werde, muß sie erstens durch  $E$  gehen, zweitens müssen, mit der ersten beginnend, vier nacheinanderfolgende Polaren von  $E$  in bezug auf die Fläche  $E$  enthalten, damit  $E$  ein fünffacher Punkt wird.

Es sind also dazu fünf Bedingungen nötig. Somit bleiben für das Monoid 6. Ordnung drei verfügbare Konstanten, so daß alle Monoide dieser Ordnung eine dreifache Mannigfaltigkeit bilden. Das geht auch aus der früher aufgestellten Gleichung der Monoide  $n$ . Ordnung hervor, welche für die 6. Ordnung

$$(18) \quad \varPhi_1 Y_2 Y_3 + \lambda Y_2^3 + \mu Y_2 Y_4 + \nu Y_3^2 = 0$$

ist. Da diese Gleichung auch als  $Y_2 F_6 + \nu Y_3^2 = 0$  geschrieben werden kann, so ergibt sich

*Satz 6. Alle  $\infty^3$  symmetrischen Monoide 6. Ordnung berühren den Kegel  $Y_2 = 0$  in den Erzeugenden, welche von den Diagonalebenen  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  ausgeschnitten werden. Diese doppelt gezählt, sind die 12 Geraden welche auf einem solchen Monoid durch  $E$  gehen.*

2. Läßt man das erste Glied in (18) weg, so erhält man das Netz symmetrischer Kegel 6. Ordnung

$$(19) \quad \lambda Y_2^3 + \mu Y_2 Y_4 + \nu Y_3^2 = 0,$$

welches natürlich die in Satz 6 ausgesprochenen Eigenschaften hat. Bedeuten jetzt  $\lambda$  und  $\mu$  Konstanten die nicht mit denen von (19) identisch zu sein brauchen, so läßt sich (19) explizite als

$$(20) \quad \begin{aligned} & 3\varPhi_1^6 - 24\varPhi_1^4\varPhi_2 - 6\varPhi_1^3\varPhi_3 + 66\varPhi_1^2\varPhi_2^2 - 54\varPhi_1^2\varPhi_4 + 42\varPhi_1\varPhi_2\varPhi_3 \\ & + 144\varPhi_2\varPhi_4 - 68\varPhi_2^3 - 78\varPhi_3^2 \\ & + \lambda(6\varPhi_1^6 - 48\varPhi_1^4\varPhi_2 + 18\varPhi_1^3\varPhi_3 + 122\varPhi_1^2\varPhi_2^2 + 6\varPhi_1^2\varPhi_4 - 74\varPhi_1\varPhi_2\varPhi_3 \\ & - 16\varPhi_2\varPhi_4 - 92\varPhi_3^2 + 78\varPhi_3^2) \\ & + \mu(\varPhi_1^6 - 8\varPhi_1^4\varPhi_2 - 8\varPhi_1^3\varPhi_3 + 24\varPhi_1^2\varPhi_2^2 + 6\varPhi_1^2\varPhi_4 + 30\varPhi_1\varPhi_2\varPhi_3 \\ & - 16\varPhi_2\varPhi_4 - 28\varPhi_2^3 - 26\varPhi_3^2) = 0 \end{aligned}$$

schreiben. Da diese Gleichung für  $\varPhi_1 = 0$ ,  $\varPhi_2 = 0$ ,  $\varPhi_3 = 0$  befriedigt wird, so liegen die sechs Schnittpunkte dieser drei Flächen  $I_1$  ( $i = i$ ,  $1 = 1$ ),  $I_2$  ( $i = i$ ,  $-1 = 1$ ),  $I_3$  ( $-1 = i$ ,  $i = -i$ ),  $I_4$  ( $-1 = -i$ ,  $i = i$ ),  $I_5$  ( $i = 1$ ,  $-i = 1$ ),  $I_6$  ( $-i = 1$ ,  $i = -1$ ); ( $i = \sqrt{-1}$ ); und somit auch die 6 Linien  $\overline{EI_i}$ ,  $i = 1, \dots, 6$  auf diesen Kegeln. Die partiellen Derivierten nach

$x_i$  von (20) werden von den  $I_i$  befriedigt, wenn  $\mu = 9 - \lambda$  ist. In diesem Falle erhält man aus (20) ein Büschel von Kegeln, welche die  $E T_i$  als Doppelgeraden besitzen. Sollen die Geraden  $\overline{E\mathcal{E}_{ik}}$  einige  $E$  mit den Schnittpunkten der  $\overline{A_i A_k}$  und der Einheitsebene verbinden, so muß  $17 + 23\lambda + 7\mu = 0$  sein. Dieselbe Gleichung findet man für die Bedingung, daß die  $\overline{E\mathcal{E}_{ik}}$  Doppelgeraden seien. Schreibt man beide Bedingungen vor, so wird  $\lambda = -5$ ,  $\mu = 14$  und man erhält einen Kegel, der notwendigerweise reduzibel ist und die Form hat

$$(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)^2 (-x_1 + x_2 - x_3 + x_4)^2 (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 \\ = \Phi_1^6 - 8\Phi_1^4\Phi_2 + 16\Phi_1^3\Phi_3 + 16\Phi_1^2\Phi_2^2 - 64\Phi_1\Phi_2\Phi_3 + 64\Phi_3^2 = 0.$$

3. Symmetrische Kegel 6. Ordnung können rein geometrisch dadurch erhalten werden, daß man den Einheitspunkt  $E$  mit den Punkten der Schnittkurve 6. Ordnung  $C_6$  einer symmetrischen Fläche 2. Ordnung mit einer ebensolchen 3. Ordnung verbindet. Die  $C_6$  dieser Art ergibt sich also als Schnitt von

$$(21) \quad a\Phi_1^2 + b\Phi_2 = 0,$$

und

$$(22) \quad c\Phi_1^3 + d\Phi_1\Phi_2 + e\Phi_3 = 0,$$

und hängt scheinbar von drei effektiven Konstanten ab. Durch eine solche  $C_6$  gehen aber  $\infty'$  Flächen (22), so daß also die Konstantenzahl auf zwei reduziert wird. Die  $\overline{EI_i}$  sind Tangenten von (21) in den Punkten  $I_i$ . Als Parameterdarstellung von  $\overline{EI_1}$  hat man  $x_1 = i + \lambda$ ,  $x_2 = -i + \lambda$ ,  $x_3 = 1 + \lambda$ ,  $x_4 = -1 + \lambda$ . Für diese wird  $\Phi_1 = 4\lambda$ ,  $\Phi_2 = 6\lambda^2$ ,  $\Phi_3 = 4\lambda^3$ , welche in (22) eingesetzt  $(64c + 24d + 4e)\lambda^3 = 0$  geben. Daraus folgt, daß die  $\overline{EI_i}$  die Fläche (22) in den  $I_i$  oskulieren. Als Tangentialebene von (22) in  $I_1$  findet man  $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ , d. h. eine Ebene, welche durch  $E$  geht. Somit wird  $\overline{EI_1}$  eine Tangente der Kurve  $C_6$  in  $I_1$ . Dasselbe ist der Fall für die übrigen  $\overline{EI_i}$  in den Punkten  $I_i$ . Projiziert man jetzt die  $C_6$  von  $E$  auf eine allgemeingeglegene Ebene im Raum, so erhält man eine ebene Kurve 6. Ordnung mit 6 Spitzen. Der projizierende Kegel ist ein symmetrischer Kegel  $K_6$  mit 6 Rückkehrkanten. Dieser schneidet die quadratische Fläche (21) in einer Raumkurve 12. Ordnung, wovon  $C_6$  ein Teil ist. Folglich ist die Restkurve eine andere  $C'_6$ , die auch symmetrisch sein muß. Daß diese  $C'_6$  auch der vollständige Schnitt von (21) mit einer zweiten

kubischen Fläche (22) ist, kann wie folgt bewiesen werden: Eine symmetrische  $F_2$  (21) wird durch einen allgemein gewählten Punkt, durch welche sie gehen soll, vollständig bestimmt. Sei nun ein symmetrischer  $K_6$  gegeben. Auf ihm wähle man einen beliebigen Punkt  $P_1$ . Dieser bestimmt eine  $F_2$ , welche  $K_6$  in einer Kurve 12. Ordnung  $C_{12}$  schneidet, die durch die 24 der  $G_{24}$  zugehörigen Punkte  $P_1, \dots, P_{24}$  geht. Da  $F_2$   $K_6$  in 12 Punkten schneidet, welche durch die  $I_i$  absorbiert werden, so schneidet  $F_2$  die  $\overline{EI_i}$  in keinen andern Punkten außerhalb der  $I_i$ . Auf jeder Erzeugenden von  $K_6$  befinden sich zwei Punkte  $P_1, P_2$  der  $C_{12}$ , so daß diese aus zwei Zweigen  $B_1$  und  $B_2$  besteht, die eindeutig aufeinander bezogen sind. Auf dem Zweige  $B_1$ , auf welchem  $P_1$  liege, nehme man einen weiteren Punkt  $R_1$  an. Dann bestimmen  $P_1$  und  $R_1$  eine symmetrische kubische Fläche  $F_3$  eindeutig. Diese geht durch die 48 zu der Gruppe  $G_{24}$  gehörigen Punkte  $(P_i, R_i)$  und durch  $I_i$ . Somit schneiden sich  $F_2$  und  $F_3$  in einer  $C_6$ , welche  $12 + 48 = 60$  Punkte mit  $C_{12}$  gemein hat und mit dem Zweig  $B_1$  zusammenfällt. Somit ist auch  $B_2$  eine Kurve 6. Ordnung und  $C_{12} = B_1 \cdot B_2$ . Da  $R_1$  in  $\infty^1$ -facher Weise gewählt werden kann, so gehen durch jede  $B_1 = C_6$  ( $B_2 = C_6^1$ )  $\infty^1$  kubische  $F_3$ . Zusammenfassend ergibt sich

*Satz 7.* Auf jedem symmetrischen Kegel  $K_6$  6. Ordnung gibt es  $\infty^1$  symmetrische Kurven 6. Ordnung. Da es  $\infty^1$  solcher Kegel gibt, so ist die Mannigfaltigkeit der symmetrischen Raumkurven 6. Ordnung  $\infty^2$ , wie oben durch Konstantenzählung auch gefunden wurde. Jede symmetrische Fläche 2. Ordnung schneidet jeden symmetrischen allgemeinen Kegel 6. Ordnung in zwei symmetrischen Kurven 6. Ordnung. Umgekehrt werden alle  $\infty^1$  symmetrischen Kegel 6. Ordnung erhalten als projizierende Kegel von symmetrischen Raumkurven 6. Ordnung vom Einheitspunkte aus. Alle solchen Kegel  $K_6$  haben die  $EI_i$  als Rückkehrkanten.

Die Gleichung des in diesem Satze auftretenden Büschels von  $K_6$  wird aus (20), für  $\mu = 9 - \lambda$  erhalten und ist

$$(23) \quad \begin{aligned} & 12 \Phi_1^6 - 96 \Phi_1^4 \Phi_2 - 78 \Phi_1^3 \Phi_3 + 282 \Phi_1^2 \Phi_2^2 + 312 \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \\ & \quad - 320 \Phi_2^3 - 312 \Phi_3^2 \\ & + \lambda (5 \Phi_1^6 - 40 \Phi_1^4 \Phi_2 + 26 \Phi_1^3 \Phi_3 + 98 \Phi_1^2 \Phi_2^2 - 104 \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \\ & \quad - 64 \Phi_2^3 + 104 \Phi_3^2) = 0. \end{aligned}$$

4. Es sollen nun noch die Kegel 6. Ordnung  $K_6^*$  behandelt werden, welche die  $\overline{E\mathcal{E}_{ik}}$  als Doppelgeraden enthalten und aus (20) durch die

Bedingung  $7\mu + 23\lambda + 17 = 0$  hervorgehen. Sie bilden wieder einen Büschel, der außer den Doppelgeraden die  $\overline{EI_i}$  einfach enthält und auf die Form gebracht werden kann

$$(24) \quad \sum (\Phi_1 - 4x_i)^2 (\Phi_1 - 4x_j)^2 (\Phi_1 - 4x_k)^2 \\ + \lambda \sum (\Phi_1 - 4x_1)(\Phi_1 - 4x_2)(\Phi_1 - 4x_3)(\Phi_1 - 4x_4)(\Phi_1 - 4x_i)^2 = 0; \\ i, j, k = 1, \dots, 4.$$

Projiziert man den Schnitt dieses Büschels mit  $\Phi_1 = 0$  von  $A_4$  auf die Ebene  $x_4 = 0$ , indem man  $x_4 = -(x_1 + x_2 + x_3)$  setzt, so lautet die Gleichung

$$(25) \quad x_1^2 x_2^2 x_3^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2 (x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2) \\ - \lambda x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2] = 0.$$

Führt man  $x_1 + x_2 + x_3 = \psi_1$ ,  $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \psi_2$ ,  $\psi_3 = x_1 x_2 x_3$  ein, so wird aus (25)

$$(26) \quad \psi_1^2 \psi_2^2 - 2 \psi_1^3 \psi_3 + \psi_3^2 - 2 \lambda \psi_1 \psi_3 (\psi_1^2 - \psi_2^2) = 0.$$

Die Ebenen  $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ ,  $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ ,  $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$  durch  $E$  schneiden  $\Phi_1 = 0$  in den Diagonalgeraden  $d_1, d_2, d_3$ , welche auf dem Kegelschnitt  $K(\Phi_1 = 0, \Phi_2 = 0)$  die Punkte  $I_i$  ausschneiden. Die Projektionen von  $d_1, d_2, d_3$  von  $E$  auf  $x_4 = 0$  lauten  $x_2 + x_3 = 0$ ,  $x_3 + x_1 = 0$ ,  $x_1 + x_2 = 0$ . Ihr Produkt ist  $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) = \psi_1 \psi_2 - \psi_3$ . Die Projektion  $K'$  von  $K$  ist  $\psi_1^2 - \psi_2^2 = 0$ .

Die Kurve (26) geht durch die 36 Schnittpunkte von

$$(27) \quad 2 \psi_1 \psi_3 (\psi_1^2 - \psi_2^2) = 0$$

und

$$(28) \quad \psi_1^2 \psi_2^2 - 2 \psi_1^3 \psi_3 + \psi_3^2 = 0,$$

wovon 24 von den  $\mathcal{E}_{ik}$  absorbiert werden. Addiert man (27) und (28), so ergibt sich eine neue durch dieselben 36 Punkte gehende Kurve 6. Ordnung

$$(29) \quad (\psi_1 \psi_2 - \psi_3)^2 = 0,$$

d. h. das doppelt gerechnete Produkt der projizierten Diagonalgeraden. Dieses schneidet den Kegelschnitt  $\psi_1^2 - \psi_2^2 = 0$  in 6 auf demselben

doppelt zu rechnenden Punkten, durch welche alle Kurven des Büschels (26) gehen und welche deshalb den Kegelschnitt in den Projektionen der  $I_i$  berühren. Bezeichnet man den symmetrischen Kegel 2. Ordnung, welcher  $E$  mit  $K$  verbindet, mit  $K_e$ , so folgt jetzt

*Satz 8. Die symmetrischen Kegel 6. Ordnung mit den  $E\mathcal{E}_i$  als Doppelgeraden berühren den symmetrischen Kegel 2. Ordnung in den Geraden  $E I_i$ .*

(Eingegangen den 20. Mai 1933)