

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 6 (1934)

**Artikel:** Notiz zu einem Kriterium für die Konvergenz von Reihen mit reellen Gliedern.  
**Autor:** Motzkin, Th.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7583>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Notiz zu einem Kriterium für die Konvergenz von Reihen mit reellen Gliedern<sup>1)</sup>

Von TH. MOTZKIN, Basel

§ 1. *Ostrowski*<sup>2)</sup>, *Polya-Szegö*<sup>3)</sup> und *Knopp*<sup>4)</sup> haben Folgen  $a_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) untersucht, für die

$$(1) \quad (a_1 - a_n) + (a_2 - a_n) + \dots + (a_{n-1} - a_n) \leq c,$$

d. h. beschränkt ist, sowie analogen Bedingungen genügende Funktionen einer stetigen Veränderlichen  $a(n)$ . Die Hauptgrundlage bildet dabei der Satz, daß  $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$  konvergiert, wenn die  $a_n$  der Bedingung (1) genügen und monoton gegen 0 abnehmen. Die Frage liegt nun nahe, wie weit die letztere Zusatzbedingung wesentlich ist. Ich will den angeführten Satz zur Klärung des Sachverhalts auf eine neue Art beweisen, ihn ferner dahin verschärfen (§ 3), daß es für positive  $a_n$  genügt, daß beliebig kleine  $a_n$  vorkommen, und ihm einen weiteren Satz über Häufungspunktmengen im allgemeinen Fall an die Seite stellen (§ 6). Dabei benutze ich die *Ostrowskischen* Bezeichnungen  $\uparrow$  und  $\downarrow$  für im weiteren Sinne monoton wachsend und fallend.

$$\S 2. \quad \text{Sei } \sum_{v=1}^n a_v = s_n,$$

$$(2) \quad \frac{s_n - c}{n} = t_n, \quad s_n = n t_n + c.$$

Es ist  $a_1 = t_1 + c$ , und für  $n > 1$

$$(3) \quad a_n = n t_n - (n - 1) t_{n-1}.$$

Die Beschränktheitsbedingung  $s_n - n a_n \leq c$  geht durch die Substitution (2) in  $t_n \leq a_n$  über. Nach (3) ist hierzu notwendig und hin-

<sup>1)</sup> Ich habe im folgenden von verschiedenen Bemerkungen Gebrauch gemacht, die ich Herrn Prof. Ostrowski verdanke.

<sup>2)</sup> Jber. Deutsch. Math. Vereinig. 34, 1926, pp. 161—171, Mathematische Miszellen III. Über Nullstellen gewisser im Einheitskreis regulärer Funktionen und einige Sätze zur Konvergenz unendlicher Reihen.

<sup>3)</sup> Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, S. 78.

<sup>4)</sup> Jber. Deutsch. Math. Vereinig. 37, 1928, pp. 325—327, Bemerkung zu einigen Sätzen über unendliche Reihen.

reichend, daß  $(n-1)t_n - (n-1)t_{n-1} \geq 0$ , d. h.  $t_n \geq t_{n-1}$  ( $n=2, 3, \dots$ ) ist. (I) ist also äquivalent mit der Bedingung, daß die  $t_n$  monoton wachsen. Es sei  $t_n \uparrow d$ , wo  $d$  auch  $\infty$  sein kann. Auf jeden Fall ist dann wegen  $t_n \leq a_n$

$$\lim t_n = d \leq \underline{\lim} a_n.$$

Es gilt aber sogar

$$d = \underline{\lim} a_n.$$

Denn andernfalls sei  $\underline{\lim} a_n = d + e$ ,  $e > 0$ . Dann ist  $\underline{\lim} (a_n - t_{n-1}) = \underline{\lim} n(t_n - t_{n-1}) = e$ , also von einem  $n$  an  $t_n - t_{n-1} > \frac{e}{2n}$ ; aus dieser Majorisierung der harmonischen Reihe ergäbe sich  $d = \infty$ , also auch  $\underline{\lim} a_n = \infty$ .

Für  $d \geq 0$  divergiert nun wegen  $s_n = nt_n + c$  unsere Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$  unter allen Umständen, und zwar respektive nach  $+\infty$  oder  $-\infty$ . Die Reihe kann also nur konvergieren, wenn  $t_n \uparrow 0$  und damit  $\underline{\lim} a_n = 0$  ist.

§ 3. Um uns nun über den Einfluß der  $a_n$  auf das Verhalten der  $t_n$  klar zu werden, nehmen wir zunächst  $a_n \geq 0$  an, also auch  $d = \underline{\lim} a_n \geq 0$ . Ist nun  $d = 0$ , so folgt aus  $\frac{s_n - c}{n} = t_n \leq 0$   $s_n \leq c$ , so daß die monotone Folge der  $s_n$  konvergiert.

**Satz 1.** Für positive  $a_n$  ist zur Konvergenz einer die Bedingung (I) erfüllenden Reihe notwendig und hinreichend, daß  $\underline{\lim} a_n = 0$  ist.

Damit haben wir die Konvergenzfrage für durchweg nicht negative  $a_n$  vollständig erledigt.

Aus dem Satz 1 folgt insbesondere:

**Satz 1\*.** Ist  $\underline{\lim} a_n$  zugleich eine untere Schranke der  $a_n$ ,

$$\underline{\lim} a_n \leq a_v, \quad v = 1, 2, \dots,$$

so folgt aus (I), daß die Folge  $a_n$  konvergiert:

$$\lim a_n = \underline{\lim} a_n.$$

§ 4. Wir untersuchen nun die Einschränkung, die durch die Bedingung 1) den  $a_n$  im allgemeinen Falle auferlegt wird, wenn nicht alle  $a_n$

$\geq d = \lim a_n$  sind. Es ist vor allem zu bemerken, daß man die Folge der  $t_n$  als eine beliebige, monoton wachsende Folge vorgeben kann, woraus sich dann — nach Vorgabe eines beliebigen  $c$  — die  $a_n$  vermöge der Gleichung (3) so ergeben, daß sie der Bedingung (I) genügen. Insbesondere liegt die Frage nahe, ob *nicht wenigstens im Falle  $d = 0$  die so entstehenden  $a_n$  gegen 0 konvergieren müssen*.  $c$  ist wegen der Gleichung  $a_n = n t_n - (n-1) t_{n-1}$  offenbar nur auf den Wert von  $a_1$  von Einfluß.

§ 5. Wir beweisen zunächst den

**Satz 2.** *Sei  $H$  eine beliebige abgeschlossene<sup>5)</sup> Menge nichtnegativer Zahlen, die die Null, sowie beliebig kleine positive Zahlen enthält. Dann gibt es stets eine Folge von positiven  $b_n$  aus  $H$ , wobei jedes  $b_n$  endlich oft wiederholt werden darf, die  $H$  zur Menge der Häufungspunkte hat und für die  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$  konvergiert.*

Jedenfalls<sup>6)</sup> gibt es nämlich eine Folge von verschiedenen positiven  $b'_n$  aus  $H$ , die  $H$  zur Menge der Häufungspunkte hat. Aus dieser werden wir die Folge  $b_n$  durch Umordnung und Wiederholung herstellen. Wir wählen ein festes  $\varepsilon > 0$  und sodann

1) wählen wir für jedes  $n$ , das kein Kubus ist,  $b_n < \frac{\varepsilon}{n}$ , was nach Voraussetzung möglich ist, dann konvergiert die entsprechende Teilreihe von  $\sum \frac{b_n}{n}$  gegen eine positive Zahl  $< \sum \frac{\varepsilon}{n^2} = \varepsilon \frac{\pi^2}{6}$ ;

2) stellen wir die übrigen  $b'$  so in die freien Plätze, daß daselbst  $b_n < \varepsilon n^{\frac{1}{3}}$  gilt, was möglich ist, indem man zu große  $b'$  auf später verschiebt und dafür eventuell kleinere (jedes endlich oft) wiederholt: dann konvergiert auch die entsprechende Teilreihe von  $\sum \frac{b_n}{n}$  gegen eine positive Zahl  $\leq \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varepsilon v}{v^3} = \varepsilon \frac{\pi^2}{6}$ .

Daher ist  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} < \varepsilon \frac{\pi^2}{3}$ , läßt sich also sogar beliebig klein machen.

*Bemerkung.* Für die Gültigkeit des Satzes ist wesentlich, daß  $H$  beliebig kleine positive Zahlen enthält, da sonst die Reihe  $\sum \frac{b_n}{n}$  nach dem

<sup>5)</sup> d. h.  $H$  enthält alle ihre endlichen Häufungspunkte, kann aber beliebig große Zahlen enthalten.

<sup>6)</sup> s. z. B. *Hausdorff*, Mengenlehre, Lpz. 1914, p. 273 oder daselbst 2. Aufl. Berl.-Lpz. 1927, p. 127, Z. 6.

Satz über die Divergenz der harmonischen Reihe stets divergieren müßte. Lassen wir dagegen auch unendlich oft  $b_n = 0$  zu, so fällt, wie man leicht überlegt, diese einschränkende Bedingung weg, was wir sofort anwenden werden.

§ 6. Nunmehr ergibt sich — als Antwort auf unsere Frage — leicht der

**Satz 3.** *Sei  $H$  eine beliebige, nach unten beschränkte abgeschlossene Menge reeller Zahlen. Dann gibt es — für beliebiges  $c$  — stets eine Folge  $a_n$ , die der Bedingung (1) genügt und  $H$  zur Menge der Häufungspunkte hat.*

Ziehen wir nämlich die kleinste Zahl  $d$  aus  $H$  von jeder Zahl von  $H$  ab, so erhalten wir eine Menge  $H'$ , zu der wir eine Folge  $b_n$  gemäß der Bemerkung zum Satze 2 bilden können. Die Partialsummen der Reihe  $\sum \frac{b_n}{n}$  bezeichnen wir mit  $t_n + e$ , wo  $e$  eine solche feste Zahl bedeutet, daß  $t_n \uparrow d$  gilt. Es sei nun für  $n > 1$

$$a_n = b_n + t_{n-1} \approx nt_n - (n-1)t_{n-1},$$

und  $a_1 = t_1 + c$ . Dann hat die Menge der  $a_n$  die Ableitung  $H$  und erfüllt, wie wir in § 2 gesehen haben, die Bedingung (1).

(Eingegangen den 19. Mai 1933)