Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 5 (1933)

Artikel: Note sur un type d'équations différentielles du premier ordre.

Autor: Rivier, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6662

Note sur un type d'équations différentielles du premier ordre

par W. RIVIER, Lausanne

Soit $F(u, v, w)$ une fonction de trois variables indépendantes. Je sup pose que cette fonction possède des dérivées partielles du premier ordre et que ces dernières satisfont à la condition suivante:

$$au \frac{\partial F}{\partial u} + bv \frac{\partial F}{\partial v} + cw \frac{\partial F}{\partial w} = k F, \tag{1}$$

a, b, c et k désignant des constantes données. Je considère alors l'équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{2}$$

Cette équation présente quelques particularités simples que je me propose d'indiquer ici.

1°) Opérons dans (2) les substitutions $x = x'^{\mu}$, $y = y'^{\nu}$, où μ et ν désignent des constantes arbitraires différentes de zéro. Soit alors

$$F'\left(x', y', \frac{dy'}{dx'}\right) = 0$$

l'équation transformée de (2). Envisageons la fonction $F'(u, v, w)$. Cette fonction satisfera à la condition

$$a'u \frac{\partial F'}{\partial u} + b'v \frac{\partial F'}{\partial v} + c'w \frac{\partial F'}{\partial w} = k F'$$

pour $a' = \frac{a}{\mu}$, $b' = \frac{b}{\nu}$ et c' déterminé par la relation

$$a' - b' + c' = a - b + c.$$

2°) Supposons a et b différents de zéro. Choisissons μ et ν de manière que l'on ait

$$(3) \qquad \frac{a}{\mu} - \frac{b}{\nu} = a - b + c.$$

$\frac{dy'}{dx'}$ sera alors fonction du produit $x'^{-\frac{b\mu}{a\nu}} y'$ seulement. Si l'on a $a - b + c \neq 0$, l'exposant qui affecte x' dans ce produit pourra prendre n'importe quelle valeur donnée à l'avance, la valeur -1 exceptée. Si l'on a $a - b + c = 0$, cet exposant, au contraire, prendra la valeur -1 quelles que soient μ et ν satisfaisant à (3).

Dans le premier cas, il n'existe pas de méthode générale connue pour intégrer (2).

Dans le second cas, l'équation transformée de (2) sera une équation homogène. Il en résulte une méthode d'intégration qui fera dépendre l'intégrale générale de (2) d'une fonction implicite d'une variable. Plus exactement, cette intégrale générale sera définie par les relations

$$\begin{cases} x = \left(C e^{\int \frac{dt}{z-t}}\right)^{\frac{a\nu}{b}} \\ y = \left(C t e^{\int \frac{dt}{z-t}}\right)^{\nu}, \end{cases}$$

où C désigne la constante arbitraire, z et t des variables liées par l'équation

$$(4) \qquad F\left(1, t^{\nu}, \frac{b}{a} t^{\nu-1} z\right) = 0,$$

et ν une quantité dont on pourra disposer arbitrairement. Supposons, par exemple, que $F(u, v, w)$ soit un trinôme. Si l'on prend alors, dans l'équation (4), t comme fonction et le produit $t^{\lambda} z$ comme variable, l'équation qui liera t à cette dernière pourra, par un choix convenable des quantités λ et ν, être rendue linéaire par rapport à t.

3°) Les remarques que nous venons de faire, concernant le cas où l'on a $a - b + c = 0$, s'appliquent naturellement aux équations différentielles homogènes du premier ordre, puisque ces équations différentielles, comme on s'en sera aperçu tout de suite, appartiennent au type envisagé dans cette note et sont caractérisées par le fait que, dans la condition (1) à laquelle elles satisfont, on a $a = b$ et $c = 0$.

(Reçu le 30 juillet 1932)