Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 5 (1933)

Artikel: Note sur un type d'équations différentielles du premier ordre.
Autor: Rivier, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6662

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Note sur un type d'équations différentielles du premier ordre

par W. RIVIER, Lausanne

Soit $F(u, v, w)$ une fonction de trois variables indépendantes. Je sup pose que cette fonction possède des dérivées partielles du premier ordre et que ces dernières satisfont à la condition suivante:

$$au\frac{\partial F}{\partial u} + bv\frac{\partial F}{\partial v} + cw\frac{\partial F}{\partial w} = kF, \tag{1}$$

a, b, c et k désignant des constantes données. Je considère alors l'équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{2}$$

Cette équation présente quelques particularités simples que je me propose d'indiquer ici.

1°) Opérons dans (2) les substitutions $x = x'^{\mu}$, $y = y'^{\nu}$, où μ et ν désignent des constantes arbitraires différentes de zéro. Soit alors

$$F'\left(x', y', \frac{dy'}{dx'}\right) = 0$$

l'équation transformée de (2). Envisageons la fonction $F'(u, v, w)$. Cette fonction satisfera à la condition

$$a'u\frac{\partial F'}{\partial u} + b'v\frac{\partial F'}{\partial v} + c'w\frac{\partial F'}{\partial w} = kF'$$

pour $a' = \frac{a}{\mu}$, $b' = \frac{b}{\nu}$ et c' déterminé par la relation

$$a' - b' + c' = a - b + c.$$

2°) Supposons a et b différents de zéro. Choisissons μ et ν de manière que l'on ait

$$\frac{a}{\mu} - \frac{b}{\nu} = a - b + c. \tag{3}$$

$\frac{dy'}{dx'}$ sera alors fonction du produit $x'^{-\frac{b\mu}{a\nu}} y'$ seulement. Si l'on a $a - b + c \neq 0$, l'exposant qui affecte x' dans ce produit pourra prendre n'importe quelle valeur donnée à l'avance, la valeur -1 exceptée. Si l'on a $a - b + c = 0$, cet exposant, au contraire, prendra la valeur -1 quelles que soient μ et ν satisfaisant à (3).

Dans le premier cas, il n'existe pas de méthode générale connue pour intégrer (2).

Dans le second cas, l'équation transformée de (2) sera une équation homogène. Il en résulte une méthode d'intégration qui fera dépendre l'intégrale générale de (2) d'une fonction implicite d'une variable. Plus exactement, cette intégrale générale sera définie par les relations

$$\begin{cases} x = \left(C e^{\int \frac{dt}{z-t}}\right)^{\frac{a\nu}{b}} \\ y = \left(C t e^{\int \frac{dt}{z-t}}\right)^{\nu}, \end{cases}$$

où C désigne la constante arbitraire, z et t des variables liées par l'équation

$$F\left(1,\ t^{\nu},\ \frac{b}{a} t^{\nu-1} z\right) = 0, \tag{4}$$

et ν une quantité dont on pourra disposer arbitrairement. Supposons, par exemple, que $F(u, v, w)$ soit un trinôme. Si l'on prend alors, dans l'équation (4), t comme fonction et le produit $t^{\lambda} z$ comme variable, l'équation qui liera t à cette dernière pourra, par un choix convenable des quantités λ et ν, être rendue linéaire par rapport à t.

3°) Les remarques que nous venons de faire, concernant le cas où l'on a $a - b + c = 0$, s'appliquent naturellement aux équations différentielles homogènes du premier ordre, puisque ces équations différentielles, comme on s'en sera aperçu tout de suite, appartiennent au type envisagé dans cette note et sont caractérisées par le fait que, dans la condition (1) à laquelle elles satisfont, on a $a = b$ et $c = 0$.

(Reçu le 30 juillet 1932)