Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 5 (1933)

Artikel: Les probabilités continues "en chaine".
Autor: Fréchet, Maurice
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6660

Les probabilités continues „en chaîne"

par Maurice FRÉCHET, Paris

Résumé

Le présent mémoire est un essai de mise au point en ce qui concerne la détermination exacte des champs de validité des résultats antérieurement connus de la théorie des probabilités continues dites « en chaîne ».

Sommaire

Introduction

Markoff a appelé événements « en chaîne » des événements fortuits tels que, dans une suite d'épreuves, la réalisation de l'un d'eux dépende du résultat de l'épreuve précédente. Il a étudié particulièrement le cas où les événements possibles considérés sont en nombre fini. Divers auteurs,

— à sa suite, ou indépendamment, — ont étudié le même problème dans le cas où ces événements sont en nombre infini: dans le cas des probabilités continues. On trouvera un excellent résumé de leurs recherches dans un petit ouvrage dû à M. Hostinsky (I) [1]).

Dans ces travaux, on s'est d'abord préoccupé, comme il est légitime, d'aller de l'avant et d'arriver aux applications. Toutefois, il nous a paru qu'il était maintenant utile de *consolider les résultats acquis en les revisant au point de vue de la rigueur mathématique, puis de procéder à leur extension.* Nous nous sommes consacrés à cette tâche dans notre cours du Premier Semestre 1931—32. Et nous publions ici une partie de ce cours.

L'étude critique des cas de validité des propriétés antérieurement énoncées nous a conduit à introduire des distinctions qui, malheureusement, ne simplifient pas l'exposition, mais qui serrent de plus près la vérité. Telles sont les notions de cas positivement régulier, de cas quasi-régulier. En ne limitant pas les recherches au cas des densités continues et des domaines bornés, on a aussi introduit des complications nouvelles, mais des complications auxquelles on ne peut échapper, même dans les applications.

Il n'est guère possible de résumer ici les résultats nouveaux contenus dans ce travail. On ne pourra s'en rendre compte qu'en le comparant en détail avec les travaux antérieurs sur le même sujet.

Position du problème

Diffusion. L'un des problèmes physiques où s'est présenté naturellement la conception des événements «en chaîne» est celui de la diffusion. On considère un liquide comme formé de molécules soumises à des chocs incessants. Une première approximation consiste à admettre que la probabilité de la position B de la molécule après un choc ne dépend que de B et de la position A qu'avait la molécule lors du choc précédent. Lorsque le nombre des positions possibles de la molécule n'est pas supposé limité, il faut faire intervenir au lieu du point B, un intervalle, de la façon que nous allons préciser.

Cas rectiligne. Prenons pour commencer le cas simple d'une molécule dont le mouvement est rectiligne. Nous supposerons qu'il y a une probabilité déterminée pour qu'une molécule occupant une abscisse x vienne

---

[1]) On a reporté à la fin du mémoire les titres complets des publications distinguées dans le texte par des chiffres romains.

prendre, après n chocs, une position comprise dans un intervalle déterminé (y', y''). Nous admettrons que cette probabilité ne dépend que des positions initiale et finale — c'est-à-dire de x, y', y'' — et du nombre de chocs qui ont produit ce déplacement, indépendamment du nombre et de l'effet des chocs qui l'ont précédé. La probabilité en question devrait se mettre sous la forme d'une intégrale de Stieltjes étendue à l'intervalle $y'\,y''$. Mais en abordant le cas des probabilités continues, on rencontre plusieurs difficultés qui ne se présentent pas dans la régularisation des probabilités discontinues. Les intégrales qui représentent des probabilités nécessairement finies peuvent s'étendre à des régions illimitées et à des fonctions infinies en certains points. L'étude de la régularisation étant elle-même assez récente, il sera peut-être préférable de ne pas aborder toutes les difficultés à la fois; nous nous contenterons donc de l'étudier dans le cas où les probabilités en question ont des densités de probabilité généralement finies. Plus précisément, nous supposerons que la probabilité ci-dessus se représente par une intégrale ordinaire. Son élément différentiel dépendra naturellement de x, de n et de la variable d'intégration y. En résumé, nous supposerons que la probabilité en question soit représentable sous la forme

$$\int_{y'}^{y''} P^{(n)}(x, y)\, dy.$$

On exprime ce fait d'une manière brève, mais peu rigoureuse, en disant que la probabilité élémentaire pour que la molécule passe, après n chocs, de l'abscisse x à une abscisse comprise entre y et $y + dy$ est $P^{(n)}(x, y)\, dy$. On aura évidemment $P^{(n)}(x, y) \geqq 0$. Et, puisque après n épreuves il est certain que la molécule partant de x se trouvera quelque part, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P^{(n)}(x, y)\, dy = 1.$$

Dans le cas particulier où la molécule reste dans un vase de dimensions finies, y devra rester dans un intervalle fixe (a, b) et on pourra se contenter d'écrire

$$\int_{a}^{b} P^{(n)}(x, y)\, dy = 1.$$

Pour simplifier les notations on posera

$$p(x, y) = P^{(1)}(x, y).$$

Pour aller de la position x à une position située dans l'intervalle y, $y + dy$ à la $n + m^{\text{ème}}$ épreuve, il faut aller, à la $n^{\text{ème}}$ épreuve, à une certaine position qu'on peut situer dans un intervalle u, $u + du$ et, de là, à la position située entre y et $y + dy$ à la $n + m^{\text{ème}}$ épreuve. Plaçons-nous dans l'hypothèse où ce dernier déplacement a la même probabilité que si les deux positions dernières successives étaient prises avant la première épreuve et à la $m^{\text{ème}}$. Alors, si l'on suppose en outre que les $P^{(n)}(x, y)$ sont des fonctions continues de x et de y, on aura, en faisant varier seulement u,

$$P^{(m+n)}(x, y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} P^{(n)}(x, u)\, du\, P^{(m)}(u, y)\, dy$$

en vertu du théorème des probabilités composées; d'où la relation d'itération

$$P^{(m+n)}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P^{(n)}(x, u)\, P^{(m)}(u, y)\, du.$$

On a, en outre, pour chaque entier n

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P^{(n)}(x, y)\, dy = 1$$

puisque la molécule partant de x doit bien arriver en quelque position y. On voit que, connaissant $p(x, y)$, la relation d'itération permet, en prenant $m = 1$, avant et après y avoir permuté m et n, de calculer successivement tous les $P^{(n)}(x, y)$ par l'une ou l'autre des formules

$$P^{(n+1)}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P^{(n)}(x, u)\, p(u, y)\, du$$

$$P^{(n+1)}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, u)\, P^{(n)}(u, y)\, du.$$

Cas de l'espace. Plus généralement, supposons que la molécule puisse se déplacer dans l'espace à trois dimensions, alors on fera intervenir la probabilité élémentaire $P^{(n)}(A, B)\, dv_B$ pour que la molécule primitivement en A se trouve à la $n^{\text{ième}}$ épreuve dans un volume dv_B entourant le point B. Plus précisément, on étudiera le cas où la probabilité pour que la molécule, primitivement en A, se trouve à la $n^{\text{ième}}$ épreuve dans un volume R est représentée par une intégrale triple de la forme

$$\int_R P^{(n)}(A, B)\, dv_B .$$

Cas général. On peut encore généraliser et considérer le cas d'un système dépendant de k paramètres qui ne sont plus nécessairement de nature géométrique, mais dont la connaissance définit l'état du système. On pourra désigner par E et F deux états du système et par v une région de l'espace à k dimensions. Et l'on pourra étudier le cas où la probabilité pour que le système passe, en n épreuves, de l'état E à l'un quelconque des états F appartenant à v est représentée par une intégrale multiple de la forme

$$\int_v P^{(n)}(E, F)\, d\tau_F$$

c'est-à-dire de la forme

$$\int_v \Phi^{(n)}(q_1, q_2, \ldots q_k ; u_1, u_2, \ldots u_k)\, du_1 \ldots du_k$$

$q_1, \ldots q_k ; u_1, \ldots u_k$ désignant les paramètres qui définissent respectivement E et F. En raisonnant comme plus haut, on voit qu'on devra avoir

$$\int \ldots\ldots \int_V \Phi^{(n)}(q_1, \ldots q_k ; u_1, \ldots u_k)\, du_1 \ldots du_k = 1$$

ou, sous une forme plus condensée

$$\text{(T)} \qquad \int_V P^{(n)}(E, F)\, d\tau_F = 1$$

et de même

$$\text{(I)} \qquad P^{(m+n)}(E, F) = \int_V P^{(n)}(E, G)\, P^{(m)}(G, F)\, d\tau_G$$

en désignant par V la région de l'espace à k dimensions formée par l'ensemble des états possibles du système (V peut être bornée ou illimitée). Enfin, on aura évidemment la condition $p(E, F) \geqq 0$, d'où, d'après (I), $P^{(n)}(E, F) \geqq 0$.

Puisque les $P^{(n)}(E, G)$ sont $\geqq 0$ et vérifient (T), $P^{(m+n)}(E, F)$ est une moyenne «pondérée» des $P^{(m)}(G, F)$. Si donc on nomme $P^{(m)}(F)$ et $p^{(m)}(F)$ les bornes finies ou non de $P^{(m)}(G, F)$ quand G parcourt V, on aura

$$0 \leqq p^{(m)}(F) \leqq p^{(m+n)}(F) \leqq P^{(m+n)}(F) \leqq P^{(m)}(F).$$

Lorsque n croît indéfiniment $p^{(n)}(F)$ et $P^{(n)}(F)$ ont des limites déterminées, finies ou non, $p(F)$ et $P(F)$ et l'on a

$$0 \leqq p(F) \leqq P(F).$$

Nous pourrons prendre pour V un ensemble très général. Nous supposerons seulement que ce soit un *domaine*, entendant par là que V est formé par la réunion des états intérieurs à V et de leurs états limites. C'est ce qui a lieu pour toutes les figures simples. Les deux conséquences qui nous seront utiles par la suite sont les suivantes. D'une part, V sera «fermé» au sens de la théorie des ensembles c'est-à-dire comprendra tous les états limites d'une suite d'états de V. D'autre part, pour tout état E de V, et quel que soit $\eta > 0$, il existe un état F intérieur à V et à distance [2]) de $E < \frac{\eta}{2}$. Donc, il y aura une sphère v de centre F et de rayon assez petit pour qu'elle soit formée uniquement d'états de V, tous à distance de E inférieure à η. En appelant *mesure* de V l'intégrale $\int_V d\tau$, on voit ainsi que pour tout état E de V (même pour un état appartenant à la frontière de V) et pour tout nombre $\eta < 0$, il existe une partie v de V à distance de E de moins de η et dont la mesure est positive.

Nous allons maintenant étudier les conséquences qu'on peut déduire de l'hypothèse particulière que l'une des densités itérées $P^{(n)}(E, F)$ est uniformément continue.

---

[2]) Si E, F sont déterminés respectivement par les paramètres $q_1, \ldots q_k$; $u_1, \ldots u_k$, on pourra appeler distance de E à F la quantité $\sqrt{(q_1-u_1)^2 + \ldots + (q_k - u_k)^2}$, par exemple.

Intervention de la continuité.

Continuité éventuelle des bornes. Faisons d'abord un raisonnement général s'appliquant aux bornes inférieure $\varphi(F)$ et supérieure $\Phi(F)$, quand F est fixe, d'une fonction $\Phi(E, F)$ uniformément continue quand E, F varient simultanément sur V, et partout $\geqq 0$ sur V.

Alors $\varphi(F)$ est partout finie et $\geqq 0$ et on a

$$\Phi(E, F) \geqq [\Phi(E, F) - \Phi(E, F_1)] + \varphi(F_1).$$

Or, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\eta > 0$ et indépendant de E tel que

$$|\Phi(E, F) - \Phi(E, F_1)| < \varepsilon \text{ pour } FF_1 < \eta.$$

On a donc

$$\Phi(E, F) \geqq -\varepsilon + \varphi(F_1)$$

et puisque le second membre est indépendant de E

$$\varphi(F) \geqq -\varepsilon + \varphi(F_1).$$

On a de même $\varphi(F_1) \geqq -\varepsilon + \varphi(F)$

et finalement

$$|\varphi(F) - \varphi(F_1)| \leqq \varepsilon \text{ pour } FF_1 < \eta.$$

Ainsi, que V soit borné ou non, $\varphi(F)$ est uniformément continue sur V. Et même, puisque tout couple ε, η convenant pour $\Phi(E, F)$ convient à $\varphi(F)$, on voit que $\varphi(F)$ est, en ce sens, au moins aussi continu que $\Phi(E, F)$.

Le résultat correspondant pour $\Phi(F)$ est moins simple, car $\Phi(F)$ peut être infini. Toutefois, si l'on suppose $\Phi(E, F)$ non seulement uniformément continu, mais encore borné sur V, des raisonnements analogues aux précédents montrent que $\Phi(F)$ sera aussi borné et uniformément continu sur V. C'est, en particulier, ce qui aura lieu pour toute fonction $\Phi(E, F) \geqq 0$ et continue quand E et F varient sur un domaine fini V.

En passant au cas général, supposons qu'il y ait au moins un état F_0 où $\Phi(F_0)$ soit fini. Comme on a, pour $FF_0 < \eta$

$$\Phi(E, F) = [\Phi(E, F) - \Phi(E, F_0)] + \Phi(E, F_0) \leqq \varepsilon + \Phi(F_0)$$

quel que soit E, on aura

$$\Phi(F) \leqq \varepsilon + \Phi(F_0)$$

et en particulier $\Phi(F)$ sera aussi fini.

Ainsi, étant donnés deux états F, F_0 de V, à distance $< \eta$, $\Phi(F)$ et $\Phi(F_0)$ sont en même temps infinis, ou bien tous deux finis et on a

$$|\Phi(F) - \Phi(F_0)| < \varepsilon.$$

Dans la partie V' de V où $\Phi(F)$ est fini, $\Phi(F)$ est donc uniformément continu. On peut d'ailleurs observer que si U est une partie de V qui est d'un seul tenant, U appartient entièrement à V' ou appartient entièrement à $V - V'$. Par hypothèse, si F, F' appartiennent à U, alors, à tout $\eta > 0$ correspond un nombre fini d'états $F_1, F_2, \dots F_s$ de U tels de FF_1, $F_1F_2 \dots$, F_sF' soient tous $< \eta$. Si donc, par exemple, F appartient à V', alors $\Phi(F)$ est fini, donc $\Phi(F_1)$ est fini; $\Phi(F_1)$ étant fini, il en est de même de $\Phi(F_2)$, etc..... Finalement $\Phi(F')$ est aussi fini.

Remarques. I. On peut observer, en suivant la démonstration de plus près que le résultat subsiste si on remplace l'uniforme continuité de $\varphi(E, F)$ quand E, F varient simultanément par une condition moins stricte, « l'égale continuité » des fonctions *de* F, $\varphi(E, F)$ qui correspondent chacune à un état E déterminé. Autrement dit, il suffit de supposer qu'à tout $\varepsilon > 0$, correspond η tel que

$$|\varphi(E, F) - \varphi(E, F_0)| < \varepsilon \text{ pour } FF_0 < \eta$$

E variant sur V. Cette remarque sera utile plus loin (p. 183).

II. Supposons qu'on sache que $\Phi(F)$ est fini presque partout sur V, circonstance qui se présentera souvent plus loin. Alors $V - V'$ est vide ou de mesure nulle: Si $V - V'$ n'était pas vide, il y aurait un état F appartenant à $V - V'$ et pour toute valeur de $\eta > 0$, la sphère de centre F, rayon η, contiendrait comme on l'a vu p. 180 une sphère appartenant à V et par suite n'appartenant pas entièrement à $V - V'$ qui est de mesure nulle.

Il y aurait donc un état F_0 de V où $\Phi(F_0)$ est fini et à distance $< \eta$ de F. Par suite, $\Phi(F)$ serait fini contrairement à l'hypothèse. Ainsi dans ce cas $V' \equiv V$ c'est-à-dire que: si $\Phi(F)$ est fini presque partout sur V, $\Phi(F)$ est fini partout sur V et y est uniformément continu.

Un cas intéressant, que nous rencontrerons souvent par la suite est celui où $\varphi(E, F)$ est $\geqq 0$ et est majoré, quels que soient E, F sur V, par une fonction $\psi(F)$ sommable sur V. Alors, l'ensemble sur lequel $\psi(F)$ est infini, est vide ou de mesure nulle. Il en est donc de même de $\Phi(F)$. Par suite, $\Phi(F)$ est fini et uniformément continu sur tout le domaine V.

Continuité éventuelle des $p^{(n)}(F)$. Supposons que l'une au moins $P^{(m)}$ des fonctions $P^{(n)}(E, F)$ soit uniformément continue. Ou même, plus généralement, supposons que les fonctions *de* F, $P^{(m)}(E, F)$ correspondant respectivement aux divers états E soient «également continues» (p. 182) en F. Alors, à tout ε positif correspond un nombre η tel que $|P^{(m)}(E, F) - P^{(m)}(E, F_1)| < \varepsilon$ pour $FF_1 < \eta$, E variant sur V, ε et η étant indépendants de E. Alors

$$|P^{(s+m)}(E,F) - P^{(s+m)}(E, F_1)| \leqq \int_V P^{(s)}(E, G)|P^{(m)}(G, F) - P^{(m)}(G, F_1)| d\tau_G \leqq \varepsilon$$

pour $FF_1 < \eta$.

On voit que pour E, n fixes, $P^{(n)}(E, F)$ sera une fonction de F uniformément continue et que les fonctions de la famille de fonctions *de* F obtenue en faisant varier E et n ($\geqq m$) seront aussi «également continues». Il en résulte, d'après la p. 182, que l'on aura

$$|p^{(n)}(F) - p^{(n)}(F_1)| < \varepsilon$$

pour $n > m$ et $FF_1 < \eta$. En passant à la limite pour F, F_1 fixes, on aura aussi

$$|p(F) - p(F_1)| < \varepsilon.$$

En résumé: *que le domaine V soit fini ou non, il suffit que l'une des probabilités itérées $P^{(n)}(E, F)$ soit uniformément continue en E, F sur V, pour que les $p^{(n)}(F)$, à partir d'un certain rang, et leur limite $p(F)$ soient chacune uniformément continues sur V et même y soient dans leur ensemble «également continues».*

En ce qui concerne les bornes supérieures $P^{(n)}(F)$, le résultat précédent subsistera si l'une au moins des probabilités $P^{(n)}(E, F)$ qui est supposée uniformément continue est en même temps bornée sur V et alors les $P^{(n)}(F)$ et $P(F)$ seront même «également» bornées à partir d'un certain rang. Il subsistera aussi quand l'une des probabilités $P^{(n)}(E, F)$ sans être bornée est majorée par une fonction $\psi(F)$ sommable sur V.

Enfin, dans le cas général, soit V_r' l'ensemble sur lequel $P^{(r)}(F)$ est fini et V' l'ensemble sur lequel $P(F)$ est fini: V_r' appartient à V'. Si $FF_1 < \eta$ et si F, F_1 appartiennent à V', alors pour r assez grand F, F_1 appartiennent à V_r'. Or pour $r > m$, les $P^{(n)}(E, F)$ sont des fonctions de F telles que

$$|P^{(r)}(E, F) - P^{(r)}(E, F_1)| < \varepsilon.$$

D'après ce qu'on a vu, p. 182

$$|P^{(r)}(F) - P^{(r)}(F_1)| < \varepsilon$$

pour r assez grand et par suite, à la limite,

$$|P(F) - P(F_1)| \leqq \varepsilon.$$

Ainsi, dans le cas général, $P^{(r)}(F)$ est uniformément continu sur V_r' et $P(F)$ est uniformément continu sur tout l'ensemble V' où $P(F)$ est fini.

Dans le cas particulier où $P(F)$ est fini presque partout, soient F, F_1 deux états quelconques de V, à distance $< \eta$. Alors, si $P(F_1)$ est fini, il en est de même de $P^{(r)}(F_1)$ pour r assez grand. $P^{(r)}(E, F)$ étant, en supposant $r > m$ «également continu» en F quand E varie, il en résulte d'après la p. 182 que $P^{(r)}(F)$ est aussi fini et par suite que $P(F)$ est aussi fini. Ainsi V' contient tout état F à distance $< \eta$ d'un état F_1 de V' et $V - V'$ est de mesure nulle. D'après le raisonnement de la p. 182 il en résulte que $V - V'$ est vide ou que $V' \equiv V$. En résumé, si l'une des fonctions $P^{(n)}(E, F)$ est uniformément continue quand E, F varient sur V, alors, que V soit limité ou non, si l'on est certain que $P(F)$ est fini presque partout sur V, on peut affirmer que $P(F)$ est fini et uniformément continu partout sur V. Nous savions déjà qu'il en est de même pour $p(F)$.

Continuité éventuelle des $P^{(n)}(E, F)$. Par contre, le raisonnement précédent ne prouve pas que si l'une des fonctions $P^{(n)}(E, F)$ est uniformément continue sur V, il en soit de même pour les autres à partir d'un certain rang. Il y a cependant des cas simples où cette conclusion est légitime.

Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre η tel que pour $EE_1 < \eta$, $FF_1 < \eta$ on ait

$$|P^{(m)}(E_1, F_1) - P^{(m)}(E, F)| < \varepsilon. \quad \text{On a donc}$$

$$|P^{(s+m)}(E_1, F_1) - P^{(s+m)}(E, F)| \leq$$

$$\int_V P^{(s)}(E_1, G)\,|P^{(m)}(G, F_1) - P^{(m)}(G, F)|\,d\tau_G$$

$$+ \int_V |P^{(m)}(E_1, G) - P^{(m)}(E, G)|\,P^{(s)}(G, F)\,d\tau_G.$$

Si $P^{(s)}(G, F)$ est une fonction de G sommable sur V, le second membre est $< \varepsilon[1 + \int_V P^{(s)}(G, F)\, d\tau_G]$.

Nous aurons alors plusieurs cas:

I. Si V est borné, alors $P^{(m)}(E, F)$ supposée continue sur V y a une borne supérieure finie μ et il en est de même pour $P^{(s)}(E, F)$ pour $s \geqq m$. On a donc pour $n \geqq 2m$, $EE_1 < \eta$, $FF_1 < \eta$.

$$|P^{(n)}(E, F) - P^{(n)}(E_1, F_1)| < \varepsilon[1 + \mu \text{ mes. } V].$$

Ainsi, *quand le domaine V est borné il suffit que l'une des fonctions $P^{(n)}(E, F)$ soit continue quand E, F parcourent V — et par suite uniformément continue — pour que toutes ces fonctions soient à partir d'un certain rang, chacune uniformément continue* et même, dans leur ensemble, «également continues».

II. Ne supposons plus le domaine V borné; alors si l'une au moins des fonctions $P^{(n)}(E, F)$ est uniformément continue, et si, en outre, l'intégrale $\int_V P^{(n)}(G, F)\, d\tau_G$ est, pour n assez grand, inférieure à un nombre indépendant de F et de n, la conclusion précédente subsiste. La deuxième condition sera satisfaite en particulier dans le cas où est vérifiée une certaine condition T_1' dont nous reconnaîtrons plus loin (p. 222) l'importance.

Cette dernière condition sera aussi satisfaite dans le cas où $P^{(m)}(E, F)$ est non seulement uniformément continu mais encore borné supérieurement sur V et même avec une borne inférieure positive a. Alors, on a

$$P^{(n+m)}(E, F) = \int_V P^{(m)}(E, G) P^{(n)}(G, F)\, d\tau_G > a \int_V P^{(n)}(G, F)\, d\tau_G.$$

Or, puisque $P^{(m)}(E, F)$ a une borne supérieure M il en est de même de $P^{(n+m)}(E, F)$ et l'on a

$$\mathcal{J} = \int_V P^{(n)}(G, F)\, d\tau_G < \frac{M}{a}$$

et ceci quels que soient n et F. Il en résulte encore que $P^{(m)}(E, F)$, $P^{(m+1)}(E, F)$, ... seront des fonctions «également continues» et «également» bornées.

Si l'intégrale $\mathcal{J} = \int_V P^{(s)}(G, F)\, d\tau_G$ a, pour s assez grand, une borne simplement indépendante de F, mais variable avec s et si $P^{(m)}(G, F)$ est seulement supposée uniformément continue sur V, alors chacune des fonctions $P^{(n)}(E, F)$ sera, pour n assez grand, uniformément continue sur V.

Enfin, dans le cas plus général où $P^{(m)}(G, F)$ étant uniformément continue sur V, on suppose simplement que, quel que soit s assez grand $P^{(s)}(G, F)$ est une fonction de G sommable sur V quand F est en F_0, alors $P^{(n)}(E, F)$ sera simplement, pour n assez grand, une fonction continue de E et de F pour le couple d'états E_0, F_0 où E_0 est arbitraire.

Notons d'ailleurs que, dans bien des cas, l'étude directe des fonctions $P^{(n)}(E, F)$ permettra d'établir leur continuité, à partir d'un certain rang, sans recourir aux propositions précédentes. Tel est le cas de l'exemple de la p. 189.

Introduction de la régularisation

On a $$p^{(m)}(F) \leqq P^{(m)}(E, F) \leqq P^{(m)}(F).$$

Les bornes $p^{(m)}(F)$ et $P^{(m)}(F)$ ne peuvent jamais (p. 180) s'éloigner l'une de l'autre quand m croît. En général, elles vont se rapprocher quand le nombre m des épreuves augmente. En sorte qu'en général l'accroissement du nombre des épreuves a pour effet de diminuer l'amplitude des oscillations possibles — quand on envisage plusieurs positions possibles de E — des densités de probabilités. C'est en cela que consiste, à un premier point de vue, la régularisation des probabilités. L'étendue limite de l'oscillation sera mesurée par $P(F) - p(F)$. Il est d'ailleurs clair que cette régularisation sera d'autant plus marquée que $P(F) - p(F)$ qui est $\geqq 0$ sera plus petit et qu'elle atteindra son maximum quand $P(F) - p(F)$ sera nul.

C'est la recherche des cas où cette circonstance se produira qui va nous occuper maintenant.

Supposons d'abord que $p(E, F)$ ou plus généralement l'un, $P^{(m)}(E, F)$, des $P^{(n)}(E, F)$ a une borne supérieure μ indépendante de E et de F, au moins quand ceux-ci varient sur V. Alors $P^{(m)}(F) \leqq \mu$ et $P^{(n)}(E, F) \leqq \mu$ pour $n > m$ et enfin $P(F) \leqq \mu$.

Notons, d'autre part, que la loi de formation des $P^{(n)}(E, F)$ définie par la condition (I) de la page 179, est la même que celle des noyaux itérés de l'équation intégrale de Fredholm

$$X(M) = f(M) + \int_V p(E, F)\, X(F)\, d\tau_F.$$

La théorie de cette équation sera utilisée plusieurs fois par la suite. Dès maintenant, nous pourrons y renvoyer pour la démonstration de plusieurs propriétés. Il faudra toutefois observer que les démonstrations en sont faites, généralement en supposant V borné et que leur extension au cas d'une région V illimitée n'est pas toujours immédiate. Elle conduirait même parfois à des énoncés inexacts si ceux-ci n'étaient pas convenablement appropriés à ce cas. Par exemple on ne pourra pas, dans ce cas, considérer toute fonction continue comme bornée, intégrable et uniformément continue; et une fonction uniformément continue dans une région illimitée n'y est nécessairement ni bornée, ni intégrable. Par contre, quand la région V est bornée, on sait (II, p. 343) que si le noyau $p(E, F)$ y est continu, il en est de même de tous les noyaux itérés $P^{(n)}(E, F)$. Cette propriété qui va nous servir immédiatement a été établie plus haut, p. 185, comme cas particulier de propositions plus générales.

Définition du cas régulier. Plaçons-nous d'abord, pour simplifier, dans les *hypothèses suivantes:* la fonction $p(E, F)$ est uniformément continue quand E et F varient simultanément dans V et la région V est bornée. Alors $p(E, F)$ a une borne supérieure μ et les fonctions $P^{(n)}(E, F)$ sont uniformément continues et au plus égales à μ. Du fait que $P^{(n)}(E, F)$ est uniformément continue par rapport à l'ensemble de E, F, résulte que $P^{(n)}(F)$ et $p^{(n)}(F)$ sont aussi uniformément continues et d'ailleurs $\leqq \mu$. Ceci étant les inégalités

$$\dots p^{(n)}(F) \leqq p^{(n+1)}(F) \leqq \dots \leqq p(F) \leqq P(F) \leqq \dots \leqq P^{(n+1)}(F) \leqq P^{(n)}(F) \leqq \dots$$

(1) $$0 \leqq | P^{(n)}(E, F) - p(F) | \leqq | P^{(n)}(F) - p^{(n)}(F) |$$

et $$P(F) - p(F) = \lim_{n \to \infty} [P^{(n)}(F) - p^{(n)}(F)]$$

montrent que, dans le cas où on aurait $p(F) = P(F)$ la suite des noyaux itérés $P^{(n)}(E, F)$ aurait une limite déterminée $p(F)$ indépendante de E. Ce serait là une circonstance bien remarquable : la densité de probabilité du passage en n épreuves de l'état E à l'état F deviendrait, pour n croissant, de plus en plus indépendante de l'état initial E.

L'égalité
$$P(F) = p(F)$$
se traduit par l'égalité

$$\lim_{n \to \infty} [P^{(n)}(F) - p^{(n)}(F)] = 0.$$

Dans les hypothèses actuelles la convergence du crochet est nécessairement uniforme. Car il en est ainsi pour toute suite non croissante et convergente de fonctions $\varphi^{(n)}(F)$ continues sur une région V bornée (et, comme on le supposera naturellement toujours ici, fermée, c'est-à-dire comprenant ses éléments limites).

En effet si $\varphi(F)$ est la limite de $\varphi_n(F)$, si l'on pose $D_n(F) = \varphi_n(F) - \varphi(F)$ et si on désigne par M_n le maximum de $D_n(F)$ sur V, M_n ne peut croître quand n croît. Donc M_n a une limite $M \geqq 0$. Il s'agit de montrer que $M = 0$. Dans le cas contraire, l'ensemble S_n des états F de V où $D_n(F) \geqq \frac{M}{2} > 0$ comporterait au moins un état F_n. De la suite des F_n on pourrait tirer une suite $F_{n_1}, F_{n_2}, \ldots$ convergeant vers un état F' de V. Comme $F_{n_p}, F_{n_{p+1}}, \ldots$ appartiendraient à S_{n_p}, F' appartiendrait à S_{n_p}; on aurait donc $D_{n_p}(F') \geqq \frac{M}{2} > 0$ alors que la suite des $D_m(F')$ tend vers 0.

Dans ces conditions, en vertu de (1), $P^{(n)}(E, F)$ converge uniformément vers $p(F)$ quand E, F varient indépendamment sur V. Par suite, on a

$$\int_V P(F)\, d\tau_F = \int_V p(F)\, d\tau_F = \lim_{n \to \infty} \int_V P^{(n)}(E, F)\, d\tau_F = 1.$$

Réciproquement, si, dans les mêmes hypothèses sur $p(E, F)$ et V, les intégrales de $P(F)$ et de $p(F)$ sont égales à l'unité, on aura

$$\int_V [P(F) - p(F)]\, d\tau_F = 0$$

et par suite, la fonction $P(F) - p(F)$ étant continue et $\geqq 0$ sur V y sera nécessairement nulle partout.

Car, si $\psi(F)$ est une fonction continue dans une région V, bornée ou non telle que $\int_V \psi(F)\,dF = 0$ avec $\psi(F) \geqq 0$ et s'il existait un état F_0 de V où $\psi(F_0) > 0$, alors, il existerait (p. 180) une région v de mesure positive, appartenant à V et toute entière assez voisine de F_0 pour que l'on ait sur v, $\psi(F) \geqq \frac{\psi(F_0)}{2}$, d'où $0 = \int_V \psi(F)\,dF \geqq \int_v \psi(F)\,dF \geqq \frac{\psi(F_0)}{2} \int_v dF \geqq 0$ d'où $\int_v dF = 0$, contrairement à la définition de v.

Alors, la suite non croissante de fonctions continues $P^{(n)}(F) - p^{(n)}(F)$ qui converge uniformément sur V vers $P(F) - p(F)$ convergera vers 0 et finalement $P^{(n)}(E, F)$ converge uniformément sur v vers une limite $p(F)$ indépendante de F.

Dans les hypothèses actuelles, les trois conditions suivantes sont donc équivalentes :

1° $P^{(n)}(E, F)$ converge uniformément quand E et F varient sur V vers une fonction limite indépendante de E.

2° $p(F) = P(F)$ sur V.

3° $\int_V p(F)\,d\tau_F = \int_V P(F)\,d\tau_F = 1$.

L'équivalence des trois propriétés ne subsiste plus dans le cas général comme va le montrer l'exemple suivant. Nous serons donc amené à ne retenir que l'une de ces conditions pour définir le cas régulier dans les hypothèses les plus générales

Exemple. Supposons le système matériel défini par un seul paramètre numérique et revenons aux notations de la p. 178. Considérons le cas particulier où $p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2}$. On aura bien

$$p(x, y) \geqq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\,dy = 1.$$

Or la relation d'itération fournit aisément l'expression

$$P^{(n)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} e^{\frac{-(x-y)^2}{n}}$$

que d'ailleurs on vérifie plus facilement encore.

Les bornes $P^{(n)}(y)$ et $p^{(n)}(y)$ quand x varie, de $P^{(n)}(x, y)$ sont évidemment

$$P^{(n)}(y) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \quad \text{et} \quad p^{(n)}(y) = 0$$

de sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} p^{(n)}(y)\,dy = 0$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} P^{(n)}(y)\,dy$ est infinie quel que soit n.

Pourtant $P^{(n)}(y)$ et $p^{(n)}(y)$ tendent vers la même limite $P(y) = p(y) = 0$ Et même la convergence de l'un et de l'autre est uniforme. Dans ce cas $P^{(n)}(x, y)$ converge vers une limite $p(y) = 0$ et cela uniformément quand x, y varient indépendamment. Et les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} P(y)\,dy$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} p(y)\,dy$ sont toutes deux finies et égales. Mais leur valeur commune n'est pas l'unité.

En revenant au cas d'un nombre quelconque de variables, on voit que cet exemple fournit l'apparent paradoxe suivant. Il peut arriver: que $P^{(n)}(E, F)$ converge vers une limite indépendante de E et cela uniformément quand E et F varient arbitrairement sur V, qu'en outre $P(F) = p(F)$, qu'enfin les intégrales $\int_V p(F)\,d\tau_F$ et $\int_V P(F)\,d\tau_F$ existent et soient égales et cependant que leur valeur commune soit $\neq 1$ c'est-à-dire que

$$\int_V P(F)\,d\tau_F \neq \lim_{n \to \infty} \int_V P^{(n)}(E, F)\,d\tau_F.$$

Naturellement cet ensemble de circonstances ne peut se présenter que si V est illimité.

Ainsi donc, dans le cas général les conditions 1°, 2°, ne sont plus équivalentes à 3° .

Or, si la condition 1° est celle qui semble fournir dans les applications la propriété la plus importante, son utilité serait bien diminuée si 3° n'était pas réalisée. Car, d'après 1° il y aurait bien une fonction $p(F)$ qui serait limite de densités de probabilités. Mais c'est seulement si 3° était réalisée que cette limite serait elle-même une densité de probabilité (bien entendu, on a toujours $p(F) \geq 0$, $P(F) \geq 0$).

Or, dans le cas général, nous allons voir que la condition 3° a pour conséquence des propriétés qui sont presque les mêmes que 1° et 2° et qui conservent tout l'essentiel de l'utilité de la condition 1° pour les applications. Cela nous permettra de définir le cas régulier — quand on n'impose à $p(E, F)$ et à V que les conditions (P), (T), (I) — comme celui où 3° est réalisé.

Commençons d'abord par une observation qui s'applique qu'on soit ou non dans la cas régulier.

Si $p(E, F)$ n'est pas borné, alors, comme on suppose toujours $\int_V P^{(n)}(E, F)\, d\tau_F = 1$, la fonction $p^{(n)}(F)$ qui est $\geqq 0$ et $\leqq P^{(n)}(E, F)$ sera aussi une fonction *sommable* sur V (c'est-à-dire dont l'intégrale sur V est déterminée et finie) telle que $\int_V p^{(n)}(F)\, d\tau_F \leqq 1$. Et, puisque $p^{(n)}(F)$ tend sans décroître vers $p(F)$ (finie ou non), $p(F)$ est aussi sommable sur V et $\int_V p(F)\, d\tau_F \leqq 1$ (III, p. 120). Par suite, non seulement $p(F)$ ne peut être infini partout, mais $p(F)$ ne peut être infini que sur un ensemble vide ou de mesure nulle.

Appelons mesure d'un ensemble S d'états F l'intégrale $\int_S d\tau_F$. Alors si S est l'ensemble des états F de V où $p(F) \geqq A > 0$, on aura $1 \geqq \int_V p(F)\, d\tau_F \geqq A \int_S d\tau_F$, d'où $\int_S d\tau_F \leqq \frac{1}{A}$. L'ensemble ω (qui est peut-être vide) où $p(F)$ est infini, est compris dans S. Sa mesure est donc inférieure à $\frac{1}{A}$, pour tout nombre positif A. Elle est donc nulle.

Définition du cas quasi-régulier. Nous avons dit qu'on appellerait cas régulier le cas où les deux intégrales $\int_V p(F)\, d\tau_F$ et $\int_V P(F)\, d\tau_F$ existent et sont égales à l'unité. Ce cas est compris dans le cas plus général que nous examinerons d'abord, sous le nom de cas quasi-régulier, où l'on suppose seulement que ces intégrales existent et ont la même valeur finie. D'ailleurs on a vu que $p(F)$ est toujours sommable sur V et que $\int_V p(F)\, d\tau_F \leqq 1$. Si donc on n'est pas dans le cas régulier la valeur commune de ces deux intégrales sera < 1.

On a dans le cas quasi-régulier

$$\int_V [P(F) - p(F)]\, d\tau_F = 0 \quad \text{avec} \quad P(F) - p(F) \geqq 0.$$

Or si une fonction $\theta(F)$ positive ou nulle sur V a une intégrale nulle sur V alors — qu'elle soit continue ou non, bornée ou non sur V — elle y est nulle « presque partout », c'est-à-dire que l'on a $\int_v d\tau_F = 0$, en désignant par v l'ensemble des états F de V où $\theta(F) \neq 0$.

Car, soit v_A l'ensemble des états F où $\theta(F) > A > 0$. On a:

$$0 = \int_V \theta(F)\, d\tau_F \geqq A \int_{v_A} d\tau_F \geqq 0 \qquad \text{d'où} \qquad \int_{v_A} d\tau_F = 0$$

la « mesure » $\int_{v_A} d\tau_F$ de v_A étant nulle quel que soit A, l'ensemble v qui est la réunion de v_1, $v\,{}^1/_2$, ... $v\,{}^1/_n$ ... aura aussi une mesure nulle.

Donc $P(F) - p(F)$ est nul presque partout sur V, c'est-à-dire, sauf peut-être sur un ensemble w_1 de mesure nulle. Comme $p(F)$ ne peut être infini que sur un ensemble w_2 de mesure nulle, on voit que $P(F)$ et $p(F)$ sont finis et égaux sur V sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle w formé de la réunion de w_1 et w_2. La relation

$$0 \leqq |P^{(n)}(E, F) - p(F)| \leqq P^{(n)}(F) - p^{(n)}(F)$$

montre alors que $P^{(n)}(E, F)$ converge vers une limite $p(F)$ indépendante de E — et cela uniformément pour F fixe quand E varie sur V — sauf peut-être quand F est sur w.

Ceci va nous permettre de donner une définition du cas quasi-régulier, moins condensée mais plus intuitive que celle qui consiste dans l'égalité de deux intégrales d'ailleurs non directement données.

Nous appellerons cas *quasi-régulier* le cas où la densité de probabilité $P^{(n)}(E, F)$ converge—sauf peut-être quand F appartient à un certain ensemble w de mesure nulle — vers une limite $\pi(F)$ finie et indépendante de E, la convergence ayant lieu uniformément pour F fixe quand E varie sur V (mais en cessant d'exiger l'égalité $\int_V \pi(F)\, d\tau_F = 1$).

Dans ce cas, pour F fixe, en dehors de w, et pour ε positif donné, il existe un entier N tel que

$$\pi(F) - \varepsilon < P^{(n)}(E, F) < \pi(F) + \varepsilon$$

pour $n > N$. D'où $\pi(F) - \varepsilon \leqq p^{(n)}(F) \leqq P^{(n)}(F) \leqq \pi(F) + \varepsilon$ pour $n > N$. Autrement dit, en dehors de w, $p^{(n)}(F)$ et $P^{(n)}(F)$ — qui tendent toujours vers $p(F)$ et $P(F)$ — tendent vers la limite finie $\pi(F)$. Donc en dehors de w, $p(F)$ et $P(F)$ sont finis et égaux. D'ailleurs, dans tous les cas, l'intégrale $\int_V p(F)\, d\tau_F$ existe et est $\leqq 1$. Donc $\int_V P(F)\, d\tau_F$ existe aussi et on a

$$\int_V P(F)\, d\tau_F = \int_V p(F)\, d\tau_F \leqq 1.$$

(Si l'on n'est pas dans le cas régulier la valeur commune de ces intégrales sera < 1). La réciproque a été établie plus haut et complète l'identité des deux définitions du cas quasi-régulier.

On peut même obtenir une sorte de convergence uniforme relativement non seulement à E mais encore à F. Pour cela, considérons une partie *bornée* arbitraire mais fixe W de V et, pour ε positif arbitraire, désignons par S_n l'ensemble des F de W où $P^{(n)}(F) - p^{(n)}(F) > \varepsilon$. L'ensemble S commun aux S_n étant évidemment compris dans w est de mesure nulle. D'autre part S_{n+1} appartient à S_n. On peut donc écrire

$$S_1 = S + (S_1 - S_2) + (S_2 - S_3) + (S_3 - S_4) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où, en posant $\int_G d\tau_F = \text{mes. } G$.

$$\text{mes. } S_1 = [\text{mes. } S_1 - \text{mes. } S_2] + [\text{mes. } S_2 - \text{mes. } S_3] + \ldots\ldots\ldots$$

Le second membre est donc une série convergente. Pour η positif donné, il existera un rang q tel que le reste de cette série de rang q soit $< \eta$. Donc mes. $S_q \leqq \eta$. Jusqu'ici ε et η étaient arbitraires. Donnons à ε et η une même valeur $\varepsilon_n = \frac{\omega}{2^n}$ en prenant successivement pour n les valeurs $1, 2, 3 \ldots$; alors q prendra une suite de valeurs $q_1, q_2 \ldots$ qu'on peut supposer croissantes et S_q deviendra successivement un des termes σ_1, $\sigma_2, \ldots$ d'une certaine suite d'ensembles. La mesure de σ_n sera inférieure à $\frac{\omega}{2^n}$ et celle de l'ensemble $T_n = \sigma_n + \sigma_{n+1} + \ldots\ldots$ sera inférieure à $\frac{\omega}{2^{n-1}}$. Comme σ_n est l'ensemble des F de W où $P^{(q_n)}(F) - p^{(q_n)}(F) > \varepsilon_n$, on voit que sur W, on aura en dehors de T_n

$$P^{(r)}(F) - p^{(r)}(F) \leqq \varepsilon_{n+s}$$

pour $r \geqq q_{n+s}$ et $s = 1, 2 \ldots$. Autrement dit $[P^{(r)}(F) - p^{(r)}(F)]$ converge uniformément vers zéro sur W en dehors d'un ensemble T_n de mesure aussi petite que l'on veut.

En résumé, dans le cas quasi-régulier, la densité de probabilité $P^{(n)}(E, F)$ converge, quand n croît, vers une limite $P(F)$ indépendante de E et cela uniformément quand d'une part E varie arbitrairement sur V, quand d'autre part et simultanément F varie arbitrairement sur une partie bornée quelconque W de V sauf peut-être sur une partie T de W dont on peut supposer la mesure aussi petite que l'on veut.

(Il doit être rappelé que, si, pour tout nombre positif θ, on peut supposer T de mesure inférieure à θ, il n'en résulte pas qu'on puisse supposer T de mesure nulle. Car, T varie avec θ ; or, en appelant t la partie commune à une infinité d'ensembles T il y aura bien dans W convergence en dehors de t mais non convergence nécessairement uniforme).

Les raisonnements ci-dessus et leur conclusion subsisteraient si on prenait pour W une partie de V qui soit illimitée pourvu qu'on suppose sa mesure finie.

Cas régulier. — Cherchons la condition pour que le cas quasi-régulier soit en même temps le cas régulier.

On a toujours[3])

$$\lim_{n \to \infty} \int_V p^{(n)}(F)\, dF = \int_V p(F)\, dF \leqq 1 = \int_V P^{(n)}(E, F)\, dF.$$

Et, dans le cas quasi-régulier

$$\int_V p(F)\, dF = \int_V P(F)\, dF. \tag{2}$$

Pour qu'on soit dans le cas régulier quand la condition (2) est remplie, il faut et il suffit

$$\lim_{n \to \infty} \int_V [P^{(n)}(E, F) - p^{(n)}(F)]\, dF = 0.$$

Soit alors ε un nombre positif arbitraire il y aura un entier q tel que, pour $n > q$ on ait

$$\int_V [P^{(n)}(E, F) - p^{(n)}(F)]\, dF < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour toute partie v de V on aura donc, si $n > q$

$$\int_v P^{(n)}(E, F)\, dF < \frac{\varepsilon}{2} + \int_v p^{(n)}(F)\, dF < \frac{\varepsilon}{2} + \int_v p(F)\, dF$$

et si v est une partie de V telle que $\int_v p(F)\, dF < \frac{\varepsilon}{2}$, on aura

$$\int_v P^{(n)}(E, F)\, dF < \varepsilon. \tag{3}$$

[3]) Pour abréger, nous remplacerons dans la suite la notation $d\tau_F$ par la notation plus simple dF.

La fonction $p(F)$ étant, en tout cas, sommable sur V, y est, comme on sait, (III, p. 109), « absolument continue » c'est-à-dire qu'à chaque nombre positif ω correspond un nombre η_0 tel que l'on ait $\int_v p(F)\,dF < \omega$ pour toute partie v de V de mesure $< \eta_0$. En prenant $\omega = \frac{\varepsilon}{2}$, on voit qu'on aura, pour $n > q$, $\int_v P^{(n)}(E, F)\,dF < \varepsilon$. D'ailleurs, chacune des fonctions $P^{(1)} \dots P^{(q)}$, étant sommable sur V, y sera absolument continue, c'est-à-dire qu'il existera des nombres $\eta_1 \dots \eta_q$ tels que, pour mes. $v < \eta_k$, on ait $\int_v P^{(k)}(E, F)\,dF < \varepsilon$. Finalement, si η est le plus petit des nombres $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_q$, on voit que, pour toute partie v de V de mesure $< \eta$, on aura $\int_v P^{(n)}(E, F)\,dF < \varepsilon$, quel que soit n—, ε, η, v étant indépendants de n. C'est ce que nous exprimerons en disant que l'absolue continuité des fonctions *de* F, $P^{(n)}(E, F)$ doit être, pour E fixe, *uniforme* quand *n varie.* Considérons maintenant deux cas. Supposons d'abord V borné ou plus généralement de *mesure finie.* Alors, cette condition nécessaire d'uniformité est suffisante. En effet, soit ε arbitraire > 0, il y a, par hypothèse, pour E fixe, un nombre $\eta > 0$ tel que pour toute partie v de V de mesure $< \eta$, on ait $\int_v P^{(n)}(E, F)\,dF < \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, d'après la p. 193, puisqu'on est déjà dans le cas quasi-régulier, il y a une partie T de V de mesure inférieure à η et telle que $P^{(n)}(E, F)$ converge uniformément vers $p(F)$ quand F varie hors de T. Dès lors, on a

$\int_T P^{(n)}(E, F)\,dF < \frac{\varepsilon}{2}$ et il existe un nombre q tel que

$\int_{V-T} |P^{(n)}(E, F) - p(F)|\,dF < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n > q$. D'où

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_V p(F)\,dF \geq \int_{V-T} p(F)\,dF > \int_{V-T} P^{(n)}(E, F)\,dF - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= 1 - \int_T P^{(n)}(E, F)\,dF - \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \varepsilon\,. \end{aligned} \right.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a donc

$$1 - \varepsilon < \int_V p(F)\,dF = \int P(F)\,dF \leq 1$$

on est bien dans le cas régulier.

On observera que si la condition d'uniformité de l'absolue continuité de $\int\limits_V P^{(n)}(E, F)\, dF$ a été prouvée nécessaire pour chaque état E fixe de V, la démonstration qu'elle est suffisante suppose simplement qu'elle ait lieu pour au moins un état E de V.

Si V n'est pas de mesure finie, cette uniformité n'est plus suffisante comme le montrerait l'exemple de la p. 189. On doit compléter par une autre, cette condition d'uniformité de la continuité absolue des intégrales $\int\limits_V P^{(n)}(E, F)\, dF$.

Pour cela, rappelons que, par définition de l'intégrale d'une fonction $\Phi(F)$ sur un ensemble non borné V

$$\int_V \Phi(F)\, dF = \lim_{s \to \infty} \int_{W_s} \Phi(F)\, dF$$

où $W_1, W_2, \ldots W_s, \ldots$ est une suite de parties bornées de V telles que W_s appartienne à W_{s+1} et que V soit identique à la réunion des W_s. Posons $v_s = V - W_s$. Dès lors, pour chaque entier n, il existe un entier s_n, tel que $\int\limits_{v_s} P^{(n)}(E, F)\, dF < \varepsilon$ pour $s \geqq s_n$ et un entier s' tel que $\int\limits_{v_s} p(F)\, dF < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $s \geqq s'$. Or, si l'on est dans le cas régulier, on aura en vertu de l'inégalité (3)

$$\int_{v_s} P^{(n)}(E, F)\, dF < \varepsilon$$

pour $s \geqq s'$ et $n > q$, q étant indépendant de s. Appelons alors s'' le plus grand des nombres $s_1, \ldots s_q, s'$, on aura

$$\int_{v_{s''}} P^{(n)}(E, F)\, dF < \varepsilon$$

pour toute valeur entière de n, s'' étant indépendant de n. D'où

$$\int_V P^{(n)}(E, F)\, dF - \int_{W_s} P^{(n)}(E, F)\, dF < \varepsilon$$

pour $s > s''$, quel que soit l'entier arbitraire n. C'est ce que nous exprimerons en disant que, dans le cas régulier, la convergence, exprimée par la formule

$$\lim_{s \to \infty} \left[\int_V P^{(n)}(E, F)\, dF - \int_{W_s} P^{(n)}(E, F)\, dF \right] = 0$$

des intégrales à limites infinies $\int_V P^{(n)}(E, F)\, dF$, est uniforme quand n varie.

Réciproquement, supposons — toujours dans le cas quasi-régulier — que non seulement l'absolue continuité mais la convergence de chaque intégrale à limites infinies $\int_V P^{(n)}(E, F)\, dF$ soient uniformes quand n varie, et ceci au moins pour un état E fixé. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existera une partie bornée W de V telle qu'en posant $v = V - W$, on ait à la fois

$$\int_v p(F)\, dF < \varepsilon, \quad \int_v P^{(n)}(E, F) < \varepsilon$$

et ceci quel que soit n. Or, en vertu de l'uniformité de l'absolue continuité de $\int_V P^{(n)}(E, F)\, dF$ et, par suite, de celle de $\int_W P^{(n)}(E, F)\, dF$, le raisonnement fait plus haut dans le cas où V est borné conduira à remplacer dans le cas actuel les inégalités (4) par

$$\int_W p(F)\, dF > \int_W P^{(n)}(E, F) dF - \varepsilon = 1 - \int_v P^{(n)}(E, F)\, dF - \varepsilon > 1 - 2\varepsilon.$$

On a donc pour tout $\varepsilon > 0$

$$1 \geqq \int_V p(F)\, dF > 1 - 2\varepsilon$$

et on est bien encore dans le cas régulier.

Une condition suffisante plus simple. Il y a un cas particulier où on peut obtenir une condition suffisante plus simple en utilisant un théorème (III, p. 120) d'après lequel, si les fonctions d'une suite non croissante de fonctions $\Phi^{(n)}(F) \geqq 0$ sont sommables sur V[4]), il en est de même de leur limite $\Phi(F)$ et on a

$$(5) \qquad \int_V \Phi(F)\, dF = \lim_{n \to \infty} \int_V \Phi^{(n)}(F)\, dF.$$

Les fonctions $P^{(n)}(F)$ majorent les fonctions $P^{(n)}(E, F)$, sommables quand F varient sur V. Il n'en résulte pas que les $P^{(n)}(F)$ soient sommables. L'intégrale $\int_V P^{(n)}(F)\, dF$ peut être infinie, soit parce que $P^{(n)}(F)$ est infinie sur un ensemble de mesure non nulle, soit même quand $P^{(n)}(F)$ est finie et même borné, si V est non borné, comme le montre l'exemple de la p. 189.

Par contre, si l'une des fonctions $P^{(n)}(F)$ est sommable sur V, il en sera de même de $P^{(n+1)}(F)$, $P^{(n+2)}(F)\ldots$ et l'on aura une relation analogue à (5). D'ailleurs, on aura aussi dans ce cas

$$\int_V P^{(n)}(F)\, dF \geqq \int_V P^{(n)}(E, F)\, dF = 1$$

d'où $\int_V P(F)\, dF \geqq 1$.

En résumé, qu'on soit ou non dans le cas quasi-régulier, s'il existe une fonction $\varphi(F)$ sommable sur V, qui majore — quels que soient E et F sur V — l'une au moins des fonctions $P^{(n)}(E, F)$ — et, par suite, si l'une au moins des $P^{(n)}(F)$ est sommable sur V — alors $P(F)$ est sommable sur V et on a

$$\int_V P(F)\, dF \geqq 1.$$

Quand une telle fonction $\varphi(F)$ n'existe pas, deux circonstances aussi opposées que possible peuvent se présenter: l'intégrale $\int_V P(F)\, dF$ peut être infinie, ou au contraire < 1 et même nulle comme dans l'exemple de la page 189.

Quand la fonction $\varphi(F)$ existe, on a à la fois

$$\int_V p(F)\, dF \leqq 1 \leqq \int_V P(F)\, dF.$$

---

[4]) Nous entendons ici le mot sommable pour intégrable au sens de M. Lebesgue (III p. 107). D'ailleurs, dans tout ce mémoire, nous supposons mesurables au sens de M. Lebesgue toutes les fonctions employées.

Si donc on se trouve dans le cas quasi-régulier ces deux intégrales sont égales et par suite sont égales à l'unité. Nous obtenons ainsi la condition suffisante plus simple annoncée:

Pour que le cas quasi-régulier se trouve être en même temps le cas régulier, il suffit qu'il existe une fonction $\varphi(F)$ sommable sur V qui majore quels que soient E et F sur V, mais pour un même rang n, l'une au moins des densités itérées $P^{(n)}(E, F)$.

Un cas simple où l'existence de la fonction φ est assurée est celui où V est borné (ou de mesure finie) et où, en outre $p(E, F)$, — ou l'une au moins des $P^{(n)}(E, F)$ — a une borne supérieure finie quand E, F varient indépendamment sur V. Plus particulièrement encore, c'est ce qui aura lieu quand, V étant borné, $p(E, F)$ — ou l'une au moins des $P^{(n)}(E, F)$ — est continue quand E, F varient sur V.

Une autre simplification à déduire de l'existence de la fonction φ concerne le mode de convergence de $P^{(n)}(E, F)$ vers $P(F)$. Nous avons vu que dans le cas quasi-régulier cette convergence qui a lieu presque partout est uniforme *sur chaque partie bornée W* de V, quand on excepte de W un ensemble peut-être vide mais qu'on peut supposer de mesure aussi petite que l'on veut. *Lorsqu'il existe une fonction $\varphi(F)$ sommable sur V et majorant l'une des fonctions $P^{(n)}(E, F)$, le même résultat est valable en prenant pour W toute la région V, que cette dernière soit bornée ou non.*

En effet, dans ce cas, pour n assez grand ($n > q$), $P^{(n)}(F)$ est sommable sur V et l'on a

$$0 = \lim_{n \to \infty} \int_V [P^{(n)}(F) - p^{(n)}(F)]\, dF.$$

Si $A_\varepsilon^{(n)}$ est l'ensemble des F de V où $P^{(n)}(F) - p^{(n)}(F) > \varepsilon$ on a

$$\int_V [P^{(n)}(F) - p^{(n)}(F)]\, dF > \varepsilon \text{ mes. } A_\varepsilon^{(n)} \geqq 0$$

donc mes. $A_\varepsilon^{(n)}$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. Soit alors ω un nombre positif arbitraire; pour $\varepsilon = \frac{1}{q}$ il y a un nombre $n_q > q$ tel que mes. $A_\varepsilon^{(n)} < \frac{\omega}{2^q}$ pour $n \geqq n_q$. Soit enfin A la réunion des ensembles $A_\varepsilon^{(n)}$ pour $\varepsilon = \frac{1}{q}$,

$n = n_q$, $q = 1, 2 \ldots$. Sa mesure est $< \sum_q \frac{\omega}{2^q} = \omega$ et l'on aura, en dehors de A

$$| P^{(n)}(E, F) - p(F) | \leqq P^{(n)}(F) - p^{(n)}(F) \leqq \frac{1}{q}$$

pour $n = n_q$ et par suite pour $n \geqq n_q$. Dès lors $P^{(n)}(E, F)$ converge vers $p(F)$ uniformément quand E est arbitraire sur V et quand F varie sur la région obtenue en enlevant de V un ensemble A, peut-être vide, mais en tout cas de mesure inférieure à un nombre positif ω choisi arbitrairement.

Conditions nécessaires pour le cas quasi-régulier. Cherchons à déterminer des conditions nécessaires pour que $P(F)$ et $p(F)$ soient finis et égaux presque partout sur V.

I. *Condition* (A). Deux cas sont à distinguer: 1° $P(F)$ est nul presque partout sur V; alors il en est de même pour $p(F)$ et aucune condition nécessaire n'est à envisager. 2° $P(F)$ n'est pas presque partout nul. En désignant par v_ε l'ensemble sur lequel $P(F) > \varepsilon$, nous sommes dans le cas où v_0 est de mesure non nulle. Or v_0 étant formé de la réunion des ensembles v_ε où $\varepsilon > 0$ serait de mesure nulle s'il en était ainsi de tous ces v_ε. Dès lors: il existe au moins une valeur positive ε telle que v_ε soit de mesure positive.

Or, on a vu (p. 193) que dans le cas quasi-régulier pour toute partie W bornée de V et tout nombre $\omega > 0$, $P(F) - p^{(n)}(F)$ converge uniformément vers zéro sur W sauf, peut-être, sur un ensemble T de mesure $< \omega$. En particulier, il existe un nombre ν tel que pour $n \geqq \nu$

$$p^{(n)}(F) > P(F) - \frac{\varepsilon}{2}$$

sur $W - T$. Prenons, en particulier, pour W l'ensemble v_ε ou une partie de v_ε qui soit bornée et de mesure positive et pour ω la moitié de la mesure positive de v_ε ou de cette partie: alors l'ensemble $w = W - T$ sera aussi de mesure positive et l'on aura sur w

$$p^{(n)}(F) > \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad n > \nu.$$

Autrement dit, il existe dans ce cas une partie w de V qui est bornée et de mesure positive et telle que, à partir d'un certain rang ν, la fonction $P^{(n)}(E, F)$ reste, quels que soient E sur V, F sur w, supérieure à un nombre positif indépendant de E, de F et de n.

En particulier, il existe au moins un rang ν tel que $p^{(\nu)}(F)$ ne soit pas nul presque partout. On dira, dans ce cas que la condition (A) est réalisée.

Cette condition sera plus commode à employer parmi les conditions suffisantes, que la précédente. Mais elle lui est équivalente. Car, si $p^{(\nu)}(F) > 0$ sur un ensemble de mesure positive, alors il y a, au moins un nombre $\eta > 0$ tel que la mesure de l'ensemble où $p^{(\nu)}(F) > \eta$ soit positive. Dès lors, sur ce même ensemble on aura, pour $n \geqq \nu$, $p^{(n)}(F) > \eta$ d'où $P^{(n)}(E, F) > \eta$.

II. *Condition nécessaire* (B). Une autre condition nécessaire pour le cas quasi-régulier est évidemment que $P(F)$ ne puisse être infini que sur un ensemble de mesure nulle, puisqu'il en est ainsi pour la fonction sommable $p(F)$, et que $p(F)$ et $P(F)$ sont finis et égaux presque partout.

Simplifications. Si l'une au moins des fonctions $P^{(n)}(E, F)$, soit $P^{(r)}(E, F)$, est uniformément continue quand E et F varient sur V, la condition (A) se simplifie.

Si elle a lieu, il existe au moins un entier ν et *un* état L tel que $p^{(\nu)}(L) > 0$. Réciproquement, s'il en est ainsi, on peut d'abord supposer $\nu > r$ puisque $p^{(n)}(L)$ est une fonction non décroissante de n. Alors, comme on a vu (p. 183) que $p^{(\nu)}(F)$ est continue, il existe au moins un nombre $\eta > 0$, tel que $p^{(\nu)}(F) > \frac{1}{2} p^{(\nu)}(L) > 0$ pour $LF < \eta$. On a supposé (p. 180) le domaine V, tel qu'il existe au moins une sphère v composée d'états de V tous à distance de L inférieure à η. Dès lors $p^{(\nu)}(F) > 0$ sur un ensemble v de mesure positive: (A) est réalisée.

D'autre part, si l'on suppose, en outre, que $P^{(r)}(E, F)$ est borné (ce qui aura lieu nécessairement si V est fini) alors $P^{(r)}(F)$ et par suite $P(F)$ sont bornés: (B) sera vérifiée d'elle-même.

On observera que ces deux simplifications subsistent si l'on suppose simplement que $P^{(r)}(E, F)$ représente pour les situations diverses de E, une famille de fonctions de F « également continues » sur V.

Conditions suffisantes pour le cas quasi-régulier. Considérons un état F tel que $P(F)$ soit fini et trois états arbitraires E, E_1, G. Pour n assez grand ($n - 1 \geqq m$), $P^{(n-1)}(F)$ sera aussi fini et par suite aussi $P^{(n-1)}(G, F)$, $P^{(n)}(F)$, $P^{(n)}(E, F)$, $P^{(n)}(E_1, F)$. Etendons avec M. Hostinsky

(I, p. 44, I^bis, p. 21) au cas actuel la méthode de Markoff. Formons la différence

$$(6)\quad P^{(n)}(E, F) - P^{(n)}(E_1, F) = \int_V [p(E, G) - p(E_1, G)] P^{(n-1)}(G, F)\, dG.$$

Soient V', V'' les deux parties de V sur lesquelles le crochet est respectivement $\geqq 0$, < 0. En posant

$$\theta = \int_{V'} [p(E, G) - p(E_1, G)]\, dG = \int_{V'} K\, dG$$

$$\theta' = \int_{V''} [p(E_1, G) - p(E, G)]\, dG = \int_{V''} K\, dG$$

où K est la valeur absolue du crochet, on aura $\theta \geqq 0$ et $\theta - \theta' = \int_V p(E, G)\, dG - \int_V p(E_1, G)\, dG = 1 - 1 = 0$, d'où

$$\theta' = \theta \geqq 0.$$

Supposons d'abord $\theta > 0$. Alors on pourra écrire

$$P^{(n)}(E, F) - P^{(n)}(E_1, F) =$$

$$\theta \left\{ \frac{\int_{V'} K P^{(n-1)}(G, F)\, dG}{\int_{V'} K\, dG} - \frac{\int_{V''} K P^{(n-1)}(G, F)\, dG}{\int_{V''} K\, dG} \right\}$$

$$\leqq \theta \left[P^{(n-1)}(F) - p^{(n-1)} F \right]$$

L'inégalité

$$(7)\qquad P^{(n)}(E, F) - P^{(n)}(E_1, F) \leqq \theta \left[P^{(n-1)}(F) - p^{(n-1)}(F) \right]$$

qui vient d'être établie pour $\theta \neq 0$, reste d'ailleurs exacte pour $\theta = 0$, car, dans ce cas, K serait nul identiquement ou presque partout nul sur V et alors en vertu de l'égalité (6) le premier membre de (7) serait aussi nul.

Dans cette inégalité, θ est compris entre 0 et 1, car

$$0 \leqq \theta \leqq \int_{V'} p(E, G)\, dG \leqq \int_V p(E, G)\, dG = 1.$$

Seulement, d'après sa définition, θ dépend de E et de E_1. Mais on a

$$\theta = \int_{V'} p(E, G)\, dG - \int_{V'} p(E_1, G)\, dG$$

$$= \int_{V} p(E, G)\, dG - \int_{V''} p(E, G)\, dG - \int_{V'} p(E_1, G)\, dG.$$

Or, sur V' comme sur V'', $p(E, G) \geqq p^{(1)}(G)$; $p(E_1, G) \geqq p^{(1)}(G)$.

Donc
$$\theta \leqq 1 - \int_{V} p^{(1)}(G)\, dG = \theta_1.$$

Le nombre θ_1 est évidemment $\leqq 0$, $\leqq 1$ et ne dépend ni de E, ni de E_1. Comme on a

$$P^{(n)}(E, F) - P^{(n)}(E_1, F) \leqq \theta_1 \left[P^{(n-1)}(F) - p^{(n-1)}(F)\right]$$

on voit qu'on aura pour $n > m$

$$(8) \qquad P^{(n)}(F) - p^{(n)}(F) \leqq \theta_1 \left[P^{(n-1)}(F) - p^{(n-1)}(F)\right]$$

où θ_1 est indépendant de n (pour $n > m$) et de F, avec $0 \leqq \theta_1 \leqq 1$. Seulement si $\theta_1 = 1$, on ne retrouverait qu'une inégalité déjà obtenue. Le cas intéressant est donc celui où $\theta_1 < 1$, c'est-à-dire où $p^{(1)}(G)$ n'est pas presque partout nul sur V. C'est celui où la condition (A) se trouve vérifiée quand on suppose, comme nous allons le faire d'abord, que dans son énoncé de la p. 201, l'entier ν est égal à l'unité. Dans ce cas, $\theta_1 < 1$ et, en vertu de (8), on aura

$$P^{(n)}(F) - p^{(n)}(F) \leqq \theta_1^{n-m} \left[P^{(m)}(F) - p^{(m)}(F)\right].$$

Revenons maintenant à la condition (A), mais sous sa forme générale: supposons qu'il existe un rang ν pour lequel $p^{(\nu)}(G)$ ne soit pas presque partout nul sur V. On pourra recommencer le raisonnement précédent, mais en partant de l'égalité

$$P^{(m+s\nu)}(E, F) - P^{(m+s\nu)}(E_1, F) =$$
$$\int_{V} \left[P^{(\nu)}(E, G) - P^{(\nu)}(E_1, G)\right] P^{(m+(s-1)\nu)}(G, F)\, dG.$$

On trouvera alors

$$P^{(m+s\nu)}(F) - p^{(m+s\nu)}(F) \leqq (\theta_\nu)^s \left[P^{(m)}(F) - p^{(m)}(F)\right]$$

avec

$$0 \leqq \theta_\nu = 1 - \int_V p^{(\nu)}(G)\, dG < 1.$$

Pour tout entier $n \geqq m$, il y a un entier $s \geqq 0$ tel que

$$m + s\nu \leqq n < m + (s+1)\nu$$

d'où

$$P^{(n)}(F) - p^{(n)}(F) \leqq P^{(m+s\nu)}(F) - p^{(m+s\nu)}(F)$$

et

$$(\theta_\nu)^s < \left[(\theta_\nu)^{\frac{1}{\nu}}\right]^{n-m-\nu}.$$

En posant $q_\nu = (\theta_\nu)^{\frac{1}{\nu}}$, on aura

(9) $$\left| P^{(n)}(E, F) - p(F) \right| \leqq P^{(n)}(F) - p^{(n)}(F) \leqq (q_\nu)^n B(F)$$

avec

$$B(F) = \frac{P^{(m)}(F) - p^{(m)}(F)}{(q_\nu)^{m+\nu}}.$$

Comme q_ν est indépendant de F et de n et inférieur à l'unité, on voit que $P^{(n)}(F) - p^{(n)}(F)$ tend vers zéro. Finalement, quand la condition (A) est réalisée, on a $P(F) = p(F)$ pour tout état F où $P(F)$ est fini. D'ailleurs $p(F) \geqq p^{(\nu)}(F)$, donc, $P(F)$ ne sera pas, dans ce cas, presque partout nul.

Faisons maintenant entrer en ligne de compte la seconde condition nécessaire, la condition (B) de la p. 201 ; nous aurons alors un ensemble à la fois nécessaire et suffisant :

Pour que — à l'exception tout au plus d'un ensemble u de mesure nulle d'états F de V — $P^{(n)}(E, F)$ converge — uniformément pour F fixe quand E varie sur G — vers une limite finie indépendante de l'état initial E et non presque partout nulle sur V, il faut et il suffit : I qu'il existe au moins un rang ν tel que $p^{(\nu)}(F)$ ne soit pas presque partout nul sur V, II que $P(F)$ soit fini presque partout sur V.

Observons aussi que si la condition (A) n'est pas réalisée, tous les $p^{(m)}(G)$ seront nuls presque partout. La fonction $p(G)$ sera donc nulle sauf, peut-être, sur un ensemble dénombrable α d'ensembles de mesure nulle; α étant alors de mesure nulle, $p(G)$ sera nul presque partout sur V. Nous pouvons donc dire. Pour qu'on soit dans le cas quasi-régulier:

Ou bien la condition (A) est réalisée et alors il faut et il suffit que $P(F)$ soit fini presque partout sur V.

Ou bien (A) n'étant pas réalisée et, par suite, $p(G)$ étant nul presque partout sur V, il faut et il suffit que $P(F)$ soit nul presque partout sur V. Dans ce dernier cas $\int_V P(F)\,dF = 0$. On sera certainement dans le cas quasi-régulier proprement dit, c'est-à-dire sans être dans le cas régulier [5]).

Nature de la convergence. Nous avons déjà vu, p. 193 que, dans le cas quasi-régulier, la convergence est uniforme sur toute partie W bornée de V, après avoir retranché de W un ensemble convenable dont on peut supposer la mesure aussi petite que l'on veut.

L'inégalité (9) permet de préciser un peu plus la nature de la convergence. Elle montre d'abord qu'en tout état F où $P(F)$ est fini, c'est-à-dire presque partout sur V, la convergence de $P^{(n)}(E, F)$ vers $P(F)$ est, à partir d'un certain rang, au moins aussi rapide que celle des termes d'une *progression géométrique* dont les termes dépendent de F, mais dont la raison q_ν $(0 < q_\nu < 1)$ *est indépendante de E et de F.*

En limitant encore le champ de convergence, on peut même s'arranger pour que les termes de la progression soient eux-mêmes indépendants de F comme de E (ce qui, en même temps entraînera l'uniformité de la convergence sur ce nouveau champ).

C'est d'abord ce qui aura lieu sur chaque ensemble $V_r^{(m)}$ en appelant ainsi la partie de V où l'on a $P^{(m)}(F) < r$. Car on a sur $V_r^{(m)}$ $|P^{(n)}(E, F) - P(F)| \leq (q_\nu)^n \dfrac{r}{(q_\nu)^m \theta_\nu}$ pour $n \geq m$. C'est, par suite, aussi ce qui aura lieu sur l'ensemble V_s formé des ensembles $V_r^{(m)}$ en nombre fini, pour lesquels $r + m = s$. Car en appelant λ_s le plus grand des nombres $\dfrac{r}{(q_\nu)^m \theta_\nu}$ où $r + m = s$ on aura sur V_s, pour $n > s$

$$|P^{(n)}(E, F) - P(F)| < \lambda_s (q_\nu)^n.$$

---

5) Il serait d'ailleurs intéressant de chercher si l'on peut effectivement former l'exemple d'un cas quasi-régulier où $0 < \int_V P(F)\,dF < 1$.

Or, si w est encore l'ensemble — peut-être vide, mais de mesure nulle — où $P(F)$ et $p(F)$ ne sont pas finis et égaux, il est clair que tout état de $V-w$ appartient à l'un des V_s et que V_s appartient à V_{s+1}.

Ainsi, on a formé une suite non décroissante d'ensembles V_s, remplissant V, à un ensemble de mesure nulle près et sur chacun, V_s, desquels, la suite $|P^{(n)}(E,F) - P(F)|$ est majorée à partir du rang s par une progression géométrique indépendante non seulement de E mais de F. Cette progression change avec V_s, mais sa raison reste la même.

Dans le cas où V est borné, l'égalité symbolique

$$V = w + (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots$$

peut aussi s'entendre en mesure, de sorte que $V - V_s$ est de mesure aussi petite que l'on veut avec $\frac{1}{s}$. Si V n'est pas borné, alors pour toute partie bornée W de V, c'est la partie de $V - V_s$ qui appartient à W qui est de mesure aussi petite que l'on veut, pour s assez grand.

Précisions. On peut même préciser dans des cas particulièrement importants dans les applications. Supposons d'abord qu'il existe un rang m tel que $P^{(m)}(F)$ soit borné sur V. La théorie des équations intégrales (II, p. 344, 357, 362) fournit des exemples de noyaux $p(E,F)$ discontinus, non bornés, mais tels que, pour n assez grand, $n = m$, $P^{(m)}(E,F)$ ait une borne supérieure finie μ quand E, F varient indépendamment sur V. Dans ce cas $P^{(m)}(F)$ sera borné sur V et même on aura $P^{(n)}(F) \leqq \mu$ pour $n \geqq m$. Alors $P(F)$ sera nécessairement borné aussi et la condition (B) sera remplie d'elle-même. De plus, si μ est la borne de $P^{(m)}(F)$ sur V, il résultera de la première condition, qu'on a d'après la formule (9)

$$0 \leqq |P^{(n)}(E,F) - P(F)| \leqq (q_\nu)^n \frac{\mu}{(q_\nu)^m \theta_\nu}.$$

Dès lors: si l'une au moins des probabilités itérées $P^{(n)}(E,F)$ *a une borne supérieure finie quand E, F varient indépendamment sur V, la condition nécessaire et suffisante pour que $P^{(n)}(E,F)$ converge — quel que soit F sur V, et cela uniformément pour F fixe quand E varie sur V — vers une limite $P(F)$ indépendante de l'état initial E et qui ne soit pas presque partout nulle sur V est qu'il existe au moins un rang ν pour lequel $p^{(\nu)}(F)$ ne soit pas presque partout nul sur V.*

Et dans ce cas, non seulement la convergence est uniforme pour F fixe, mais: 1° elle est uniforme quand E, F varient indépendamment sur V, 2° la convergence de la suite des termes $|P^{(n)}(E, F) - P(F)|$ vers zéro est au moins aussi rapide que celle des termes d'une certaine progression géométrique convergente indépendante de E et de F.

D'autre part, *si l'une au moins des probabilités itérées $P^{(n)}(E, F)$ est uniformément continue quand E, F varient sur V, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas quasi-régulier est*

ou bien que $P(F)$ soit nul presque partout sur V
ou bien que 1° $P(F)$ soit fini partout sur V
2° qu'il existe un rang ν et un état L tel que $p^{(\nu)}(L) \neq 0$.

Il faut que $P(F)$ soit fini presque partout sur V mais on a vu p. 184, qu'alors $P(F)$ est nécessairement fini partout sur V. Dans ces conditions $P(F)$ est uniformément continu sur V et $P^{(n)}(E, F)$ converge vers $P(F)$ quels que soient E et F sur V. La convergence est uniforme quand E varie sur V et F sur une partie bornée quelconque de V.

Ces énoncés se simplifient encore quand on les combine:

Si l'une au moins des probabilités itérées $P^{(n)}(E, F)$ est bornée et uniformément continue quand E, F varient sur V, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas quasi-régulier est ou bien que $P(F)$ soit nul presque partout sur V ou bien qu'il existe un rang ν et un état L tel que $p^{(\nu)}(L) \neq 0$.

Et dans ce cas $P^{(n)}(E, F)$ converge uniformément quand E, F varient sur V, vers la limite $P(F)$ (qui est continue). Dans les deux cas que nous allons envisager maintenant, le cas quasi-régulier ne se distingue pas du cas régulier.

Supposons que l'une au moins des $P^{(n)}(F)$ soit sommable sur V. Alors $P^{(n)}(F)$ sera fini presque partout sur V; il en sera donc de même de $P(F)$ et ici encore la condition (B) sera vérifiée d'elle-même. De plus, nous avons vu p. 198 que dans ce cas $\int_V P(F)\, dF$ est fini et $\geqq 1$.
Ainsi dans ce cas $P(F)$ ne peut être presque partout nul. Alors, pour qu'on soit dans le cas quasi-régulier, il faut que la condition (A) soit réalisée. Mais alors $1 \leqq \int_V P(F)\, dF = \int_V p(F)\, dF \leqq 1$ donc $\int_V P(F)\, dF = 1$; on sera dans le cas régulier.

En résumé: 1° *le cas quasi-régulier ne peut se présenter sans être en même temps régulier que si aucune des fonctions $P^{(n)}(F)$ n'est sommable sur V et*

2° *lorsque l'une au moins des fonctions* $P^{(n)}(E, F)$ *est majorée par une fonction de* F *sommable sur* V, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas régulier est que l'une au moins des* $p^{(n)}(F)$ *ne soit pas presque partout nulle.* De plus, dans ce même cas, si cette condition est réalisée, nous avons vu (p. 193) que $P^{(n)}(E, F)$ converge uniformément vers $P(F)$ quand E variant arbitrairement sur V, F varie sur V, *sauf, peut-être,* sur un certain ensemble indépendant de E et dont on peut rendre la mesure aussi petite qu'on veut.

Lorsque V est borné ou de mesure finie, si l'un au moins des $P^{(n)}(F)$, par exemple $P^{(m)}(F)$, est borné sur V, $P^{(m)}(F)$ sera aussi sommable sur V et on pourra appliquer à la fois les propriétés de deux des cas qui viennent d'être examinés:

Si l'une au moins dcs fonctions $P^{(n)}(E, F)$ *a une borne supérieure finie quand* E, F *varient sur* V *et si* V *est borné ou de mesure finie, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas régulier est que l'une au moins des fonctions* $p^{(n)}(G)$ *ne soit pas nulle sur* V *bresque partout. De plus, dans ce cas, 1°* $P^{(n)}(E, F)$ *converge uniformément vers sa ltmite* $P(F)$ *lorsque* E, F *varient arbitrairement sur tout l'ensemble* V; *2° la série* $\sum_n |P^{(n)}(E, F) - P(F)|$ *est majorée par une certaine brogression géométrique convergente indépendante de* E *et de* F.

Enfin, l'énoncé suivant s'obtient comme cas particulier de tous les précédents:

Si $p(E, F)$ *ou si plus généralement l'une* $P^{(m)}(E, F)$ *des probabilités itérées est continue sur un domaiue* V *borné alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas régulier est que, pour au moins un état* L *de* V *et un rang* $\nu \geqq m$, $P^{(\nu)}(E, L)$ *ne soit nul pour aucun état* E *de* V.

Dans ce cas, les probabilités itérées $P^{(n)}(E, F)$ *sont aussi continues à partir d'un certain rang, elles convergent uniformément quand* E, F *varient sur* V *vers une limite* $P(F)$ *continue sur* V *et la convergence de* $|P^{(n)}(E, F) - P(F)|$ *vers zéro est au moins aussi rapide que celle des termes d'une certaine progression géométrique indépendante de* E *et de* F.

Dans ce cas, il y a correspondance absolue entre la condition trouvée ici et celle qu'on obtient dans le cas plus simple des suites discontinues d'états (IV, p. p. 2, 3).

Cas positivement régulier. Par analogie avec le cas d'un nombre fini d'états possibles, il serait, à première vue, naturel, d'appeler ainsi le cas régulier où $p(F)$ serait partout $\neq 0$ sur V. Toutefois $p(F)$ n'est pas une probabilité, mais une densité de probabilité. Il semblerait donc plus indiqué d'imposer la condition que la probabilité $\int_v p(F)\,dF$ soit toujours différente de zéro. Comme cette intégrale est, quel que soit $p(F)$, nulle quand v est de mesure nulle, on est amené à une réserve, à supposer seulement que $\int_v p(F)\,dF > 0$ pour toute partie v de V de mesure positive. Pour cela, il faut et il suffit que $p(F)$ soit presque partout positif. Ceci sera d'ailleurs d'accord avec l'équivalence observée dans les questions précédentes entre les fonctions égales presque partout.

On pourra définir finalement cas *presque positivement* (quasi) *régulier*, tout cas (quasi) régulier où $p(F)$ est positif presque partout sur V. Commençons par le cas presque positivement quasi-régulier, c'est-à-dire celui où $p(F)$ et $P(F)$ sont presque partout à la fois finis, positifs et égaux. L'ensemble (vide ou non) β où $p(F) = 0$ doit être de mesure nulle. Or c'est évidemment l'ensemble commun aux ensembles β_n, β_n étant l'ensemble où $p^{(n)}(F) = 0$. I. Si donc V est de mesure finie la limite de la mesure de β_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. II. Sinon pour toute partie W de mesure finie de V, la mesure de la partie commune à W et β_n tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. Réciproquement; si (I) a lieu, β est de mesure nulle; si II a lieu, la partie commune à β et W est de mesure nulle quel que soit le choix de W. Par conséquent, β est encore de mesure nulle. De plus, la condition (A) est alors nécessairement remplie. Nous arrivons donc à la conclusion suivante.

Pour que $P^{(n)}(E, F)$ converge uniformément quand, F étant fixe, E varie sur V, vers une limite finie, indépendante de E et positive, sauf, peut-être, quand F appartient à un certain ensemble de mesure nulle, il faut et il suffit: 1° que pour tout ε positif, il existe un rang ν tel que $p^{(\nu)}(F) > 0$ sauf peut-être sur un ensemble de mesure $< \varepsilon$; ou si V est de mesure infinie que ceci ait lieu pour toute partie de V de mesure finie; 2° que $P(F)$ soit fini presque partout.

Si l'une des fonctions $P^{(n)}(F)$ est sommable sur V, ce qui précède sera aussi la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas presque positivement régulier.

On peut aussi donner la condition suffisante suivante:

Pour qu'on soit dans le cas positivement régulier, il suffit que, V étant borné ou de mesure finie, l'une au moins des fonctions $P^{(n)}(E, F)$ ait, lorsque E, F varient indépendamment sur V une borne inférieure positive et une borne supérieure finie. En effet, dans ce cas, $p^{(n)}(F)$ est, pour au moins une valeur de n, partout positif donc la condition (A) est réalisée et $p(F)$ est partout positif. D'autre part, les fonctions $P^{(n)}(F)$ sont bornées à partir d'un certain rang et par suite sommables.

La condition que V soit de mesure finie ne peut être évitée ici: $\int_V P^{(n)}(E, F)\, dF$ ne pourrait être égale à l'unité si $P^{(n)}(E, F)$ ayant une borne inférieure positive, la mesure de V était infinie. On peut cependant, en modifiant la condition, la rendre applicable au cas de V non borné:

On sera certainement dans le cas positivement régulier, si l'une des fonctions $P^{(n)}(F)$ est sommable sur V et si, en outre, l'une des fonctions $P^{(n)}(E, F)$ a une borne inférieure positive lorsque E variant sur V, F varie sur toute partie bornée W de V. Car, dans ce cas les conditions (A) et (B) sont visiblement vérifiées et l'une des $P^{(n)}(F)$ étant sommable sur V, on est dans le cas régulier. En outre, l'une des $p^{(n)}(F)$ — et, par suite, $p(F)$ — a une borne inférieure > 0 sur toute partie bornée de V. Donc $P(F)$ est partout $\neq 0$ sur V.

On a un résultat plus simple quand l'une au moins des densités $P^{(n)}(E, F)$ est uniformément continue sur V. On a vu (p. 183) qu'alors $p(F)$ y est aussi uniformément continue.

Supposons, en outre, pour commencer que V soit borné. Alors, comme on sait, $p(F)$ y atteint sa borne inférieure; si donc $p(F) > 0$ sur V, $p(F)$ a sur V un minimum positif α. Or, si l'on est dans le cas quasi-régulier, $p^{(n)}(F)$ converge uniformément vers $p(F)$ (p. 188). Donc, pour n assez grand, $p^{(n)}(F) > \frac{\alpha}{2}$ quel que soit F sur V et par suite $P^{(n)}(E, F) > 0$ pour E, F arbitraires sur V. Cette condition est d'ailleurs suffisante, car si $P^{(m)}(E, F) \neq 0$ sur V, son minimum $p^{(m)}(F)$ quand E varie étant atteint pour un certain état E sera $\neq 0$. En résumé:

Si l'une au moins des densités itérées $P^{(n)}(E, F)$ est uniformément continue quand E, F varient sur V et si le domaine V est borné, la condition nécessaire et suffisante pour que l'on soit dans le cas positivement régulier est que l'une au moins de ces densités $P^{(n)}(E, F)$ soit partout positive quand E, F varient sur V.

Abandonnons l'hypothèse que le domaine V soit borné. $p(F)$ sera encore uniformément continu, mais ce n'est que sur chaque partie bornée W de V qu'il atteindra son minimum. Ce minimum β_W est alors positif. Or, sur W, il y a convergence uniforme de $p^{(n)}(F)$ vers $p(F)$. Donc, pour n assez grand, $p^{(n)}(F) > \frac{\beta_W}{2} > 0$. Réciproquement si nous spécifions que sur toute partie bornée W de V, $p^{(n)}(F)$ reste positif pour un certain rang, éventuellement variable avec W, alors la condition (A) sera réalisée, et $P(F)$ sera partout positif.

Ainsi, *lorsque l'une au moins des densités $P^{(n)}(E, F)$ est uniformément continue quand E, F varient sur le domaine V — borné ou non — la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas positivement quasi-régulier est que: 1° sur toute partie bornée W de V, l'un au moins des $p^{(n)}(F)$ reste positif sur W, à partir d'un certain rang, variable en général avec W mais indépendant de la position de F sur W. 2° $P(F)$ soit fini presque partout.*

En particulier, si l'une, au moins, des densités $P^{(n)}(E, F)$ est bornée et uniformément continue quand E, F varient sur V, borné ou non, pour qu'on soit dans le cas positivement quasi-régulier, il faut et il suffit que, sur toute partie bornée W de V, l'un au moins des $p^{(n)}(F)$ reste positif.

Dans ce cas, il y a *convergence uniforme de $P^{(n)}(E, F)$ vers $P(F)$ quand E, F varient sur V.* De même, *si l'une au moins des densités $P^{(n)}(E, F)$ est quand E, F varient sur V, borné ou non, uniformément continue et majorée par une fonction $\Psi(F)$ sommable sur V, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas positivement régulier est que pour toute partie bornée, W de V, l'un au moins, des $p^{(n)}(F)$ reste positif.*

Condition de M. Hostinsky. En étendant au cas actuel sa remarque relative au cas discontinu, M. Hostinsky a observé (I, § 30, p. 50) que pour se trouver dans le cas positivement régulier, il suffit, si V est borné et $p(E, F)$ continu, que $p(E, F)$ soit $\neq 0$ lorsque, E, F variant dans V, la distance EF (voir la note (2) de la p. 180), reste inférieure à un certain nombre positif ϱ (si petit soit-il choisi). La démonstration revient à prouver qu'au bout d'un nombre n assez grand d'épreuves $P^{(n)}(E, F)$ — qui est continu — est partout positif.

Toutefois, il est bien clair que si le domaine V n'est pas d'un seul tenant, si, par exemple, on peut y distinguer deux parties V_1 et V_2 dont les points sont à des distances toutes supérieures à un nombre positif μ, alors on peut imaginer d'une infinité de façons une répartition de la probabilité telle que le passage de V_1 à V_2 soit impossible et que le passage de n'importe quel état de V_k à n'importe quel état de V_k soit possible en une seule épreuve pour $k = 1, 2$. Alors, en prenant ϱ inférieur à la plus courte distance de V_1 à V_2, on aura bien $p(E, F) > 0$ pour $EF < \varrho$ et pourtant on n'aura $P^{(n)}(E, F) > 0$ quand E appartient à V_1 et F à V_2 pour aucune valeur de n.

Reste donc à examiner le cas où V est d'un seul tenant; nous continuerons à supposer, en outre, que la frontière de V n'est pas trop irrégulière, au sens précisé p. 180 et que V est borné.

Observons d'abord que, V étant borné, si $p(E, F) > 0$ pour $EF < \varrho$, alors $p(E, F)$ a une borne inférieure positive ε quand $EF \leqq \theta \varrho$, θ étant un nombre positif fixe < 1. Sans quoi, il existerait pour tout entier n un couple E_n, F_n de V tel que $p(E_n, F_n) < \frac{1}{n}$ et $E_n F_n \leqq \theta\varrho$. On pourrait extraire de la suite des entiers n une suite d'indices $n_1, n_2 \ldots$ tels que $E_{n_1}, E_{n_2} \ldots, F_{n_1}, F_{n_2} \ldots$ tendent vers E_0, F_0 de V. On aurait $E_0 F_0 \leqq \theta\varrho$ et, puisque p est supposé continu $p(E_0, F_0) = 0$ contrairement à l'hypothèse.

Ceci étant, utilisons l'hypothèse que V est borné et d'un seul tenant. Nous entendrons par là que pour tout nombre η positif, il existe un entier N tel que pour tout couple d'états E, F de V, il existe des états $H_1, H_2, \ldots H_s$ de $\dot{V}$ en nombre $< N$ tels que $EH_1 < \eta$, $H_1 H_2 < \eta, \ldots$ $H_s F < \eta$. Rien n'empêche, d'ailleurs, de supposer $s = N - 1$ car au cas où $s < N - 1$ on poserait $H_{s+1} \equiv \ldots \equiv H_{N-1} \equiv H_s$. D'après l'hypothèse (p. 180) sur la frontière de V, dans toute sphère de centre H_j et de rayon $\frac{\eta}{2}$ il existe une portion v_j de V de mesure positive. Et si G_j, G_{j+1} appartiennent à v_j, v_{j+1}, on a

$$G_j G_{j+1} \leqq G_j H_j + H_j H_{j+1} + H_{j+1} G_{j+1} < 2\eta$$

et en particulier $EG_1 < 2\eta$, $G_{N-1} F < 2\eta$. Prenons $2\eta = \theta\varrho$. On aura

$$P^{(2)}(E, G_2) \geqq \int_{v_1} p(E, G_1)\, p(G_1, G_2)\, dG_1 \geqq \varepsilon^2 [\text{mes. } v_1]$$

$$P^{(3)}(E, G_3) \geqq \int_{v_2} P^{(2)}(E, G_2)\, p(G_2, G_3)\, dG_2 \geqq \varepsilon^3 (\text{mes. } v_1)(\text{mes. } v_2)$$

$$P^{(N)}(E, F) \geqq \int_{v_{N-1}} P^{(N-1)}(E, G_{N-1})\, p(G_{N-1} F)\, dG_{N-1} \geqq \varepsilon^N (\text{mes.} v_1) \ldots (\text{mes.} v_{N-1}).$$

Le second membre peut varier quand E, F varient; mais, en tout cas, il est $\neq 0$, de sorte qu'il existe un entier N, indépendant de E et de F sur G, tel que

$$P^{(N)}(E, F) > 0.$$

On est bien dans le cas positivement régulier. Plus généralement, supposons qu'il existe un entier ν et un nombre $\varrho > 0$ tels que $P^{(\nu)}(E, F) > 0$

pour $EF < \rho$. Alors en raisonnant sur $P^{(\nu)}(E, F)$ comme sur $p(E,F)$ on voit qu'il existe un entier N tel que $P^{(N\nu)}(E, F) \neq 0$ quels que soient E, F sur V. On est alors encore dans le cas positivement régulier. D'ailleurs, si l'on est dans le cas positivement régulier, la dernière condition est bien nécessaire puisqu'elle est même réalisée pour toute valeur positive de ρ. Donc:

Si V est borné et d'un seul tenant et si l'une au moins, $P^{(m)}(E, F)$, des densités $P^{(n)}(E, F)$ est continue sur V, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas positivement régulier est qu'il existe un nombre positif ρ et un entier $\nu > m$ tels que $P^{(\nu)}(E, F) > 0$ pour $EF < \rho$.

Dans le cas où $p(E, F)$ n'est pas continu, on peut recommencer la démonstration, mais en faisant entrer cette fois dans la condition de M. Hostinsky ce qui en était déduit précédemment comme conséquence:

quand $p(E, F)$, ni aucun des $P^{(n)}(E, F)$ n'est supposé continu, la condition de M. Hostinsky consistera en ce que pour l'une au moins des densités itérées $P^{(n)}(E, F)$ — soit $P^{(\nu)}(E, F)$ — il existe un nombre $\rho > 0$ tel que $P^{(\nu)}(E, F)$ a une borne inférieure positive ε quand E, F varient arbitrairement sur V de sorte que $EF < \rho$.

Alors, en supposant encore V borné et d'un seul tenant, on verra comme plus haut qu'il existe un nombre $N\nu$ tel que

$$P^{(N\nu)}(E, F) \geqq \varepsilon^N (\text{mes. } v_1) \dots (\text{mes. } v_{N-1}).$$

Il en résulte que, pour n assez grand, $P^{(n)}(E, F)$ reste $\neq 0$ quels que soient E, F sur V. Cela ne veut pas dire que la borne inférieure $p^{(n)}(F)$ soit $\neq 0$, car le second membre varie avec E, F. Mais, V étant borné et d'un seul tenant, on peut certainement choisir sur V des états K_1, ... K_N assez nombreux pour que tout état de V soit à distance $< \eta$ de l'un des K_i et pour qu'on puisse choisir les états H_1, ... H_s de la démonstration précédente parmi les $K_1 \dots K_N$. Cette fois, le produit $\omega = \varepsilon^N (\text{mes. } v_1) \dots (\text{mes. } v_{N-1})$ sera indépendant de E et de F sur V et on aura en particulier $p^{(N\nu)}(F) \geqq \omega$, d'où $p^{(n)}(F) \geqq \omega > 0$ pour $n > N\nu$, quel que soit F sur V. Il en résulte que la condition (A) sera vérifiée; d'ailleurs $p(F) \geqq p^{(n)}(F) > 0$. Si la condition (B) est vérifiée, on aura donc non seulement le cas quasi-régulier, mais le cas positivement quasi-régulier.

En résumé: si V est borné et d'un seul tenant et si — condition de M. Hostinsky généralisée — $p(E, F)$ étant ou non continue — il existe un rang ν et une distance ρ tels que $P^{(n)}(E, F)$ ait une borne inférieure $\neq 0$ quand $EF \leqq \rho$, alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas positivement quasi-régulier est que $P(F)$ soit fini presque partout sur V.

On peut aussi particulariser les énoncés de la p. 208 :

Si l'un des $P^{(n)}(E, F)$ a, en outre une borne supérieure finie quand E et F varient indépendamment sur V, ou si plus généralement l'un des $P^{(n)}(E, F)$ est majoré constamment par une fonction $\Psi(F)$ sommable sur V, alors, si la condition de M. Hostinsky, modifiée comme il vient d'être dit, est vérifiée, on est sûrement dans le cas positivement régulier.

Convergence des moyennes arithmétiques. Revenons à l'inégalité

$$(9) \qquad |P^{(n)}(E, F) - p(F)| \leqq (q_\nu)^n \ B(F) \qquad \text{pour } n > m.$$

Puisque, dans le cas quasi-régulier $P^{(n)}(E, F)$ tend vers $p(F)$ sur l'ensemble V' où $P(F)$ et $p(F)$ sont finis et égaux, alors, en vertu d'une propriété connue des séries convergentes, il en sera de même de la moyenne arithmétique

$$\Pi^{(n)}(E, F) = \frac{P^{(1)}(E, F) + \ldots + P^{(n)}(E, F)}{n}.$$

Non seulement la différence $\eta_n(E, F) = \Pi^{(n)}(E, F) - p(F)$ est sur V' infiniment petite avec $\frac{1}{n}$, mais l'inégalité (9) va nous permettre d'obtenir un renseignement sur son ordre. En effet, la série

$$s(E, F) = \sum_{t=1}^{t=\infty} [P^{(t)}(E, F) - p(F)]$$

est d'après (9) convergente quand F est sur V' et cela uniformément quand E varie sur V. Or on a évidemment

$$\lim_{n \to \infty} n \, [\Pi^{(n)}(E, F) - p(F)] = s(E, F)$$

c'est-à-dire que : ou bien $s(E, F)$ est fini et $\neq 0$ et $\eta_n(E, F)$ est un infiniment petit du premier ordre en $\frac{1}{n}$, avec une partie principale égale à $s(E, F)$; ou bien $s(E, F) = 0$ et $\eta_n(E, F)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à $\frac{1}{n}$. Il faut cependant observer qu'il reste une troisième hypothése, celle pour celle où $s(E, F)$ serait infini. Bien que restant convergente sur V' à partir d'un certain rang, il peut en effet arriver qu'avant ce rang, certains termes de $s(E, F)$ soient infinis. Cette difficulté disparaît quand au lieu des densités, on étudie les probabilités elles-mêmes.

Comportement des probabilités. Passons de l'étude des *densités* de probabilités à celle des probabilités. Soit v une portion quelconque de V, de mesure positive. La probabilité qu'on passe en n épreuves de l'état E à l'un quelconque F des états de v est:

$$\omega_v^{(n)}(E) = \int_v P^{(n)}(E, F)\, dF$$

Soit
$$A_n = \omega_v^{(n)}(E) - \int_v p(F)\, dF = I_n - \mathfrak{J}_n$$

avec

$$0 \leqq I_n = \int_v [P^{(n)}(E, F) - p^{(n)}(F)]\, dF$$
$$\leqq \int_V [P^{(n)}(E, F) - p^{(n)}(F)]\, dF = 1 - \int_V p^{(n)}(F)\, dF$$

et de même

$$0 \leqq \mathfrak{J}_n = \int_v [p(F) - p^{(n)}(F)]\, dF \leqq \int_V p(F)\, dF - \int_V p^{(n)}(F)\, dF.$$

Nous avons vu p. 198 que dans tous les cas ce dernier membre et par suite aussi $\mathfrak{J}_n$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Le comportement de A_n quand n croît est donc le même que celui de I_n. Donc, *dans le cas régulier* A_n tend vers zéro, c'est-à-dire que la *probabilité cherchée* $\omega_v^{(n)}(E)$ *tend vers une limite indépendante de* E et qui est égale à $\int_v p(F)\, dF$.

Si l'on n'est pas dans le cas régulier, alors, par définition il n'en est pas ainsi déjà pour $v \equiv V$: $1 = \omega_V^{(n)}(E)$ ne tendra pas vers $\int_V p(F)\, dF$.

On vient de voir que dans le cas régulier $\omega_v^{(n)}(E)$ tend vers $\int_v p(F)\, dF$. Il en est donc de même de la moyenne arithmétique $f_v^{(n)}(E) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{t=n} \omega_v^{(t)}(E)$. Non seulement la différence $\varepsilon_n(E) = f_v^{(n)}(E) - \int_v p(F)\, dF$ est infiniment petite avec $\frac{1}{n}$, mais nous pouvons avoir des renseignements sur son ordre. On a en effet

$$n\, \varepsilon_n(E) = \sum_{t=1}^{t=n} \left[\int_v P^{(t)}(E, F)\, dF - \int_v p(F)\, dF \right].$$

Tout d'abord, chacun des crochets est, en valeur absolue $\leqq \int_V P^{(t)}(E, F)\, dF + \int_V p(F)\, dF \leqq 2$. D'autre part si v appartient à V_s l'ensemble V_s où $P^{(m)}(F) < r$, avec $r + m = s$, on aura

$$\left| \int_v P^{(n)}(E, F)\, dF - \int_v p(F)\, dF \right| \leqq (q_\nu)^n \frac{s\,v}{(q_\nu)^{s+\nu}} \qquad \text{pour } n > m.$$

La série

$$\sigma_v(E) = \sum_{t=1}^{t=\infty} \left[\int_v P^{(t)}(E, F)\, dF - \int_v p(F)\, dF \right] \tag{10}$$

a donc ses termes tous finis quand E parcourt V et elle est majorée par une série convergente indépendante de E, quand v appartient à V_s. Ainsi quand v est contenu dans l'un des ensembles V_1, V_2, ... V_s, ... (dont la réunion forme V'), $\sigma_v(E)$ est une fonction bornée sur V et alors pour chaque état initial E, ou bien $\sigma_v(E) \neq 0$ et alors, non seulement ε_n est infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, mais son ordre est égal à l'unité et sa partie principale est $\frac{1}{n}\sigma_v(E)$; ou bien $\sigma_v(E) = 0$ et ε_n est d'ordre supérieur à l'unité.

Remarque. Si l'on voulait calculer la partie principale du moyen de la formule (10), il faudrait auparavant calculer toutes les densités itérées $P^{(n)}(E, F)$. On verra plus loin, p. 227, qu'on peut obvier à cet inconvénient.

Valeur de la densité limite $P(F)$

Cas quasi-régulier. Nous avons vu que, dans ce cas, $P(F)$ et $p(F)$ sont finis et égaux partout sur V, sauf peut-être sur un certain ensemble w de mesure nulle. De plus $P^{(n)}(E, F)$ converge vers $P(F)$ quand n tend vers l'infini, si F est sur $V - w$. Pour essayer de déterminer $P(F)$, il paraît indiqué de passer à la limite dans les formules

$$P^{(n+1)}(E, F) = \int_{V-w} P^{(n)}(E, G)\, p(G, F)\, dG. \tag{I$_1$}$$

$$\int_{V-w} P^{(n)}(E, F)\, dF = 1. \tag{T}$$

Toutefois, nous avons déjà vu qu'on n'a pas le droit, sans précaution, de substituer dans (T) à $P^{(n)}(E, F)$, sa limite $P(F)$. Ainsi, dans l'exemple de la p. 189, $P(F) \equiv 0$. Et même nous avons réservé le nom de cas régulier au cas où cette substitution est légitime, c'est-à-dire où

$$\int_V P(F)\, dF = 1.$$

On a vu que, dans le cas quasi-régulier, on peut seulement écrire

$$\int_V P(F)\, dF \leqq 1.$$

Considérons de même le passage à la limite dans (I_1) ou plus généralement dans la formule

$$\text{(I)} \qquad P^{(m+n)}(E, F) = \int_V P^{(n)}(E, G)\, P^{(m)}(G, F)\, dG.$$

Si la substitution était légitime à la limite, l'expression

$$P(F) - \int_V P(G)\, P^{(m)}(G, F)\, dG$$

serait nulle.

Pour qu'elle ait d'abord un sens, il faut que $P(F)$ soit fini.

Si F appartient à l'ensemble $V' = V - w$, $P(F)$ est fini et, par suite, pour n assez grand, $P^{(m+n)}(E, F)$ est fini. Alors $\int_V p^{(n)}(G)\, P^{(m)}(G, F)\, dG \leqq \int_V P^{(n)}(E, G)\, P^{(m)}(G, F)\, dG = P^{(m+n)}(E, F)$. Pour ε positif donné, on aura, pour $n > n'$, $P^{(m+n)}(E, F) < P(F) + \varepsilon$. Donc $p^{(n)}(G)\, P^{(m)}(G, F)$ est une fonction ($\geqq 0$) de G qui est sommable sur V' ; elle reste sur V' au plus égale à $P(G)\, P^{(m)}(G, F)$, tend sans décroître vers cette fonction quand n croît et son intégrale sur V' reste inférieure ou égale à $P(F) + \varepsilon$. Dès lors $P(G)\, P^{(m)}(G, F)$ est sommable sur V' et son intégrale sur V' est $\leqq P(F) + \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, on voit finalement que : *dans le cas quasi-régulier, pour tout état F de V',* $P(G)\, P^{(m)}(G, F)$ est sommable sur V' et *l'on a, sur V'*

$$\text{(11)} \qquad \int_V P(G)\, P^{(m)}(G, F)\, dG \leqq P(F).$$

En particulier,

$$\int_V P(G)p(G,F)\,dG \leq P(F). \tag{12}$$

On peut même préciser la variation avec m de l'expression

$$\omega^{(m)}(F) = \int_V P(G)\,P^{(m)}(G,F)\,dG.$$

On a vu que $$\omega^{(m)}(F) \leq P(F).$$

Or $$\omega^{(m+1)}(F) = \int_V P(G)\left[\int_V P^{(m)}(G,H)\,p(H,F)\,dH\right]dG$$

$$= \int_V \left[\int_V P(G)\,P^{(m)}(G,H)\,dG\right]p(H,F)\,dH = \int_V \omega^{(m)}(H)\,p(H,F)\,dH.$$

Donc $\omega^{(2)}(F) = \int_V \omega^{(1)}(H)\,p(H,F)\,dH \leq \int_V P(H)\,p(H,F)\,dH = \omega^{(1)}(F).$

et en général si $\omega^{(m)}(F) \leq \omega^{(m-1)}(F)$, alors

$$\omega^{(m+1)}(F) = \int_V \omega^{(m)}(H)\,p(H,F)\,dH \leq \int_V \omega^{(m-1)}(H)\,p(H,F)\,dH = \omega^{(m)}(F).$$

Dès lors, $\omega^{(m)}(F)$ est une fonction de m non croissante et ≥ 0. Elle a donc une limite $\omega(F) \geq 0$ et l'on a sur V'

$$\omega(F) \leq \ldots \leq \omega^{(n+1)}(F) \leq \omega^{(n)}(F) \leq \ldots \leq \omega^{(1)}(F) \leq P(F). \tag{13}$$

La question se pose maintenant de savoir si la relation (11) qui a lieu partout où elle a un sens, c'est-à-dire quand F est sur V' peut devenir une égalité, une égalité permettant de concourir à la détermination de $P(F)$ partout où $P(F)$ est défini, c'est-à-dire une égalité ayant lieu partout sur V'.

Observons d'abord que, si l'on a pour une valeur particulière de m et quel que soit F sur V' :

$$\int_{V'} P(G)\,P^{(m)}(G,F)\,dG = P(F) \tag{$\mathcal{J}_m$}$$

alors, en multipliant par $P^{(m)}(F, H)\,dF$ et intégrant, on aura si H est sur V'

$$\int_{V'} P(G)\, P^{(2m)}(G, H)\, dG = P(H)$$

et de même, en général

$$\int_{V'} P(G)\, P^{(rm)}(G, H)\, dG = P(H)$$

quel que soit l'entier r. On a alors $\omega^{(n)}(H) = P(H)$ sur V' pour une infinité de valeurs rm de n et par suite à la limite $\omega(H) = P(H)$ sur V'. En raison des relations (13), on voit donc que $\omega^{(n)}(F) = P(H)$ sur V' quel que soit n. Ainsi, lorsque l'égalité $(\mathcal{J}_{\mathrm{m}})$ a lieu pour une valeur de m, elle a lieu pour toute valeur entière de m. Or, si l'on a l'égalité $(\mathcal{J}_{\mathrm{m}})$ en un état F de V', comme d'après le raisonnement fait plus haut, on a

$$(14) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{V'} p^{(n)}(G)\, P^{(m)}(G, F)\, dG = \int_{V'} P(G)\, P^{(m)}(G, F)\, dG$$

on aura

$$0 = \lim_{n\to\infty} [P^{(m+n)}(E, F) - p(F)] = \lim_{n\to\infty} \int_{V'} [P^{(n)}(E, G) - p^{(n)}(G)]\, P^{(m)}(G, F)\, dG.$$

La dernière intégrale est

$$\geqq p^{(m)}(F)\left[1 - \int_V p^{(n)}(G)\, dG\right].$$

On a donc, à la limite

$$0 \geqq p^{(m)}(F)\left[1 - \int_V P(G)\, dG\right] \geqq 0.$$

Dès lors si l'on est dans le cas quasi-régulier *proprement dit*, celui où $\int_V P(G)\, dG < 1$, on devra avoir $p^{(m)}(F) = 0$.

Or, si l'équation $(\mathcal{J}_{\mathrm{m}})$ a lieu presque partout sur V, il en est de même de $(\mathcal{J}_{\mathrm{rm}})$ quel que soit l'entier r, donc $p^{(rm)}(F) = 0$ et par suite, à la limite, $P(F)=0$ presque partout sur V. En résumé, *dans le cas quasi-régulier proprement dit,* $P(F)$ vérifie la relation (11) quel que soit m sur V', mais *$P(F)$ n'est, pour aucune valeur de m, une solution non identiquement nulle de l'équation intégrale homogène de Fredholm ($\mathcal{J}_m$).*

Ainsi, le passage à la limite qui fournit ($\mathcal{J}_m$) n'est jamais à la fois légitime et utile que dans le cas régulier.

Cas régulier. D'après la formule (14), on a

$$P(F)-\int_V P(G)\,P^{(m)}(G,F)\,dG=\lim_{n\to\infty} A_n(F)$$

avec, d'après (9)

$$0\leqq A_n(F)=\int_V [P^{(n)}(E,G)-p^{(n)}(G)]\,P^{(m)}(G,F)\,dG$$

$$\leqq P^{(m)}(F)\,[1-\int_V p^{(n)}(G)\,dG]$$

si $P^{(m)}(F)$ est fini. Si donc, on est dans le cas régulier, on aura

$$P(F)=\int_V P(G)\,P^{(m)}(G,F)\,dG$$

pour tout état F où $P^{(m)}(F)$ est fini.

Or, pour tout état F de V', il y a un entier N tel que $P^{(m)}(F)$ soit fini pour $m>N$. On a donc $\omega^{(m)}(F)=P(F)$ pour $m>N$ et par suite $\omega(F)=P(F)$. Ainsi, pour F sur V'

$$P(F)=\omega(F)\leqq\omega^{(n)}(F)\leqq\omega^{(1)}(F)\leqq P(F).$$

On a donc $\omega^{(n)}(F)=P(F)$ sur V' quel que soit n.

En résumé, *dans le cas régulier, la densité-limite $P(F)$ est une solution, vérifiant les conditions*

$$\int_{V'} P(F)\,dF=1 \qquad P(F)\geqq 0, \tag{15}$$

de l'équation intégrale homogène de Fredholm

$$P(F)=\int_{V'} P(G)\,p(G,F)\,dG \tag{$\mathcal{J}$}$$

et de ses équations „itérées"

$$P(F)=\int_{V'} P(G)\,P^{(m)}(G,F)\,dG. \tag{$\mathcal{J}_m$}$$

Les conditions (15) montrent d'ailleurs que *c'est une solution „effective" de* $(\mathcal{G})$, c'est-à-dire une solution non identiquement nulle sur V'.

Cas de la densité-limite constante. On a vu que, dans le cas quasi-régulier, $P^{(n)}(E, F)$ converge presque partout sur V vers une limite indépendante de E. On peut se demander dans quel cas cette limite sera aussi, quand E varie presque partout sur V, indépendante de F. Alors, la limite étant indépendante de E et de F aura une valeur constante P. On a d'ailleurs vu qu'on a toujours dans le cas quasi-régulier

$$0 \leqq \int_V P(F)\, dF \leqq 1. \tag{16}$$

Ceci montre aussitôt que *dans ce cas si la mesure de V est infinie, $P(F)$ ne peut être constant que s'il est nul.*

Si, au contraire, V est borné ou de mesure finie, on aura

$$P \leqq \frac{1}{\text{mes. } V}.$$

Supposons $P > 0$ et, par suite, V de mesure finie. On a vu (p. 217, pour $m = 1$) que dans le cas quasi-singulier, si F est sur V', $P(G)p(G, F)$ est une fonction de G sommable sur V. Donc, ici, l'intégrale $\int_V p(G, F)\, dG$ doit avoir une valeur finie. D'autre part, on a sur V'

$$P(F) \geqq \int_V P(G)\, p(G, F)\, dG. \tag{12}$$

Donc ici

$$1 \geqq \int_V p(G, F)\, dG. \tag{17}$$

En multipliant par dF et intégrant

$$\begin{aligned} \text{mes. } V &\geqq \int_V \left[\int_V p(G, F)\, dG\right] dF \\ &= \int_V \left[\int_V p(G, F)\, dF\right] dG = \text{mes. } V. \end{aligned}$$

L'avant-dernière ligne est donc une égalité et l'on a

$$\int_V \left\{1 - \int_V p(G, F)\, dG\right\} dF = 0.$$

L'accolade étant $\geqq 0$, en vertu de (17), doit donc être nulle presque partout. Ainsi, on a la condition

$$(\mathrm{T}_1') \qquad \int_V p(G, F)\, dG = 1, \qquad \text{presque partout sur } V.$$

Observons d'ailleurs que, s'il en est ainsi, la relation (17) devient une égalité sur V'. Or nous savons (p. 220) que pour $P > 0$, il ne peut en être ainsi dans le cas quasi-régulier proprement dit. Ainsi, pour que $P(F)$ soit presque partout égal à une constante positive, il faut:

1° *qu'on soit dans le cas régulier,*

2° *que la condition (T_1') soit réalisée,*

3° *que V soit de mesure finie.*

Et alors la limite constante est égale à $\dfrac{1}{V}$. Car on a $\int_V P(F)\, dF = 1$ d'après 1°.

Réciproquement, supposons d'abord simplement vérifiée la condition (T_1') et posons

$$L_n(F) = \int_V P^{(n)}(G, F)\, dG, \text{ d'où}$$

$$(18) \qquad L_{n+1}(F) = \int_V \left[\int_V P^{(n)}(G,H)\, p(H,F)\, dH \right] dG$$

$$= \int_V L_n(H)\, p(H,F)\, dH$$

et $L_1(F) = 1$ presque partout. Si $L_m(F) = 1$ presque partout pour $m \leqq n$, on aura, d'après (18)

$$L_{n+1}(F) = \int_V p(H, F)\, dH = 1 \text{ presque partout.}$$

Ainsi, si (T_1') a lieu, on a nécessairement aussi

$$(\mathrm{T}') \qquad \int_V P^{(n)}(G, F)\, dG = 1 \qquad \text{presque partout sur } V,$$

quel que soit l'entier n.

Supposons, en outre, maintenant qu'on soit au moins dans le cas quasi-singulier, de sorte qu'il y ait d'abord presque partout une limite

$P(F)$ de $P^{(n)}(E, F)$ indépendante de E. En vertu de (T'), on a, presque partout sur V

$$1 \geqq \int_V p^{(n)}(F)\, dG = p^{(n)}(F) \text{ mes. } V.$$

Dès lors, si la mesure de V était infinie, on déduirait de 2° que $p^{(n)}(F) = 0$ presque partout sur V et par suite que $p(F)$ est nul presque partout sur V.

Si donc la condition 2° est réalisée: ou bien la densité limite $P(F)$ est nulle presque partout sur V, ou bien V ne peut être de mesure infinie et la condition 3° est réalisée. Si $P(F)$ était nul presque partout sur V, on ne serait pas dans le cas régulier. Donc, si 1° et 2° sont réalisées, il en est de même de 3°.

Or, dans cette hypothèse, on déduit de la dernière formule que

$$P(F) \leqq \frac{1}{\text{mes. } V}$$

et en multipliant par dF et intégrant

$$0 \leqq \int_V \left[\frac{1}{\text{mes. } V} - P(F)\right] dF = 1 - \int_V P(F)\, dF = 0.$$

Le crochet est $\geqq 0$ et son intégrale sur V est nulle. Donc, il est nul presque partout, c'est-à-dire que $P(F)$ est presque partout égal à la constante $\frac{1}{V}$.

En particulier, *s'il existe une fonction $\Psi(F)$ sommable sur V et qui majore, quels que soient E et F sur V, l'une des densités itérées $P^{(n)}(E, F)$, alors la condition nécessaire et suffisante pour que la suite des $P^{(n)}(E, F)$ converge vers une constante non nulle quand F varie presque partout sur V (et cela uniformément quand E varie sur V) est: 1° que la condition (T_1') soit vérifiée, 2° que pour une assez grande valeur de ν, $p^{(\nu)}(F)$ ne soit pas nul presque partout sur V.*

Plus particulièrement, *si le domaine V est borné et si les densités itérées $P^{(n)}(E, F)$ sont continues sur V à partir d'un certain rang n, alors la condition nécessaire et suffisante pour que la suite des $P^{(n)}(E, F)$ converge vers une constante non nulle et cela uniformément quand E, F varient arbitrairement sur V, est que*

1° $\int\limits_V p(E, F)\, dE = 1$ *quand* F *est arbitraire sur* V.

2° *Il existe au moins un état* L *de* V *tel que pour* ν *assez grand,* $P^{(\nu)}(E, L)$ *ne s'annule jamais quand* E *parcourt* V *ou que* $P^{(\nu)}(L, E)$ *ne s'annule jamais quand* E *parcourt* V.

Cas du domaine infini. Nous avons vu que si le domaine est de mesure infinie, on ne peut, dans le cas régulier, avoir pour densité limite une constante. Si le domaine étant infini, la condition (T′) est cependant réalisée, on aura, presque partout sur V,

$$1 = \int\limits_V P^{(n)}(E, F)\, dE \geqq \int\limits_V p^{(n)}(F)\, dE \geqq 0.$$

Si $p^{(n)}(F)$ n'était pas nul, la dernière intégrale serait infinie. Donc $p^{(n)}(F)$ est nul, presque partout sur V, quel que soit l'entier n et par suite $p(F) = 0$, presque partout sur V, qu'on soit ou non dans le cas quasi-régulier. Dès lors:

Quand, le domaine V *étant de mesure infinie, la condition* (T′) *est réalisée,* $p(F)$ *est nul presque partout sur* V *et l'on ne peut être dans le cas quasi-régulier que si la densité limite* $P(F) = p(F)$ *est nulle presque partout sur* V.

Exemples de réalisation de T'. On peut signaler deux catégories simples de fonctions $p(E, F)$ pour lesquelles la condition (T′) est réalisée nécessairement quand la condition (T) l'est déjà.

La première catégorie est formée des fonctions *symétriques,* c'est-à-dire telles que $p(E, F) \equiv p(F, E)$.

Une autre catégorie (qui n'a pas son analogue dans le cas d'un nombre fini d'états possibles) est celle où — le système aléatoire, ne dépendant que d'un paramètre numérique pouvant prendre toutes les valeurs possibles, et où par suite $p(E, F)$ se réduisant à une fonction $p(x, y)$ de deux variables numériques —, on suppose que $p(x, y)$ est une fonction de $y - x$, soit $f(y - x)$.

La condition

$$\text{(T)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(y - x)\, dy = 1$$

étant supposée vérifiée, il suffit d'observer, en posant $y - x = u$ que l'on a toujours

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y - x)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y - x)\, dx$$

d'où la condition

$$(\mathrm{T}') \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(y-x)\,dx = 1.$$

Dans le cas où les états du système sont définis par k paramètres:

$$p(E, F) = \Phi(q_1, \ldots q_k;\ u_1, \ldots u_k),$$

la condition (T) entraînera encore d'elle-même la condition (T′) si Φ ne dépend de $q_1, \ldots u_k$ que par l'intermédiaire des différences correspondantes $(q_1 - u_1), \ldots (q_k - u_k)$.

Mais, comme nous l'avons vu plus haut, ce second cas ne peut conduire au cas régulier puisque V est ici illimité. Plus précisément, on aura $p(F) = 0$ et: ou bien on n'aura même pas le cas quasi-régulier c'est-à-dire que $p(F) < P(F)$ sur un ensemble de mesure positive, ou bien — comme dans l'exemple de la p. 189 — la limite $P(F) = p(F)$ de $P^{(n)}(E, F)$ sera nulle sur V'.

Expression de la densité-limite $P(F)$. Laissons maintenant de côté la condition (T′). On a vu que, dans le cas régulier, la limite $P(F)$ de $P^{(n)}(E, F)$ vérifie sur V' les conditions:

$$(\mathcal{T}) \qquad P(F) = \int_{V'} P(G)\, p(G, F)\, dG$$

$$(15) \qquad \int_{V'} P(G)\, dG = 1.$$

Ainsi, dans le cas régulier, l'équation intégrale

$$(\mathrm{H}) \qquad X(F) = \int_{V'} X(G)\, p(G, F)\, dG$$

a, au moins, une solution non identiquement nulle et même partout $\geqq 0$: $X(F) = P(F)$ et l'une au moins des solutions vérifie la condition

$$\int_{V'} X(G)\, dG = 1.$$

Nous allons même démontrer que l'équation intégrale homogène de Fredholm (H) ne peut avoir, dans le cas régulier, qu'une solution sommable, non identiquement nulle $X_0(F)$ à un facteur constant près. S'il en est ainsi, on aura nécessairement sur V' $P(F)=\alpha X_0(F)$ et on déterminera la constante α par la relation $1=\alpha \int_{V'} X_0(F)\,dF$. Cette relation montre que $\int_{V'} X_0(F)\,dF \neq 0$ et par suite la résolution classique de l'équation de Fredholm permet de déterminer entièrement $P(F)$ par la formule

$$P(F)=\frac{X_0(F)}{\int_{V'} X_0(F)\,dF}.$$

Pour démontrer le point admis, observons que l'équation (H) ayant au moins une solution non identiquement nulle $X_0(F)$, alors en itérant (H), on voit que $X_0(F)$ vérifie aussi, quel que soit n, l'équation

$$(\mathrm{H}_n) \qquad X_0(F)=\int_{V'} P^{(n)}(G,F)\,X_0(G)\,dG.$$

Quand n croît indéfiniment, on peut passer à la limite sous le signe $\int$. Car

$$\begin{aligned}&\left|\int_{V'} P^{(n)}(G,F)\,X_0(G)\,dG-\int_{V'} P(F)\,X_0(G)\,dG\right|\\ &\leq \int_{V'} \left|P^{(n)}(G,F)-P(F)\right| \left|X_0(G)\right| dG\\ &\leq \left[P^{(n)}(F)-p^{(n)}(F)\right]\int_{V'} \left|X_0(G)\right| dG.\end{aligned}$$

On a donc $X_0(F)=P(F)\int_{V'} X_0(G)\,dG$ et il n'y a pas d'autre solution de (H) que les fonctions proportionnelles à $P(F)$.

Ainsi, dans le cas régulier, 1° l'équation de Fredholm (H) a une solution non identiquement nulle et une seule, $X_0(F)$ à un facteur constant près; 2° *la recherche de la densité limite est ramenée à la résolution classique de cette équation de Fredholm* et on a $P(F)=\dfrac{X_0(F)}{\int_V X_0(F)\,dF}$.

Calcul de $s(E,F)$. Supposons, pour simplifier que $p(E,F)$ ait une borne supérieure finie quand E et F varient sur V. Alors la série

$$s(E,F)=\sum_{t=1}^{t=\infty}\left[P^{(t)}(E,F)-P(F)\right]$$

est majorée par une série convergente indépendante de E et de F variant sur tout V.

Or, dans le cas régulier:

$$P^{(t)}(E, F) - P(F) = \int_V [P^{(t-1)}(E, G) - P(G)]\, p(G, F)\, dG$$

d'où:

$$[P^{(2)}(E, F) - P(F)] + \ldots + [P^{(n)}(E, F) - P(F)] =$$

$$\int_V \{[P^{(1)}(E, G) - P(G)] + \ldots + [P^{(n-1)}(E, G) - P(G)]\}\, p(G, F)\, dG.$$

et à la limite

$$s(E, F) - P(E, F) + P(F) = \int_V s(E, G)\, p(G, F)\, dG.$$

Ainsi le calcul de $s(E, F)$ est ramené à la résolution d'une équation intégrale de Fredholm.

$$Y(E, F) = P(E, F) - P(F) + \int_V Y(E, G)\, p(G, F)\, dG$$

dont on vient de prouver qu'elle admet au moins une solution. D'ailleurs, une solution quelconque $Y_0(E, F)$ n'est pas nécessairement égale à $s(E, F)$; mais la différence de ces deux solutions vérifie évidemment l'équation (H), de sorte qu'elle est de la forme $Y_0(E, F) - s(E, F) = \beta(E)\, X_0(F)$.

Or, on a, avec convergence uniforme

$$\int_V s(E, F)\, dF = \sum_{t=1}^{t=\infty} \left[\int P^{(t)}(E, F)\, dF - \int_V P(F)\, dF\right] = \Sigma(1 - 1) = 0.$$

D'où $\beta(E) = \dfrac{\int_V Y_0(E, F)\, dF}{\int_V X_0(F)\, dF}$,

et finalement $s(E, F) = Y_0(E, F) - \dfrac{\int_V Y_0(E, F)\, dF}{\int_V X_0(F)\, dF}\, X_0(F)$.

Ceci fait, on calculera la partie principale $\dfrac{1}{n}\, \sigma_v(E)$ de $f_v^{(n)}(E) - \int_v P(F)\, dF$ (p. 215) par la formule $\sigma_v(E) = \int_v s(E, F)\, dF$.

Remarque I. Le raisonnement qui précède nous fournit, chemin faisant, une condition nécessaire pour qu'on soit dans le cas régulier sous une forme qui peut être commode:

Pour qu'on soit dans le cas régulier, il faut que l'équation intégrale homogène de Fredholm (H) admette une solution partout $\geqq 0$, non identiquement nulle et qu'elle n'admette qu'une telle solution à un facteur constant près.

Remarque II. On a vu que dans le cas régulier l'équation intégrale homogène

$$(\mathrm{H}_\lambda) \qquad X(F) = \lambda \int_{V'} X(G)\, p\,(G, F)\, dG$$

a au moins une solution effective $P(F)$ pour $\lambda = 1$. C'est ce qu'on exprime en disant que l'unité est constante caractéristique pour l'équation (H). Il n'est pas nécessaire pour obtenir ce résultat d'avoir établi que la limite $P(F)$ vérifie l'équation (H). En effet, la condition (T_1) montre immédiatement que l'équation intégrale homogène associée à (H_λ), soit

$$(\mathrm{H}_\lambda{}') \qquad Y(F) = \lambda \int_{V'} Y(G)\, p\,(F, G)\, dG$$

admet pour $\lambda = 1$, la solution effective $Y(G) \equiv 1$. L'unité est donc constante caractéristique de (H'_λ) et ceci qu'on soit dans le cas régulier ou non. On sait qu'alors, si les théorèmes de Fredholm s'appliquent à (H_λ), l'unité sera aussi constante caractéristique de (H_λ).

Autrement dit, la théorie de Fredholm nous aurait permis d'établir directement l'existence d'au moins une solution effective de (H), aussi bien dans le cas singulier que dans le cas régulier. Mais elle ne suffisait pas pour établir que dans le cas régulier $P(F)$ est déterminé par les conditions (15) et $(\mathcal{F})$. Et de plus, on n'a pas le droit d'appliquer cette théorie à tout noyau et tout domaine. On sait en particulier que son extension au cas des domaines illimités et aux noyaux discontinus ne peut se faire sans de sérieuses restrictions.

Valeurs moyennes de variables et de fréquences aléatoires dépendant d'événements „en chaîne“. Estimation de leurs dispersions

Valeur moyenne d'une variable aléatoire. Supposons qu'à chaque état possible F corresponde une valeur déterminée $Y(F)$ d'une certaine variable. C'est une variable aléatoire dont la valeur dépend de la réalisation de l'épreuve qui doit fournir un des états possibles.

Appelons $X^{(n)}(E)$ la valeur aléatoire prise par cette variable quand n épreuves ont eu lieu à partir de l'état E. Si, par exemple, ces n épreuves ont abouti à l'état F, on aura $X^{(n)}(E) = Y(F)$. Mais quand E, n sont donnés, F n'est pas déterminé et les deux membres de cette égalité ont une valeur aléatoire dont nous désignerons la valeur moyenne par

$$\mathfrak{M}\, X^{(n)}(E) = \overline{Y(F)}.$$

Avec les notations précédemment employées, cette valeur est égale à

$$\int_V Y(F)\ P^{(n)}(E, F)\, dF$$

et le problème à résoudre est d'abord de trouver comment se comporte cette quantité quand n croît.

Si nous nous plaçons dans le cas quasi-régulier alors $P^{(n)}(E, F)$ converge vers $P(F)$ sauf peut-être sur un ensemble w de mesure nulle. Or on a en posant $V' = V - w$

$$\mathfrak{M}\, X^{(n)}(E) = \int_{V'} Y(F)\, P^{(n)}(E, F)\, dF \tag{19}$$

et le problème est de savoir s'il est légitime de passer à la limite dans le second membre sous le signe d'intégration.

Mais, déjà dans le cas simple où $Y(F)$ est une constante non nulle, nous savons que si l'on n'est pas dans le cas régulier

$$\int_{V'} Y(F)\, [\lim\ P^{(n)}(E, F)]\, dF = \int_{V'} Y(F)\, P(F)\, dF = Y(F) \int_{V'} P(F)\, dF$$

$$\neq Y(F) = \lim \int_{V'} Y(F)\, P^{(n)}(E, F)\, dF.$$

Il en est encore de même dans le cas plus général où $Y(F)$ garde un signe constant et reste en valeur absolue supérieur à une borne positive. Car si $Y(F)$ reste positif et supérieur à ε

$$
\begin{aligned}
&\int_{V'} Y(F)\, P^{(n)}(E, F)\, dF - \int_{V'} Y(F)\, P(F)\, dF = \qquad (20)\\
&\int_{V'} Y(F)\, [P^{(n)}(E, F) - p^{(n)}(F)]\, dF - \int_{V'} Y(F)\, [P(F) - p^{(n)}(F)]\, dF.
\end{aligned}
$$

La question du passage à la limite sous l'intégrale ne peut se poser que si les intégrales du premier membre sont finies. Dans ce cas $Y(F)$ $p^{(n)}(F)$ serait aussi sommable sur V' et au plus égale à une fonction $Y(F)$ $P(F)$ sommable sur V', vers laquelle elle tend sur V' sans décroître. Donc la dernière intégrale du second membre tend vers zéro. Or

$$
\int_{V'} Y(F)\, [P^{(n)}(E, F) - p^{(n)}(F)]\, dF \geqq \varepsilon\, [1 - \int_{V'} p^{(n)}(F)\, dF] \geqq 0.
$$

Le premier membre de (20) ne peut donc tendre vers zéro que si la limite $\int_{V'} p(F)\, dF$ de $\int_{V'} p^{(n)}(F)\, dF$ est égale à 1, c'est-à-dire dans le cas régulier.

Si $Y(F)$ peut changer de signe, il pourrait se produire des compensations de signe permettant le passage à la limite de (19) dans le cas non régulier, pour des fonctions $Y(F)$ particulières. Mais nous savons maintenant que cela n'aura pas lieu pour des fonctions choisies parmi les plus simples. Dans la suite, nous allons donc nous borner au cas régulier.

Si l'on suppose que $Y(F)$ est borné sur V ou au moins sur V', si, par exemple, on a $|Y(F)| \leqq A$ sur V', alors en vertu de (20)

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{V'} Y(F)\, P^{(n)}(E, F)\, dF - \int_{V'} Y(F)\, P(F)\, dF \right| \qquad (21)\\
&\leqq 2A\, [1 - \int_{V'} p^{(n)}(F)\, dF].
\end{aligned}
$$

Et par suite le premier membre tend vers zéro.

Donc: si la fonction $Y(F)$ est bornée sur V, alors dans le cas régulier $\mathfrak{M} X^{(n)}(E)$ tend vers une limite quand n croît indéfiniment et cette limite est la quantité indépendante de E

$$M = \int_V Y(F)\, P(F)\, dF.$$

Cette quantité limite de valeurs moyennes est, elle-même, une *valeur moyenne* de $Y(E)$ puisque $P(F) \geqq 0$ et $\int P(F)\, dF = 1$ et c'est même la valeur moyenne de $Y(F)$ qui correspond à la densité-limite $P(F)$.

Enfin, dans ce même cas, la convergence de $\mathfrak{M} X^{(n)}(E) - M$ vers zéro est, d'après (21) jointe à la formule (19) de la p. 229, uniforme quand E varie.

Observons d'ailleurs que

$$\mathfrak{M} X^{(m+n)}(E) = \int_V P^{(m)}(E, G)\, [\mathfrak{M} X^{(n)}(G)]\, dG.$$

Si donc $Y(E)$ n'étant pas borné sur V, $\mathfrak{M} X^{(n)}(E)$ est borné sur V pour une valeur convenable m de n, les résultats précédents subsistent puisqu'en remplaçant $Y(E)$ par $\mathfrak{M} X^{(m)}(G)$ on retrouve à un décalage près la même suite de valeurs moyennes.

Or, si le passage à la limite est légitime c'est que $M = \int_V Y(F)\, P(F)\, dF$ est finie et si la convergence de $\mathfrak{M} X^{(n)}(E)$ vers M est uniforme quand E varie, alors, pour n assez grand $\mathfrak{M} X^{(n)}(E)$ est nécessairement bornée quand E varie. Donc:

Dans le cas régulier, la condition nécessaire et suffisante pour que la valeur moyenne $\mathfrak{M} X^{(n)}(E)$ converge, uniformément quand E varie sur V, vers une limite finie indépendante de E est que $Y(E)$ (ou plus généralement $\mathfrak{M} X^{(n)}(E)$ pour au moins une valeur de n) soit bornée quand E varie sur V.

Si $Y(E)$ n'est pas borné, un cas simple où la condition de convergence est remplie est celui où $Y(E)$ est sommable sur V et où, de surcroît, $P^{(n)}(E, F)$ est, pour n assez grand, borné quand E, F varient arbitrairement sur V. (C'est par exemple ce qui a lieu quand $Y(E)$ étant sommable sur un domaine V borné, l'un au moins des $P^{(n)}(E, F)$ est continu pour E, F arbitraires sur V).

En effet

$$\left| \mathfrak{M} X^{(n)}(E) - \int_V Y(F)\, P(F)\, dF \right| \leqq \int_{V'} [P^{(n)}(F) - P(F)]\, |Y(F)|\, dF.$$

Or si $P^{(m)}(E, F)$ a une borne supérieure finie μ quand E, F varient sur V, on a vu (p. 207) que $P^{(n)}(F) - P(F)$ est majoré pour n assez grand, par le terme correspondant u_n d'une progression géométrique indépendante de F. Le second membre sera donc $\leqq u_n \int_{V'} |Y(F)| dF$ et par suite tendra vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On a donc encore

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M} X^{(n)}(E) = \int_{V'} Y(F) P(F) d\Gamma \tag{22}$$

et la convergence est non seulement uniforme quand E varie, mais au moins aussi rapide que celle des termes d'une progression géométrique indépendante de E. Il est vrai que dans ce cas $\mathfrak{M} X^{(n)}(E)$ étant alors borné pour n assez grand quand E varie, on rentre dans un cas déjà examiné; mais il peut être parfois plus commode de s'assurer que $P^{(m)}(E, F)$ est borné que de le vérifier pour $\mathfrak{M} X^{(n)}(E)$.

Même dans certains cas où la démonstration précédente ne s'applique pas, il peut arriver qu'on ait encore l'égalité (22). Par exemple, dans le cas envisagé p. 189 et avec les mêmes notations, on posera

$$\mathfrak{M} X^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(y) P^{(n)}(x, y) dy$$

$$\text{avec} \quad P^{(n)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{n}} < \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

D'où

$$|\mathfrak{M} X^{(n)}(x)| \leqq \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(y)| dy.$$

Si donc $Y(y)$ est sommable sur le domaine V actuel, c'est-à-dire sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, $\mathfrak{M} X^{(n)}(x)$ tend vers une limite qui est zéro. Pourtant, on n'est pas dans le cas régulier, puisque $P^{(n)}(x, y)$ tend vers zéro. Et cependant, on a encore

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M} X^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(y) P(y) dy.$$

Remarque. Dans ce qui précède nous avons cherché à déterminer des cas assez généraux — au reste tous réguliers — où l'on peut passer à la limite sous le signe $\int$ dans $\int_V Y(F) P^{(n)}(E, F) dF$.

Il peut cependant se produire des cas où cette intégrale ait une limite déterminée, sans que cette limite soit égale à $\int_V Y(F)\,P(F)\,dF$. C'est ce que nous allons constater dans l'exemple suivant (qui relève du cas quasi-singulier proprement dit).

Exemple. Généralisons un exemple dû à Lord Rayleigh. Considérons une molécule qui effectue une suite de déplacements sur une droite et supposons que la longueur de chaque déplacement ait pour un sens donné une probabilité donnée. Ou, plus précisément que la probabilité pour que la molécule partant de x arrive au bout d'un seul déplacement à une position comprise entre y et $y + dy$ soit le produit de dy par une fonction de la grandeur $|y - x|$ du déplacement et de son sens, c'est-à-dire une fonction de $y - x$, $p\,(y - x)$. Dans le cas examiné par Lord Rayleigh, des déplacements égaux en valeur absolue et de sens contraire avaient la même probabilité, la généralisation la plus immédiate consisterait donc à supposer que $p\,(z)$ est une fonction paire de z. Mais nous allons considérer aussi le cas général.

Si nous prenons pour $Y(y)$ la fonction y on aura $\mathfrak{M}\,X^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,P^{(n)}\,(y - x)\,dy$.

Mais, sans rien changer à la question de l'*existence* d'une limite du premier membre, on a profit à en retrancher une certaine quantité indépendante de n, qui lui donnera une signification concrète plus simple et d'un plus grand intérêt physique. Posons en effet

$$(23)\qquad V^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)\,P^{(n)}\,(y-x)\,dy = \mathfrak{M}\,X^{(n)}\,(x) - x\int_{-\infty}^{+\infty} P^{(n)}\,(y-x)\,dy$$
$$= [\mathfrak{M}\,X^{(n)}\,(x)] - x$$

$V^{(n)}$ est la valeur moyenne du déplacement résultant $y - x$ après la $n^{\text{ème}}$ opération à partir de l'abscisse x. On a

$$V = V^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)\,p\,(y-x)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} u\,p\,(u)\,du\,;$$ valeur indépendante de la position initiale x mais qui n'a pas nécessairement une valeur déterminée et finie. Supposons $p\,(u)$ tel que cette intégrale soit finie ainsi que celles qui interviennent par la suite. V est «le premier moment» de $p\,(u)$. De même

$$V^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)\,P^{(n)}\,(x, y)\,dy.$$

Or:

$$P^{(2)}\,(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p\,(z-x)\,p(y-z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} p\,(u)\,p\,(y-x-u)\,du.$$

En posant:

$$p^{(2)}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(u)\,p(t-u)\,du$$

on aura

$$P^{(2)}(x,y)=p^{(2)}(y-x).$$

De même, en posant

$$p^{(n)}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} p^{(n-1)}(u)\,p(t-u)\,du,$$

si l'on a pour $m<n$, $P^{(m)}(x,y)=p^{(m)}(y-x)$, alors

$$P^{(n)}(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty} P^{(n-1)}(z-x)\,p(y-z)\,dz=\int_{-\infty}^{+\infty} p^{(n-1)}(u)\,p(y-x-u)\,du$$

et l'on a

$$P^{(n)}(x,y)=p^{(n)}(y-x).$$

Donc:

$$V^{(n)}=\int_{-\infty}^{+\infty}(y-x)\,p^{(n)}(y-x)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty} u\,p^{(n)}(u)\,du$$

$$=\int u\left[\int p^{(n-1)}(t)\,p(u-t)\,dt\right]du=\int p^{(n-1)}(t)\left[\int u\,p(u-t)\,du\right]dt$$

$$=\int p^{(n-1)}(t)\left[\int(t+v)\,p(v)\,dv\right]dt=\int p^{(n-1)}(t)\,[t+V^{(1)}]\,dt=V^{(n-1)}+V^{(1)}.$$

Ainsi $\quad V^{(1)}=V^{(n)}-V^{(n-1)}=V^{(n-1)}-V^{(n-2)}=\ldots=V^{(2)}-V^{(1)}.$

D'où en ajoutant:

$$V^{(n)}=nV. \tag{24}$$

Si $p(u)$ est une fonction paire, $V=\int_{-\infty}^{+\infty} u\,p(u)\,du$ sera nul. Dans le cas contraire, V sera en général $\neq 0$. Les deux cas seront très différents:

I. Si $V=0$, $V^{(n)}$ sera nul quel que soit n et, naturellement, tendra vers zéro avec $\dfrac{1}{n}$.

II. Si $V\neq 0$, $V^{(n)}$ croîtra indéfiniment en valeur absolue et gardera le même signe.

On peut dire qu'en moyenne au cours d'une suite infinie d'épreuves: ou bien la molécule oscillera sur place — c'est le cas de Lord Rayleigh — ou bien elle s'éloignera indéfiniment.

D'ailleurs, on a: d'après (23) et (24)

$$\mathfrak{M}\, X^{(n)}(x) = x + nV.$$

De sorte que si $V = 0$, $\mathfrak{M}\, X^{(n)}(x)$ reste égal à x, quand n croît et si $V \neq 0$, $\mathfrak{M}\, X^{(n)}(x)$ tend vers l'infini.

Observons que, dans le cas actuel, la condition (T′) étant vérifiée et le domaine des états possibles étant de mesure infinie, $P^{(n)}(x, y)$ ne peut tendre vers une limite indépendante de l'état initial que s'il tend vers zéro (p. 224). De sorte que, sauf le cas particulier où $V = 0$, on n'aura pas

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}\, X^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(y)\, P(y)\, dy,$$

puisque le premier membre est infini.

Notons d'autre part ce résultat intéressant que nous avons pu obtenir l'expression de $V^{(n)}$ en fonction explicite de n sans avoir besoin de connaître la densité de probabilité pour une épreuve, c'est-à-dire indépendamment de la fonction $p(u)$.

Effet de la condition (T′). Dans le cas le plus régulier, celui où $P(F)$ est une constante sur V', on a

$P(F) = \dfrac{1}{\text{mes. } V}$. La formule (22) devient $M = \lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{M}\, X^{(n)}(E) = \dfrac{\int_V Y(F)\, dF}{\int_V dF}$.

Ainsi, dans le cas le plus régulier, M est, comme dans le cas régulier, indépendant de E, mais, au lieu d'être simplement une valeur moyenne de $Y(F)$ au sens du Calcul des Probabilités, c'est-à-dire une moyenne pondérée, c'est une valeur moyenne de $Y(F)$ au sens du Calcul Intégral.

Nous savons d'ailleurs que si le cas le plus régulier ne peut se présenter que sur un domaine fini, la condition (T′) peut avoir lieu sur un domaine illimité. Dans ce cas, plusieurs circonstances peuvent se produire dont nous avons rencontré des exemples plus haut. Par exemple, dans le cas de la p. 233, si $\int_{-\infty}^{+\infty} u\, p(u)\, du \neq 0$, $\mathfrak{M}\, X^{(n)}(x)$ tend vers l'infini, pour $Y(y) \equiv y$. Si l'on prend $p(u) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$, alors, dans le cas, où $Y(y) \equiv y$, $\mathfrak{M}\, X^{(n)}(x)$ tend vers une limite, mais cette limite n'est pas indépendante de l'état initial, tandis que si $Y(y)$ est sommable, non seulement $\mathfrak{M}\, X^{(n)}(x)$ tend vers une limite indépendante de l'état initial, mais cette limite étant nulle est indépendante de la fonction $Y(y)$ et l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(y)\, P^{(n)}(x, y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(y)\, [\lim_{n\to\infty} P^{(n)}(x, y)]\, dy$$

ce qui n'avait pas lieu dans les deux cas précédents.

M. Hostinsky a étudié également le résultat de la condition (T′) dans l'effet d'un grand nombre de rotations aléatoires d'une roulette ou d'une sphère (I, p. 51).

Moyennes arithmétiques. Nous avons vu que, dans le cas régulier, si, par exemple, $Y(F)$ est bornée sur V, la quantité

$$\mathfrak{M}\, X^{(n)}(E) = \int_V P^{(n)}(E, F)\; Y(F)\, dF$$

tend vers la quantité

$$M = \int_V P(F)\; Y(F)\, dF.$$

On peut aussi donner une autre interprétation de M, en appelant $M^{(n)}(E)$ la valeur moyenne de la moyenne arithmétique

$$A^{(n)}(E) = \frac{X^{(1)}(E) + \;\ldots\ldots\; + X^{(n)}(\mathrm{E})}{n}\,.$$

On voit en effet que $M^{(n)}(E)$ est la moyenne arithmétique de la somme des n premiers termes d'une suite de nombres $\mathfrak{M}\, X^{(t)}(E)$ qui tendent vers M. On a donc:

$$M = \lim_{n\to\infty} M^{(n)}(E)$$

et on voit que cette limite est indépendante de E.

L'existence de la limite est ici établie dans le cas régulier; il est vraisemblable qu'elle subsiste dans des cas plus généraux.

Nous allons particulariser ce qui précède, au cas où $X^{(n)}(E)$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

Fréquences moyennes. Appelons encore *répétition* d'un événement A au cours de n épreuves, le nombre R de fois que A se produit et *fréquence* f de cet événement le rapport $\frac{R}{n}$.

Appliquons au cas où l'événement A consiste en ce que le système matériel étudié se trouve dans l'un des états F appartenant à une portion v du domaine V des états possibles, et ceci en partant de l'état initial E. Alors en employant des notations analogues à celles de la p. 215, on aura:

$$\mathfrak{M}\, R_v^{(n)}(E) = \sum_{t=1}^{t=n} \omega_v^{(t)}(E) = \sum_{t=1}^{t=n} \int_v P^{(t)}(E, F)\, dF.$$

Et on aura pour la valeur moyenne de la fréquence $f_v^{(n)}(E)$ avec laquelle on passera au cours des n premières épreuves par un des états de v, à partir de l'état E

$$\mathfrak{M}\, f_v^{(n)}(E) = \int_v \pi^{(n)}(E, F)\, dF$$

où $\quad \pi^{(n)}(E, F) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{t=n} P^{(t)}(E, F)$. Donc:

$$\mathfrak{M}\, f_v^{(n)}(E) - \int_v p(F)\, dF = \frac{1}{n}\int_v \sum_{t=1}^{t=n} [P^{(t)}(E, F) - p(F)]\, dF = H_n - K_n,$$

où:

$$\begin{aligned} H_n &= \frac{1}{n}\int_v \sum_{t=1}^{t=n} [P^{(t)}(E, F) - p^{(t)}(F)]\, dF \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{t=n}\left[\int_V P^{(t)}(E, F)\, dF - \int_V p^{(t)}(F)\, dF\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{t=n}\left[1 - \int_V p^{(t)}(F)\, dF\right] \end{aligned}$$

et

$$K_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{t=n}\int_v [p(F) - p^{(t)}(F)]\, dF \leq \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{t=n}\left[\int_V p(F)\, dF - \int_V p^{(t)}(F)\, dF\right].$$

Dans tous les cas $\int_V p^{(t)}(F)\, dF$ tend vers $\int_V p(F)\, dF$ quand t croît, donc K_n tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. Dans le cas régulier, $\int_V p^{(t)}(F)\, dF$ tend vers 1 quand t croît, donc H_n tend aussi vers zéro.

Ainsi, *dans le cas régulier, la fréquence moyenne* $\mathfrak{M}\, f_v^{(n)}(E)$ *tend vers une limite quand* n *croît indéfiniment et cette limite est:* $\int_v P(F)\, dF$ *qui est indépendante de* E. (Par analogie avec ce qui se passe dans le cas d'un nombre fini d'états possibles (IV, p. 18), on est porté à penser que la première partie de cet énoncé s'étend au cas singulier et que la seconde partie s'étend à certains cas singuliers — prévision confirmée dans la note V après rédaction du présent mémoire —.)

Dispersion

Nous jugerons des dispersions des variables aléatoires qui viennent d'être étudiées en calculant leurs écarts quadratiques moyens.

I° Dispersion d'une variable aléatoire. Pour mesurer la dispersion de $X^{(n)}(E)$, calculons d'abord son écart quadratique moyen $\mu^{(n)}(E)$. On a

$$(25)\qquad [\mu^{(n)}(E)]^2 = \int\limits_V P^{(n)}(E, F)\,[Y(F) - \mathfrak{M}\,X^{(n)}(E)]^2\,dF$$

$$= \int\limits_V Y^2(F)\,P^{(n)}(E, F)\,dF - \left[\int\limits_V Y(F)\,P^{(n)}(E, F)\,dF\right]^2.$$

De la relation

$$[\mu^{(n)}(E)]^2 = \mathfrak{M}\,[X^{(n)}(E)]^2 - [\mathfrak{M}\,X^{(n)}(E)]^2$$

et du résultat établi plus haut p. 231, et appliqué à $Y(F)$ et $Y^2(F)$, on déduit, que: dans le cas régulier, la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{M}\,X^{(n)}(E)$ et $\mu^{(n)}(E)$ convergent uniformément, quand E varie sur V, vers des limites indépendantes de l'état initial E, est que $Y(F)$ soit borné sur E, ou que, pour une valeur assez grande de n, $\mathfrak{M}\,X^{(n)}(E)$ et $\mathfrak{M}\,[X^{(n)}(E)]^2$ soient bornés quand E varie sur V.

Un cas où $Y(E)$ n'est pas borné et où l'on peut cependant, s'assurer, sans itération, que cette double condition est satisfaite est celui où pour au moins une valeur de n, $P^{(n)}(E, F)$ a une borne supérieure finie quand E, F varient sur V et où $Y^2(F)$ est sommable sur V. (On sait qu'alors $Y(F)$ est aussi sommable sur V).

Il est clair que dans ces deux cas, la limite μ de l'écart quadratique moyen $\mu^{(n)}(E)$ est elle-même un écart quadratique moyen, à savoir celui qu'aurait $Y(F)$ si $P^{(n)}(E, F)$ était remplacé par $P(F)$. Car on a

$$\mu^2 = \int\limits_V P(F)\,[Y(F) - M]^2\,dF = \int\limits_V P(F)\,Y^2(F)\,dF - \left[\int\limits_V P(F)\,Y(F)\,dF\right]^2.$$

Pour simplifier, nous allons pour la suite nous contenter de conditions suffisantes; nous supposerons, qu'on est dans le cas régulier et que $Y(F)$ est borné sur V (ou bien que $Y^2(F)$ est sommable sur V et que $P^{(n)}(E, F)$ est pour n assez grand, borné supérieurement quand E, F varient sur V).

On déduit de $\mu^{(n)}(E)$ la valeur de l'écart quadratique moyen $\lambda^{(n)}(E)$ de $X^{(n)}(E)$ avec M. Car

$$[\lambda^{(n)}(E)]^2 = [\mu^{(n)}(E)]^2 + [\mathfrak{M}\, X^{(n)}(E) - M]^2.$$

Par suite, quand n croît indéfiniment, $\lambda^{(n)}(E)$ qui reste $\geqq \mu^{(n)}(E)$, tend vers la même limite μ indépendante de E.

Dispersion de la moyenne arithmétique. De même, appelons $\varrho^{(n)}(E)$ et $\delta^{(n)}(E)$, les écarts quadratiques moyens de $A^{(n)}(E)$ avec sa moyenne $M^{(n)}(E)$ et avec la limite M de cette moyenne. On a[6])

$$n\,[\delta^{(n)}(E)]^2 = \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{u=n} [\lambda^{(u)}(E)]^2 + L^{(n)}.$$

Le premier terme du second membre tend vers μ^2 quand n croît indéfiniment. Reste à étudier

$$\begin{aligned} L^{(n)} &\equiv \frac{2}{n}\sum_{u<v\leqq n} \mathfrak{M}\,[X^{(u)}(E) - M]\,[X^{(v)}(E) - M] \\ &= 2\int_V [X(F) - M]\left[\int_V [X(G) - M]\, R^{(n)}(F, G, E)\, dG\right] dF \end{aligned}$$

avec $R^{(n)}(F, G, E) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{u<v\leqq n} P^{(u)}(E, F)\, P^{(v-u)}(F, G)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n}\Big\{P^{(1)}(E,F)P^{(1)}(F,G) + [P^{(1)}(E,F)P^{(2)}(F,G) + P^{(2)}(E,F)P^{(1)}(F,G)] + \ldots \\ &\quad \ldots + [P^{(1)}(E,F)\,P^{(n-1)}(F,G) + \ldots\ldots + P^{(n-1)}(E,F)\,P^{(1)}(F,G)]\Big\} \\ &= [S^{(n)}(F, G, E) + T^{(n)}(F, G, E)] \end{aligned}$$

où $S^{(n)}$ et $T^{(n)}$ s'obtiennent en remplaçant dans $R^{(n)}$ les $P^{(k)}(F, G)$ respectivement par $P^{(k)}(F, G) - P(G)$ et par $P(G)$. On pourra dans $L^{(n)}$ remplacer $R^{(n)}$ par $S^{(n)}$, car le terme négligé dans $L^{(n)}$ sera

$$\begin{aligned} &\sum_{u<v\leqq n} \frac{2}{n}\int_V [X(F) - M]\int_V [X(G) - M]\, P^{(u)}(E, F)\, P(G)\, dF\, dG \\ &= \sum_{u<v\leqq n} \frac{2}{n}\int_V [X(F) - M]\, P^{(u)}(E, F)\, dF \cdot \int_V [X(G) - M]\, P(G)\, dG \end{aligned}$$

où la dernière intégrale est nulle.

[6]) Pour un calcul et des raisonnements analogues à ceux qui suivent, mais un peu plus détaillés, voir IV, p. 23.

Or $S^{(n)}$ est le produit par $\frac{n-1}{n}$ de la moyenne arithmétique des $n-1$ premiers termes de la série $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$ où

$$\alpha_n = P^{(1)}(E, F)\,\omega^{(n)}(F, G) + \ \ldots\ + P^{(n-1)}(E, F)\,\omega^{(1)}(F, G)$$

avec $\omega^{(u)}(F, G) \equiv P^{(u)}(F, G) - P(G)$. Si on démontre que α_n tend vers α, il sera prouvé que $S^{(n)}$ tend vers α.

Supposons encore, pour simplifier, que non seulement l'un des $P^{(n)}(E, F)$ mais $p(E, F)$ ait une borne supérieure finie quand E, F varient indépendamment sur V. Alors, dans le cas régulier, $P^{(n)}(E, F)$ tend uniformément vers $P(F)$ et la série $\sum\limits_{n} |\omega^{(n)}(F, G)|$ est bornée et uniformément convergente. Dès lors α_n tend uniformément vers

$$S(F, G) \equiv P(F) \sum_{n=1}^{n=+\infty} \omega^{(n)}(F, G) = P(F)\, s(F, G).$$

Par suite

$$\text{(26)} \qquad \lim_{n \to \infty} n\,[\delta^{(n)}(E)]^2 = \mu'^{\,2}$$

avec

$$\mu'^{\,2} = \mu^2 + L$$

où

$$L = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_V [X(F) - M]\, P(F) \left\{ \int [X(G) - M]\,[P^{(n)}(F, G) - P(G)]\, dG \right\} dF.$$

On peut aussi écrire

$$\text{(27)} \qquad \mu'^2 = \int_V P(F)\,[X(F) - M]^2\, dF + 2 \int_V [X(F) - M] \left\{ \int_V [X(G) - M]\, S(F, G)\, dG \right\} dF.$$

D'autre part, on a évidemment

$$\text{(28)} \qquad n\,[\delta^{(n)}(E)]^2 = n\,[\rho^{(n)}(E)]^2 + n\,[M^{(n)}(E) - M]^2$$

Et

$$\sqrt{n}\,|M^{(n)}(E)-M| = \sqrt{n}\left|\sum_{u=1}^{u=n}\frac{1}{n}\int[P^{(u)}(E,F)-P(F)]\,X(F)\,dF\right|$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{u=1}^{u=n} A\,q^u \int |X(F)|\,dF$$

puisque, dans le cas actuel, les $|P^{(u)}(E,F)-P(F)|$ sont inférieurs aux termes d'une série convergente $\sum\limits_u A\,q^u$

Finalement on a:

$$\lim_{n\to\infty} n\,[\delta^{(n)}(E)]^2 = \mu'^{\,2}. \tag{29}$$

Ainsi, lorsque n croît indéfiniment, non seulement $\delta^{(n)}(E)$ tend vers zéro, mais nous connaissons maintenant sa partie principale $\frac{\mu'}{\sqrt{n}}$.

Retour à l'exemple. Il n'est pas impossible d'étudier le comportement de la dispersion en dehors du cas régulier. Reprenons l'exemple de Lord Rayleigh et les notations de la p. 233, pour calculer la dispersion du déplacement $y-x$. Soit $\theta_x^{(n)}$ l'écart quadratique moyen du déplacement à partir de l'abscisse x après n chocs. On aura

$$[\theta_x^{(n)}]^2 = \int (y-x-V^{(n)})^2\,P^{(n)}(x.y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}[u-V^{(n)}]^2\,p^{(n)}(u)\,du.$$

C'est une quantité, $[\theta^{(n)}]^2$, indépendante de la position initiale x.

On a:

$$[\theta^{(n)}]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\,p^{(n)}(u)\,du - [V^{(n)}]^2 = \alpha_n - n^2\,V^2.$$

Or

$$\int u^2\,p^{(n)}(u)\,du = \int u^2\left[\int p^{(n-1)}(t)\,p\,(u-t)\,dt\right]du =$$
$$\int p^{(n-1)}(t)\left[\int u^2\,p\,(u-t)\,du\right]dt$$

et

$$\int u^2\,p\,(u-t)\,du = \int (t+v)^2\,p\,(v)\,dv = t^2 + 2\,t\int v\,p\,(v)\,dv + \int v^2\,p\,(v)\,dv$$
$$= t^2 + 2\,t\,V + W \qquad \text{avec } W = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2\,p\,(v)\,dv.$$

$\theta^{(n)}$ sera fini si $\int_{-\infty}^{+\infty} v\,p(v)\,dv$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} v^2 p(v)\,dv$ sont finis *ce que nous allons supposer.*

Alors

$$\alpha_n = \int p^{(n-1)}(t)\,[t^2 + 2\,t\,V + W]\,dt = \alpha_{n-1} + 2\,(n-1)\,V^2 + W$$

d'où

$$[\theta^{(n)}]^2 - [\theta^{(n-1)}]^2 = (\alpha_n - \alpha_{n-1}) - [n^2 - (n-1)^2]\,V^2 = W - V^2, \text{ avec}$$

$[\theta^{(1)}]^2 = W - V^2$. Donc

$$[\theta^{(n)}]^2 = n\,[\theta^{(1)}]^2,$$

$$\theta^{(n)} = \theta^{(1)}\sqrt{n} \qquad \text{et } \theta^{(1)} = \sqrt{W - V^2}.$$

Sous la condition que le premier et le deuxième moments, V et W, de $p(u)$ soient finis, on a généralisé le résultat établi par Lord Rayleigh dans le cas de déplacement finis, constants et égaux, à savoir que $\theta^{(n)}$ est proportionnel à $\sqrt{n}$.

Observons qui si l'on prend pour $Y(y)$, la fonction y, on a $y - \mathfrak{M}\,X^{(n)}(x) = y - x - V^{(n)}$ et par suite l'écart quadratique moyen $\mu^{(n)}$ de $X^{(n)}(x)$ est aussi égal à $\theta^{(n)}$. On a donc ici un exemple d'un cas quasi-régulier mais non régulier. Et ici $\mu^{(n)}$ au lieu de tendre vers une limite, croît indéfiniment.

II° Dispersion des fréquences. Il y a plusieurs fréquences à distinguer. La fréquence $F_v^{(n,N)}(E)$ avec laquelle dans N groupes de n épreuves, on aboutit à la $n^{\text{ème}}$ épreuve à un état appartenant au domaine v après être parti initialement de l'état E, a pour valeur moyenne la probabilité $\omega_v^{(n)}(E) = \int_v P^{(n)}(E, F)\,dF$ de cet événement. Et son écart quadratique moyen est, comme on sait, la quantité $\mathcal{F}_v^{(n,N)}(E) = \sqrt{\dfrac{\omega_v^{(n)}(E)\,[1 - \omega_v^{(n)}(E)]}{N}}$.

On voit qu'on aura dans le cas régulier

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}\,F_v^{(n,N)}(E) = \int_v P(F)\,dF$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_v^{(n,N)}(E) = \sqrt{\frac{[\int_v P(F)\,dF]\,[\int_{V-v} P(F)\,dF]}{N}}\,.$$

La première limite ne dépend ni de n, ni de N, ni de l'état initial E; la seconde ne dépend ni de n, ni de E.

Passons maintenant à l'écart quadratique moyen $\mathcal{E}_v^{(n)}(E)$ de la fréquence $f_v^{(n)}(E)$. Les limites des valeurs moyennes de $F_v^{(n,N)}(E)$ et de $f_v^{(n)}(E)$ (p. 237) sont les mêmes, quel que soit N, lorsque n croît indéfiniment; il n'en est pas de même de leur dispersion.

On aura avantage à calculer d'abord l'écart quadratique moyen $\mathcal{G}_v^{(n)}(E)$ de $f_v^{(n)}(E)$ avec la limite $p_v = \int_v P(F)\,dF$ de la valeur moyenne de $f_v^{(n)}(E)$. On aura évidemment

$$[\mathcal{G}_v^{(n)}(E)]^2 = [\mathcal{E}_v^{(n)}(E)]^2 + [\mathfrak{M}\, f_v^{(n)}(E) - p_v]^2. \tag{30}$$

On connaît déjà le dernier terme

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{t=n}\int_v P^{(t)}(E,F)\,dF - p_v\right]^2 = \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{t=1}^{t=n}\int_v [P^{(t)}(E,F) - P(F)]\,dF\right\}^2$$

et on sait que si, pour simplifier, on suppose que $p(E,F)$ a une borne supérieure finie quand E, F varient sur V, l'accolade tend, quand n croît, vers une limite finie $\int_v s(E,F)\,dF$.

En ce qui concerne $\mathcal{E}_v^{(n)}$ on pourrait le calculer directement. Mais, il est clair que si $X(F) = 1$ ou 0 suivant que F se trouve ou non sur v, $A_E^{(n)}$, $M^{(n)}(E)$, M, $\delta^{(n)}(E)$ se réduiront à $f_v^{(n)}(E)$, $\mathfrak{M}\, f_v^{(n)}(E)$, p_v, $\mathcal{G}_v^{(n)}$. Alors d'après les formules (26), (27), on a

$$\lim_{n\to\infty} n\,[\mathcal{G}_v^{(n)}(E)]^2 = K^2 + H$$

avec:

$$K^2 = \int_v P(F)\,dF - \left[\int_v P(F)\,dF\right]^2, \quad \text{ou } K^2 = p_v(1 - p_v)$$

et

$$\begin{aligned}
H = {} & 2\int_v (1-p_v)\int_v (1-p_v)\,S(F,G)\,dG\,dF + 2\int_{V-v}(-p_v)\int_v (1-p_v)\,S(F,G)\,dG\,dF \\
& + 2\int_v (1-p_v)\int_{V-v}(-p_v)\,S(F,G)\,dG\,dF + 2\int_{V-v}(-p_v)\int_{V-v}(-p_v)\,S(F,G)\,dG\,dF \\
= {} & 2(1-p_v)^2\int_v\int_v S(F,G)\,dG\,dF + 2(p_v)^2\int_{V-v}\int_{V-v} S(F,G)\,dG\,dF \\
& - 2p_v(1-p_v)\left[\int_v\int_{V-v} S(F,G)\,dG\,dF + \int_{V-v}\int_v S(F,G)\,dG\,dF\right].
\end{aligned}$$

D'ailleurs, on a, avec convergence uniforme

$$\int_V S(F,G)\,dG = \sum_{t=1}^{t=+\infty} \int_V P(F)\,[P^{(t)}(F,G) - P(G)]\,dG$$

$$= \sum_{t=1}^{t=+\infty} P(F)\left[\int_V P^{(t)}(F,G)\,dG - \int_V P(G)\,dG\right] = \sum_{t=1}^{t=+\infty} P(F)\,[1-1] = 0,$$

et d'après $(\mathcal{J}_m)$

$$\int_V S(F,G)\,dF = \sum_{t=1}^{t=\infty}\left[\int_V P(F)\,P^{(t)}(F,G)\,dF - P(G)\int_V P(F)\,dF\right]$$

$$= \sum_{t=1}^{t=\infty}[P(G) - P(G)] = 0.$$

Dès lors $\int_{V-v} S(F,G)\,dG = -\int_v S(F,G)\,dG$, $\int_{V-v} S(F,G)\,dF = -\int_v S(F,G)\,dF$

et H se réduit à :

$$2(1-p_v)^2\int_v\left[\int_v S(F,G)\,dG\right]dF - 2(p_v)^2\int_{V-v}\left[\int_v S(F,G)\,dG\right]dF$$

$$-2p_v(1-p_v)\left\{-\int_v\left[\int_v S(F,G)\,dG\right]dF + \int_{V-v}\left[\int_v S(F,G)\,dG\right]dF\right\}$$

$$= 2\left\{(1-p_v)\int_v\left[\int_v S(F,G)\,dG\right]dF - p_v\int_{V-v}\left[\int_v S(F,G)\,dG\right]dF\right\}$$

$$= 2\left\{\int_v\int_v S(F,G)\,dG\,dF - p_v\int_v\left[\int_v S(F,G)\,dF + \int_{V-v} S(F,G)\,dF\right]dG\right\}$$

$$= 2\int_v\left[\int_v S(F,G)\,dF - p_v)\int_V S(F,G)\,dF\right]dG$$

$$= 2\int_v\int_v S(F,G)\,dG\,dF.$$

Car $\int_v\left[\int_V S(F,G)\,dF\right]dG = \int_V\left[\int_v S(F,G)\,dG\right]dF = 0.$

Ainsi $H = 2\int_v\int_v S(F,G)\,dG\,dF.$

Il résulte alors de la formule (26), qu'on aura, non seulement $\mathcal{G}_v^{(n)}(E) \geq \mathcal{E}_v^{(n)}(E)$, mais encore

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n}\, \mathcal{G}_v^{(n)}(E) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{n}\, \mathcal{E}_v^{(n)}(E) = \sqrt{K^2 + H}$$

$$= \sqrt{p_v(1-p_v) + 2 \int_v \int_v P(F)\, s(F, G)\, dG\, dF}\,.$$

(Reçu le 23 avril 1932)

Références bibliographiques

I° *B. Hostinsky:* Méthodes générales du calcul des probabilités. 66 pages, Gauthier-Villars, 1931. Voir aussi:

Ibis le texte des conférences de M. Hostinsky en cours d'impression dans les Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1932, vol. III, pp. 1—74.

II° *E. Goursat:* Cours d'analyse. T. III, Gauthier-Villars, 2me éd., 1915.

III° *Ch. J. de la Vallée-Poussin:* Cours d'analyse infinitésimale. T. II, Gauthier-Villars, 2me éd., 1912.

IV° *M. Fréchet:* Compléments à la théorie des probabilités discontinues «en chaîne». Annali R. Scuole N. S. Pisa, 1932, pp. 1—30.

V° *M. Fréchet:* Sur le comportement de certains noyaux de Fredholm itérés et sur les probabilités «en chaîne». C. R., t. 195, 1932, p. 590—592.

VI° *M. Fréchet:* On the behaviour when *n* becomes infinite of the *n*-th iterate of a Fredholm's kernel. Proceedings of the Amer. Nat. Acad., Washington, 1932.

VII° *M. Fréchet:* Sur la solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités «en chaîne». C. R., t. 195, 1932, p. 639—641.

M. Fréchet: Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités. Bull. Soc. Math. France, t. LX, 1932.