

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 5 (1933)

Artikel: La propagation des ondes et les caustiques.
Autor: Hadamard, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-6659>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

La propagation des ondes et les caustiques

par J. HADAMARD, Paris

Le présent travail fait suite à ceux que nous avons publiés sur le principe de Huygens — ou, plus exactement, sur la „majeure de Huygens“ — pour les équations à trois variables indépendantes, et particulièrement ¹⁾ à ceux qui ont été insérés au *Journal de Mathématiques* en 1929 et aux *Acta Mathematica* en 1930 ²⁾, lesquels seront respectivement désignés par les abréviations *JM* et *A₂*.

Le premier de ces deux Mémoires était consacré au théorème d'addition intégral qui résulte de la majeure de Huygens, dans l'hypothèse où, entre leurs points extrêmes, les ondes considérées ne présentent aucune singularité, autrement dit, n'ont pas de points communs avec une caustique. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, d'examiner ce qui se passe lorsqu'on renonce à cette hypothèse.

L'onde rétrograde issue d'un point *o* et relative à une équation linéaire du second ordre hyperbolique

$$(E) \quad F(u) = \sum_{i,j=1,2,3} A^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1,2,3} B^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + Cu = \varphi$$

ou plutôt la nappe conique Γ_0 qui la représente dans l'espace à trois dimensions sera donc, comme précédemment, coupée par deux surfaces successives S_1, S_2 (fig. 1) ayant toutes deux, en chacun de leurs points, une orientation d'espace et qui délimiteront avec elle deux régions bornées de l'espace. Dans la première de ces deux régions, on admettra encore, comme nous l'avons fait jusqu'ici, que tout point peut être joint au point *o* par une géodésique bien déterminée de l'élément linéaire

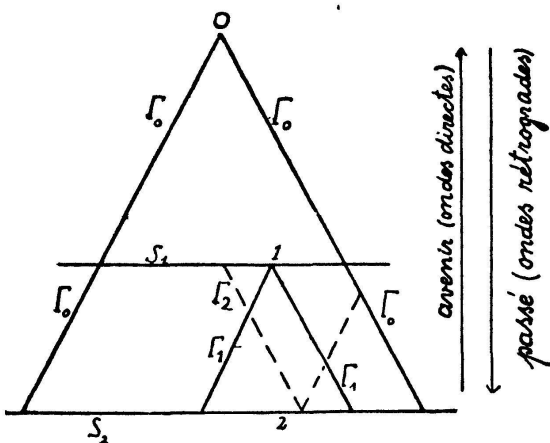


Fig. 1.

$$H(dx^1, dx^2, dx^3; x^1, x^2, x^3) = \sum H_{ij} dx^i dx^j$$

¹⁾ Voir aussi Bulletin Soc. Math. Fr., tome LII (1924), p. 141.

²⁾ Journal de Math., t. VIII (volume publié en l'honneur de MM. Appell et Picard, 1929), p. 197; Acta Math. t. LIV (volume publié en hommage à Fredholm, 1930) p. 247.

qui correspond à l'équation ³⁾, de sorte que le déterminant fonctionnel désigné par J dans nos Leçons de Yale ⁴⁾ sera différent de zéro dans la région en question, partout ailleurs qu'au sommet du conoïde et que la quantité Γ_0 , carré de la distance géodésique à ce sommet, aura partout une valeur déterminée. C'est ce que nous appellerons l'hypothèse α .

Nous continuerons également à admettre une hypothèse analogue — dite hypothèse β — en ce qui concerne la nappe de conoïde rétrograde issue d'un point quelconque 1 de S_1 , dans toute la région limitée par cette nappe et la surface S_2 et, de même ⁵⁾, pour la nappe directe de conoïde ayant pour sommet un point quelconque 2 de S_2 dans toute la région délimitée par cette nappe et la surface S_1 .

Par contre, nous avons également admis, dans nos travaux antérieurs et, en particulier, dans JM , que les choses se passaient de même pour le conoïde rétrograde de sommet 0, jusques et y compris sa rencontre avec S_2 . C'est cette dernière hypothèse — dite hypothèse γ — qui ne sera plus maintenue dans le travail actuel. Au niveau de la surface S_2 , le déterminant fonctionnel J (toujours formé à partir du point 0) sera susceptible de s'annuler, et la quantité Γ_{02} pourra cesser d'être une fonction bien déterminée et régulière des coordonnées du point 2. Si ces circonstances se produisent à l'intérieur du conoïde Γ_0 , elles ne donnent lieu, comme nous le verrons (Cf. 12), à aucune difficulté ; nous aurons, au contraire, à les étudier spécialement lorsqu'elles intéressent la nappe conoïdale elle-même, représentative de l'onde rétrograde issue de 0, c'est-à-dire lorsque celle-ci ou, plus généralement, une onde incidente ⁶⁾ quelconque (voir plus loin n° 7) présente une caustique qui rencontre la surface S_2 . Nous devons, à cet effet, utiliser l'étude géométrique qui a été faite de ce nouveau cas dans le Mémoire A_2 , Mémoire dont, en conséquence, les résultats serviront de base à ce qui va suivre.

Nous avons même à compléter sur quelques points ces remarques géométriques. Les notations de A_2 et de JM n'étant pas les mêmes, je préfère, pour plus de clarté, commencer par donner, en me plaçant dans la

³⁾ Voir nos Lectures on Cauchy's problem, Cambridge New Hawen, nos 55 à 56. Traduction française, Paris, Hermann, 1932, p. 117—119.

⁴⁾ Lectures on Cauchy's problem, Livre II, n° 57bis, p. 122—123 de l'édition française.

⁵⁾ Ces deux parties de l'hypothèse β sont, dans une certaine mesure (mais dans une certaine mesure seulement), équivalentes l'une à l'autre, en ce sens que le déterminant fonctionnel analogue à J , formé à l'aide des deux points 1 et 2, est le même, à un facteur près différent de zéro, quel que soit celui de ces deux points que l'on considère comme point de départ, ainsi qu'il résulte du n° 170 de nos Leçons sur le problème de Cauchy (p. 374—377 de l'édition française).

⁶⁾ Comme nous l'avons dit ($J. M.$, note de la p. 220), il s'agit d'une onde incidente rétrograde.

première d'entre elles, les indications complémentaires pour lesquelles elle convient particulièrement.

I.

1. Prenons donc tout d'abord, comme dans A_2 , pour axe des x une bicaractéristique située sur l'onde incidente I_0 ; pour plan des $x y$, une caractéristique régulière admettant cette bicaractéristique —, de sorte qu'on peut écrire une intégrale complète régulière

$$z = F(x, y, \alpha, \beta)$$

telle que le second membre s'annule identiquement en x, y pour $\alpha = \beta = 0$ —, l'onde incidente I_0 étant la détermination de l'intégrale générale que l'on obtient en prenant α variable et β identiquement nul et, par conséquent, en éliminant α entre les équations $z = F(x, y, \alpha, 0)$ et

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x, y, \alpha, 0) = 0.$$

De plus, la bicaractéristique définie par les deux équations précédentes pour $\alpha = 0$, est supposée être l'axe des x .

Une autre caractéristique se raccordant avec les premières tout le long de cet axe s'obtiendra comme enveloppe de la surface

$$z = \Phi(x, y, \alpha) = F[x, y, \alpha, g(\alpha)]$$

obtenue en remplaçant, dans l'intégrale complète, β par la fonction (nulle à l'origine ainsi que sa dérivée)

$$(2) \quad \beta = g(\alpha).$$

Entre deux surfaces de cette espèce, correspondant à deux choix différents de la fonction (2), le contact est du même ordre tout le long de la bicaractéristique et du même ordre que celui du contact entre les deux courbes (2). On peut même préciser d'une manière assez remarquable la manière dont la courbure d^2z/dy^2 dépend de x ou, plutôt, dépend simultanément de x et du choix de la fonction g . Celle-ci interviendra par sa dérivée seconde initiale $g''(0) = \mu$ et l'on aura

$$(3) \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{A}{B + \mu}$$

les quantités A , B dépendant de x , mais non du choix de la fonction g .

En effet, la combinaison des deux formules (7) et (9) du Mémoire A_2 donne, pour $d^2 z/dy^2$, la valeur

$$(3') \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}\right)}.$$

Ici, le premier terme est nul, puisque, dans notre système de coordonnées actuel, $z = \Phi$ est représentée par un plan. D'autre part, toujours en raison de $g'(0) = 0$, la valeur de $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial y}$ se réduit à $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial y}$, celle de $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}$ à $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial F}{\partial \beta} g''$, d'où

$$(3'') \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = - \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial F}{\partial \beta} g''}$$

ce qui donne bien, pour la courbure en question, une expression de la forme (3).

Au reste, le même fait ressort de la théorie générale des caractéristiques. Celle-ci nous apprend ⁷⁾ que pour une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$A(x, y, z, p, q) = 0$$

(qu'il convient à cet effet de remplacer par l'équation

$$r \frac{\partial A}{\partial p} + s \frac{\partial A}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial x} + p \frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

que l'on en déduit par une différentiation), la variation de r le long d'une bicaractéristique obéit à une équation de Riccati. En l'espèce, cette

⁷⁾ *Goursat*, Ann. Fac. Sc. Toulouse, 2^{ème} série, t. VIII (1906), p. 427 et suiv., parti, culièrement, n° 6, p. 438-9. Voir notre Cours d'Analyse, t. II, Paris, Hermann, 1930-n° 355, p. 456.

équation admettrait une solution nulle, c'est-à-dire se réduirait à une équation de Bernoulli, dont l'intégrale générale est bien de la forme (3).

Pour α différent de zéro et voisin de zéro, la valeur de d^2z/dy^2 dépendra encore homographiquement de μ : elle sera donnée par la formule (3').

2. Comparons en particulier, à ce point de vue, l'onde incidente Γ_0 avec le conoïde direct ayant pour sommet un point 2 pris sur la courbe de section ⁸⁾ τ de cette onde par la surface S_2 . Pour ce conoïde, la fonction g est donnée par l'équation

$$z_2 = F(x_2, y_2, \alpha, \beta) = F(x_2, y_2, \alpha, g),$$

x_2, y_2, z_2 étant les coordonnées de ce point 2. L'équation (1) étant encore vérifiée en ce point, tandis que $\frac{\partial F}{\partial \beta}$ est différent de zéro ⁹⁾, ceci donne encore $g' = 0$; puis g'' est donné par

$$\frac{\partial^2 F(x_2, y_2, \alpha, 0)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial F}{\partial \beta} g'' = 0.$$

Si le point 2 appartient à une caustique de l'onde Γ_0 , ce que nous supposerons avoir lieu pour $\alpha = 0$, il satisfait à la relation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = 0,$$

ce qui donne, pour g'' , la valeur zéro. A partir de cette position, déplaçons le point 2 sur la courbe de section τ , supposée non tangente à la bicaractéristique, α prenant alors une valeur différente de zéro que nous considérerons comme infiniment petit principal. On voit que la nouvelle valeur de g'' sera un infiniment petit du même ordre que celle de $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}$. Or, si, dans le plan des $x y$, nous considérons la famille de courbes

$$(4) \quad f(x, y, \alpha) = 0$$

⁸⁾ Nous réserverons cette dénomination à la courbe dont il s'agit, par opposition aux autres traces (trace de Γ_0 sur S_1 ; traces de conoïdes ayant leurs sommets sur S_1 ou sur S_2) dont elle est l'analogue d'après sa définition, en raison du rôle spécial qu'elle jouera dans ce qui va suivre: en particulier, elle seule aura des singularités.

⁹⁾ A_2 , note de la p. 250.

(en l'espèce, f représente la dérivée $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$), donnant l'axe des x pour $\alpha = 0$, de sorte que l'on aura, pour α voisin de zéro,

$$(4') \quad f = y f_0 + \alpha f_1 + \alpha^2 f_2,$$

le coefficient f_1 de α étant nul au point de contact avec l'enveloppe de la famille (4) (point que nous pourrions par exemple prendre comme origine) et si, d'autre part, les deux autres coefficients f_0, f_2 sont différents de zéro au même point, la forme de l'équation $f = 0$ montre que, sur un chemin issu de l'origine et non tangent à l'axe des x (de sorte que x est un infiniment petit de l'ordre de y au moins), y est un infiniment petit d'ordre 2 exactement en α et

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{1}{f_2} \sqrt{f_1^2 - 4 f_0 f_2 y}$$

un infiniment petit du premier ordre. Appliquant ceci à la projection de notre figure de l'espace sur notre plan des $x y$, nous voyons que $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}$ et, par conséquent, $g''(\alpha)$ seront des infiniment petits du premier ordre exactement. Il en sera de même dès lors, d'après l'expression (3) dans laquelle le numérateur $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial y}\right)^2$ est différent de zéro ¹⁰⁾, pour la différence qui existe, sur la surface S_1 , entre les courbures des traces de l'onde et du conoïde direct ayant pour sommet le point 2 variable sur la courbe de section τ .

Quant aux deux hypothèses $f_0 = 0, f_2 = 0$, la première est exclue d'une manière analogue à ce qui a été dit ¹¹⁾ dans A_2 , comme impliquant, au point 2, une singularité de la bicaractéristique ; la seconde, soit $\frac{\partial^3 F}{\partial \alpha^3} = 0$, signifierait (Cf. A_2 , nos 3, 6) que la surface S_2 passe par un point de rebroussement de la caustique.

3. Nous ferons maintenant porter notre comparaison sur le conoïde direct ayant pour sommet le point 2 de l'axe des x — appartenant ou non à la caustique — et sur le conoïde rétrograde ayant pour sommet le point 1 d'abscisse un peu inférieure ¹²⁾ à celle de la surface-écran S_1 . Si, tout

¹⁰⁾ A_2 , p. 253.

¹¹⁾ Page 253. La remarque faite en cet endroit concerne le point 1, mais s'applique sans modification au point 2.

¹²⁾ Le sens positif sur l'axe des x est supposé comme dans A_2 , le sens rétrograde, celui qui va de S_1 à S_2 .

d'abord, le point 2 est lui-même très voisin de S_1 , mais du côté positif, les traces de ces deux conoïdes sur S_1 seront deux petites ovals extérieures l'une à l'autre. Lorsque nous déplacerons ensuite continuellement le point 2 le long de l'axe des x , dans le sens positif, jusqu'à l'amener sur S_2 , il n'arrivera pas que la valeur correspondante de g'' (0) devienne égale à celle qui convient au conoïde de sommet 1 : car, comme on le voit en raisonnant sur ce dernier conoïde comme nous l'avons fait sur Γ_0 , cela signifierait qu'il admettrait une caustique passant par le point 2, contrairement à l'hypothèse β . Il n'arrivera pas non plus que les traces des deux conoïdes soient tangentes en un second point, car ils auraient alors une seconde bicaractéristique commune¹³⁾ joignant le point 1 au point 2, ce qui serait encore contraire à l'hypothèse β . Ces deux traces resteront donc, jusqu'au bout, tangentes *extérieurement* l'une à l'autre.

Dans ces conditions portons, dans S_1 , sur une ligne partant de l'origine et non tangente au plan des xy — par exemple sur l'axe des z , si S_1 a pour équation $x=0$ —, et cela dans le sens positif, qui sera supposé dirigé vers l'intérieur de la petite aire découpée par le conoïde de sommet 1, une petite longueur qui sera considérée comme l'infiniment petit principal. D'après l'hypothèse β , l'extrémité $\bar{1}$ de cette longueur pourra être jointe au point 2 par une géodésique faisant avec le conoïde, au sommet 2 de ce conoïde, un angle du même ordre que la distance du point $\bar{1}$ à la trace du conoïde en question, c'est-à-dire du premier ordre. Une telle géodésique sera d'ailleurs extérieure au conoïde (géodésique *d'espace*) et donnera, par conséquent, pour la quantité H , une valeur négative et infiniment petite du premier ordre seulement. Comme la valeur de H est constante le long de cette géodésique, celle-ci sera également, au point $\bar{1}$, extérieure au conoïde correspondant et fera, avec la direction de toute géodésique $\bar{\mathfrak{L}}$ issue de $\bar{1}$ et intérieure à ce conoïde, un angle qui ne pourra être infiniment petit d'ordre supérieur au premier. Donc encore, le point $\bar{2}$, trace de la géodésique $\bar{\mathfrak{L}}$ sur S_2 , sera à une distance du point 2 qui — toujours d'après l'hypothèse β — ne pourra être infiniment petite d'ordre supérieur au premier.

Au point 2, sur la surface S_2 que nous pouvons supposer être aussi un plan $x=\text{const.}$, le sens positif sur l'axe des z sera encore dirigé vers l'intérieur du conoïde de sommet 1. Il sera également dirigé vers l'intérieur du conoïde de sommet $\bar{1}$, infiniment voisin du premier. Ces deux

¹³⁾ Par un élément de contact sur S_1 passent deux bicaractéristiques, mais on a vu dans *J. M. (10)* comment il y a lieu de choisir entre elles, et ce choix est manifestement le même pour les deux conoïdes, puisqu'il s'agit de directions toutes deux très voisines de la bicaractéristique primitive.

conoïdes ne sauraient se couper au voisinage du point 2 considéré : car leur intersection serait le sommet d'un conoïde direct infiniment voisin de Γ_2 et dont la trace sur S_1 passerait par les points 1 et $\bar{1}$, alors que toute corde d'une telle trace, infiniment petite et infiniment voisine du point 1, ne peut avoir qu'une direction infiniment voisine de celle de l'axe des y . Dès lors la ligne $\gamma_{\bar{1}}$, trace sur S_2 du conoïde de sommet $\bar{1}$, sera du côté des z positifs par rapport à la trace γ_1 du conoïde de sommet 1, c'est-à-dire sera tout entière intérieure à ce conoïde ; et il en sera de même du point $\bar{2}$.

La géodésique 1 $\bar{2}$ sera donc une géodésique de temps : elle correspondra à une valeur de H positive et infiniment petite du premier ordre seulement. Donc la trace sur S_1 du conoïde de sommet $\bar{2}$ passera dans la région $z > 0$, à une distance infiniment petite du premier ordre (et non d'ordre supérieur) du point 1.

On voit que ces considérations, qui peuvent paraître évidentes par elles-mêmes dépendent de la seule hypothèse β et ne sont pas influencées par les singularités possibles de Γ_0 .

Ces points notés, nous reprendrons, en les simplifiant un peu ¹⁴⁾, les notations de JM .

II.

4. Conformément à ce qui a été fait dans JM et dans nos autres travaux précédents sur le principe de Huygens, nous continuerons à prendre comme point de départ la formule ¹⁵⁾

$$(F) \quad 2 \pi u_0 = \iint_{S_1} v_{01} u'_1 dS_1 - \frac{d}{d\nu} \iint_{S'_1} v_{01} u_1 dS_1 + \iint_{S_1} L_1 v_{01} u_1 dS_1 \\ = (a) - (b) + (c)$$

qui résout le problème de Cauchy, en exprimant la valeur de l'inconnue u au point 0 en fonction des valeurs u_1 de cette inconnue et des valeurs u'_1 de sa dérivée transversale en tous les points de la surface S_1 , la portion

¹⁴⁾ L'onde Γ_0 , dont l'équation, dans la notation de A_2 , était de la forme $z = y^2 \phi(x, y)$, aura pour équation, dans le système de coordonnées qui sera considéré au n° II, $y = 0$; sur cette surface, notre bicaractéristique initiale (axe des x du Mémoire A_2) sera définie par l'équation complémentaire $x = 0$. Enfin, l'écran S_1 ($x = x_1$ dans la notation de A_2) pourra être pris, dans ce qui va suivre, comme plan des x, y , en définissant, par exemple, z comme une distance transversale à S_1 , mesurée avec la forme métrique H .

¹⁵⁾ Nous nous dispenserons, pour simplifier, d'affecter de l'indice 1 la lettre v , pour désigner la transversale à S_1 , la notation v_2 étant toujours employée pour désigner la transversale à S_2 .

utile ¹⁶⁾ de cette surface, celle à laquelle est étendue l'intégration, étant celle qui est comprise à l'intérieur du conoïde caractéristique I_0 de sommet o . Comme dans le Mémoire JM , les trois termes de cette formule seront respectivement désignés par (a) , (b) , (c) , ce dernier terme étant toujours d'une étude plus simple que les premiers, de sorte que les résultats qui le concernent peuvent être écrits sans qu'il y ait lieu d'insister sur leur démonstration. La quantité

$$v_{01} = \frac{V_{01}}{\sqrt{I_{01}}}$$

est la solution élémentaire, solution de l'équation (E) par rapport aux coordonnées du point o et de son adjointe (ε) par rapport aux coordonnées du point 1 . Dans le terme (b) , on doit différentier par rapport à v l'intégrale double

$$(5) \quad \iint_{S'_1} v_{01}, u_1 dS_1$$

étendue successivement à la portion ¹⁶⁾ de S_1 comprise dans le conoïde I_0 et à la portion analogue d'une surface S'_1 menée à une distance transversale constante très petite v de S_1 , les valeurs de u étant prises les mêmes en deux points correspondants 1 et $1'$ de S_1 et de S'_1 , c'est-à-dire en deux points qui sont projection transversale l'un de l'autre. La même convention s'applique à l'élément de surface dS_1 ; au contraire, la quantité v doit être calculée pour les points o et 1 dans un cas, pour les points o et $1'$ dans l'autre. Le terme (a) peut d'ailleurs, comme nous l'avons fait dans JM , se mettre également sous la forme d'une dérivée par rapport à v , celle de l'intégrale

$$(5 \text{ bis}) \quad \iint_{S_1} v_{01} u_{1'} dS_1$$

avec la convention, contraire à la précédente, que la valeur de u est prise différente au point 1 et au point $1'$, tandis que la valeur de v est la même en ces deux points (ainsi que l'élément de surface).

¹⁶⁾ Comme dans nos travaux précédents, ce sera cette région qui sera plus spécialement désignée par la notation S_1 , la même convention étant faite en ce qui regarde S_2 .

5. Il n'est pas sans intérêt pour nous de préciser une manière dont peut s'effectuer, dans le terme (b), la différentiation de l'intégrale (5) sans que la singularité de la solution élémentaire le long du conoïde caractéristique donne lieu à aucune difficulté. C'est à quoi nous arriverons aisément en considérant un point arbitraire de S_1 comme défini par la géodésique L qui le joint au point o . En vertu de l'hypothèse α faite sur la situation relative de ce point et de la surface S_1 , les deux paramètres ξ, η qui définissent la direction d'une géodésique au départ de o pourront être considérés comme coordonnées curvilignes sur S_1 , l'élément de cette dernière surface étant de la forme

$$(6) \quad K d\xi d\eta$$

avec $K \neq 0$. Il est clair que, dans un pareil système de coordonnées, la trace du conoïde caractéristique de sommet o aura la même équation, quelle que soit la surface de section S_1 .

6. Plus précisément encore, nous pouvons écrire

$$H = \omega_3^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2,$$

les polynômes

$$\omega_i = \omega_i(dx; x)$$

étant du premier degré en dx^1, dx^2, dx^3 , avec des coefficients fonctions régulières des x , au moins dans une petite région autour de la position considérée du sommet du conoïde o . Si alors nous posons

$$\xi = \frac{\omega_1(\dot{x}; x)}{\omega_3(\dot{x}; x)}, \quad \eta = \frac{\omega_2(\dot{x}; x)}{\omega_3(\dot{x}; x)}$$

où les \dot{x}^i sont des valeurs de dx^i/ds au sommet, nous pourrons, à chaque système de valeurs de ξ, η , faire correspondre des valeurs déterminées (et non plus seulement des rapports mutuels) des x — par exemple, en prenant

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{\sqrt{\sum (dx^i)^2}},$$

ces valeurs des \dot{x} étant fonctions régulières de ξ, η et des x . Dans ces conditions, la quantité Γ_{01} sera le produit d'un facteur différent de 0

tant sur S_1 que sur S'_1 par la quantité $1 - \xi^2 - \eta^2$, toujours la même quelles que soient non seulement la surface de section S_1 , mais même la position du sommet o . Ce facteur étant le seul qui donne lieu à singularité dans la quantité

$$v_{01} = \frac{V_{01}}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}},$$

une différentiation quelconque effectuée sur v_{01} n'élèvera pas l'ordre de la singularité puisqu'elle n'affectera que le numérateur régulier V_{01} . Il ne se présentera donc aucune difficulté dans la différentiation de l'intégrale (5) par rapport à v et même, un nombre de fois quelconque, par rapport aux coordonnées du sommet du conoïde [telle qu'on aura à l'appliquer à la quantité u_1 définie par la formule (F_1) , pour la substituer dans (F) (Cf. n° 8)].

7. Nous avons, jusqu'ici, considéré uniquement une onde rétrograde émanant d'un point fixe de l'espace-temps. Mais des circonstances plus générales peuvent se présenter, par exemple dans le cas d'une réflexion. Analytiquement, ce phénomène se traduit par la résolution d'un « problème mixte » et introduit ¹⁷⁾, outre la fonction v , une autre fonction (v) , singulière sur l'onde réfléchie, c'est-à-dire sur une caractéristique qui n'a plus de point conique, laquelle caractéristique découpera, sur une surface telle que S_1 , une certaine région intérieure. Il y aura encore lieu de différentier par rapport à v (c'est-à-dire par rapport à la substitution de S'_1 à S_1) une intégrale double étendue à une région de cette espèce : la méthode précédente permettra d'éviter toute difficulté dans cette différentiation si l'on a, dans la portion d'espace intérieure à la caractéristique dont il s'agit et au moins au voisinage de S_1 , défini des coordonnées curvilignes ξ, η, s satisfaisant aux conditions suivantes :

$\xi = \text{const}, \eta = \text{const}$, ces deux constantes satisfaisant à une relation

$$(7) \quad \Psi(\xi, \eta) = 0,$$

représentera une bicaractéristique située sur I_0 ;

pour $\Psi(\xi, \eta) > 0$, ces mêmes équations $\xi = \text{const.}, \eta = \text{const.}$ définiront une géodésique \mathfrak{L} orientée dans le temps ou même de longueur nulle, ligne qui, ne pouvant être nulle part tangente à la surface d'espace S_1 , sera supposée la couper à l'intérieur de l'aire délimitée par I_0 .

¹⁷⁾ Voir Le problème de Cauchy (Paris Hermann), Appendice II, 223.

Dans toute région où l'onde incidente (onde issue d'un point d'univers unique o ou onde provenant de réflexions ou de réfractions antérieures) sera dépourvue de caustique, une pareille congruence \mathfrak{L} et de pareilles coordonnées pourront être définies.

Remarque. — Lorsqu'on opérera comme il vient d'être dit dans ce n° ou dans l'un des deux précédents, on devra, dans la différentiation de u_1 , ainsi que dans celle du facteur K qui figure dans l'expression (6) de dS_1 , tenir compte de ce que le calcul de ces deux quantités introduit la projection transversale, sur S_1 , d'un point arbitraire \mathbf{r}' de S'_1 . Soient x^1, x^2, x^3 les coordonnées de cette projection ; $\frac{\delta x^i}{\delta \nu}$, leurs dérivées lorsque le point \mathbf{r}' ainsi projeté variera en fonction de ν sans changement de ξ, η (de sorte que \mathbf{r}' sera l'intersection de S'_1 avec la géodésique ou la ligne \mathfrak{L} qui viennent d'être considérées). On devra avoir

$$(8) \quad \sum_i \pi_i \frac{\delta x^i}{\delta \nu} = 0,$$

les π_i étant les paramètres directeurs du plan tangent à S_1 ; et, d'autre part, d'après la relation qui existe entre les points \mathbf{r} et \mathbf{r}' ,

$$\frac{\delta x^i}{\delta \nu} + \frac{dx^i}{d\nu} = \varrho \frac{\partial x^i}{\partial s} = \varrho \dot{x}^i,$$

les dérivées \dot{x}^i étant, cette fois, prises au point \mathbf{r}' et ϱ désignant la dérivée $\frac{ds}{d\nu}$: cette dernière quantité ϱ se déterminera en portant les valeurs précédentes dans (8), son coefficient dans l'équation ainsi obtenue étant différent de zéro puisque la ligne $\xi = \text{const.}, \eta = \text{const.}$ n'est pas tangente à S_1 . Les dérivées finies et régulières ainsi obtenues pour les coordonnées spatiales de la projection permettront de calculer les dérivées des coordonnées curvilignes correspondantes sur S_1 , dérivées que l'on pourra, à leur tour, différentier par rapport à ξ, η , de manière à en déduire la dérivée, par rapport à ν , du déterminant fonctionnel et du facteur K qui permet d'exprimer, à l'aide de $d\xi d\eta$, la projection transversale de l'élément superficiel dS'_1 décrit par le point \mathbf{r}' . Ce sont ces dérivées, toutes régulières, qui serviront à différentier l'intégrale (5) dans les conditions indiquées.

8. Nous aurons, comme dans JM , à combiner la formule (F) avec la formule analogue

$$F_1) \quad 2\pi u_1 = \iint v_{12} u_2' dS_2 - \frac{d}{d\gamma_2} \iint v_{12} u_2 dS_2 + \iint L_2 v_{12} u_2 dS_2,$$

dans laquelle le point o est remplacé par un point i de S_1 (ou par un point i' de S'_1), S_1 étant remplacé par S_2 ou S'_2 ; et, comme dans ce Mémoire, ceci conduira à introduire, outre les traces de l'onde incidente I_0 sur S_1 ou sur S'_1 :

la nappe rétrograde I_1 de conoïde ayant pour sommet un point i ou i' , et sa trace γ_1 sur S_2 ou S'_2 ;

la nappe directe I_2 de conoïde ayant pour sommet un point 2 ou $2'$ de S_2 ou de S'_2 , et sa trace γ_2 sur S_1 ou S'_1 .

Dans les hypothèses où nous nous plaçons, les nappes conoïdales de ces deux catégories, limitées à S_2 ou S'_2 , l'autre à S_1 ou S'_1 , ne présenteront pas de caustiques.

La condition que la trace de la seconde d'entre elles sur S_1 ait des points intérieurs communs avec celle de I_0 définit la région de S_2 ou de S'_2 intérieure à l'onde. Lorsque le point 2 sera sur l'onde elle-même, les deux traces seront tangentes extérieurement¹⁸⁾. Elles seront tangentes intérieurement lorsque le point 2 appartiendra à ce que nous avons appelé dans notre travail précédent, l'« onde interne » et que nous préférons, dans celui-ci, désigner par le terme plus topique de « pseudo-onde ». Comme il a été expliqué antérieurement, en effet, cette pseudo-onde ne doit intervenir qu'en apparence, et ne donner lieu, tous calculs faits, à aucun phénomène particulier.

9. Les circonstances que nous venons de mentionner sont celles qui se présentaient dans nos Mémoires antérieurs. Mais dans nos hypothèses actuelles, des circonstances nouvelles vont apparaître, conformément aux résultats obtenus dans A_2 . Lorsque le point 2 appartiendra à une caustique de l'onde, les deux traces auront entre elles un contact du second ordre¹⁹⁾.

¹⁸⁾ Ceci reste valable même lorsqu'on abandonne l'hypothèse γ (quoique, dans certains cas de figure, tels que ceux qui sont représentés sous les nos IV—VI sur la figure 3, les deux aires découpées dans S_1 par Γ_0 et par Γ_2 pénètrent l'une dans l'autre au voisinage du point de contact), en ce sens que, sur une ligne menée par ce point et non tangente aux traces, les deux segments respectivement intérieurs aux aires en question n'ont d'autre point commun que leur extrémité.

Au contraire, si le point 2 était sur la pseudo-onde, les deux segments dont il s'agit seraient de même sens et se recouvriraient.

¹⁹⁾ Si S_2 passait par un point de rebroussement de la caustique (Cf. A_2 , 3), les deux traces correspondantes auraient un contact du troisième ordre. Cette disposition étant exceptionnelle, nous ne jugeons pas utile d'en entreprendre l'étude.

Il résulte également de A_2 que la surface S_2 (du moins lorsqu'elle commence à s'écarter de S_1 : voir plus loin n° 10) ne peut pas rencontrer la caustique sans rencontrer également une ligne double de la caractéristique Γ_0 . Il y a lieu de reprendre ici la discussion des relations de contact entre les deux traces en faisant varier le point 2 non plus le long d'une bicaractéristique, mais le long de la section τ de l'onde par la surface S_2 , laquelle comporte (au moins) un point double et deux points de rebroussement.

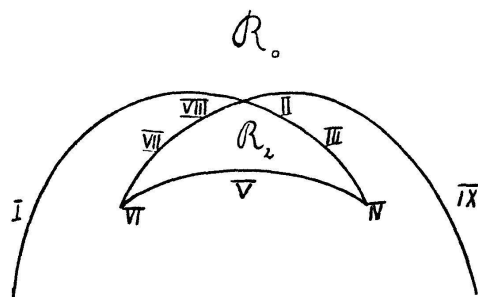


Fig. 2.

Cette section étant représentée fig. 2, nous avons représenté schématiquement, fig. 3, les formes successives de la courbe γ_2 , trace de Γ_2 , la trace de Γ_0 étant figurée ²⁰⁾ par l'axe des x . Sur un premier arc décrit par le point 2, ce point étant, par exemple, en I (fig. 3), les deux traces tangentes sont dans la position relative normale, c'est-à-dire celle qu'on rencontrerait seule s'il n'y avait pas de caustique ²¹⁾. La première particularité qui se présente est nécessairement, comme

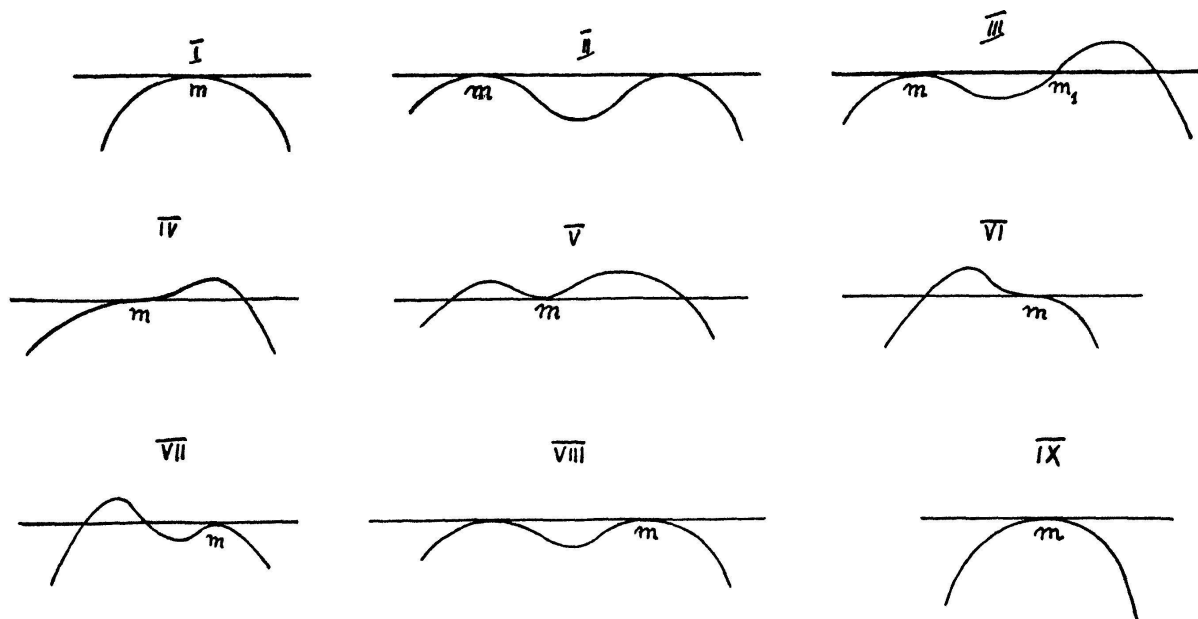


Fig. 3.

nous l'avons constaté dans A_2 , la présence d'un second point de contact (cas (II), fig. 3): ceci correspond au premier passage du

²⁰⁾ Les figures successives (I)—(IX) doivent être en réalité envisagées comme décalées les unes par rapport aux autres, le point m se déplaçant continuellement (de gauche à droite dans la disposition adoptée dans nos dessins).

²¹⁾ Il se peut (Cf. 10) que de tels points I n'existent pas, aucune position du point 2 sur la courbe de la section τ ne donnant lieu à des traces complètement extérieures l'une à l'autre. Mais cette circonstance ne peut pas se présenter lorsque S_2 , s'écarter progressivement de S_1 , commence à rencontrer la caustique.

point mobile 2 par le point double II de la section. Puis (position III du point mobile) la trace γ_2 , toujours tangente extérieurement en un premier point de contact m , pénètre par ailleurs dans la région intérieure $y > 0$. On arrive ainsi à un point de rebroussement IV de la section, l'osculution des deux traces étant atteinte par le fait que le premier point d'intersection m_1 de ces deux lignes dans le cas (III) vient coïncider avec m , pendant que la dérivée seconde d^2y/dx^2 en m , primitivement négative, augmente jusqu'à la valeur zéro. Cette dérivée seconde devenant ensuite positive, la disposition devient celle du cas (V), c'est-à-dire que la seconde trace γ_2 a deux régions différentes communes avec la première. Les déformations se succèdent ensuite dans l'ordre inverse. Le point d'intersection le plus à droite des deux traces venant à son tour coïncider avec m , on a une nouvelle osculation, correspondant au second point de rebroussement VI ; puis, à nouveau, pour toute position telle que VII, une seule aire intérieure commune aux deux traces ; puis, nouveau passage VIII par le point double (de sorte que la figure (VIII) n'est autre que la figure (II), à la dénomination près du point m) après quoi on retrouve, en IX, la position normale.

Il est à remarquer que la courbe de section que nous avons tracée fig. 2 (\mathcal{R}_0 , région extérieure) aurait pu aussi, semble-t-il, être conçue avec la disposition représentée fig. 2^{bis}, différant de la première par le fait que le triangle compris entre le point double et les deux points de rebroussement est *extérieur*. Mais la discussion précédente permet de décider d'une façon certaine entre ces deux hypothèses et d'éliminer la seconde d'entre elles. Dans cette dernière, en effet, il y aurait, au voisinage des points de rebroussement, des points entièrement extérieurs à l'onde : pour de telles positions du point 2, les deux traces seraient entièrement extérieures l'une à l'autre. Or c'est ce qui ne peut se produire au voisinage des points IV ou VI, en vertu de la forme des figures (IV) et (VI) qui correspondent à ces points. Au contraire, les figures en question montrent qu'il existera, sur S_2 , des points — en l'espèce ceux qui sont compris dans le triangle \mathcal{R}_2 (fig. 2) délimité ainsi entre trois arcs de la courbe τ — « doublement intérieurs » à l'onde, c'est-à-dire tels que la trace du cône direct ayant pour sommet l'un d'eux ait deux régions différentes intérieures à γ_0 .

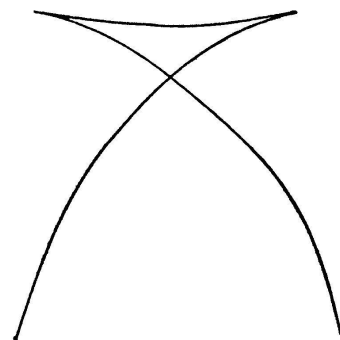


Fig. 2bis.

10. Tous ces détails peuvent être aisément vérifiés sur l'exemple des ondes cylindriques ordinaires, c'est-à-dire sur les modèles en fils de surfaces à pente constante ou, ce qui revient au même, sur les figures de courbes parallèles à une courbe fixe. Nous figurons un peu plus loin (fig. 5) la disposition correspondant à une onde dont le front, à l'instant 1²²) coïncide avec une ellipse de demi-axes a, b et qui — comme il est nécessaire pour trouver une caustique — se propage, lorsqu'on fait décroître le temps t , vers l'intérieur de la courbe, de sorte que la région du plan S_1 qualifiée d'intérieure à l'onde sera la région extérieure à l'ellipse.

S_2 sera également un plan $t = \text{const.}$, de sorte que la section de l'onde par S_2 s'obtiendra en portant, à partir du pied de chaque normale à l'ellipse, une longueur constante L dans le sens intérieur. Conformément à ce qui a été dit au n° 7 nous serons conduits à faire passer non seulement par les points situés sur l'ellipse, mais par les points extérieurs. c'est-à-dire intérieurs à notre onde, des géodésiques — c'est-à-dire des droites — \mathfrak{L} projetées, par exemple, sur les plans $t = \text{const.}$ suivant les normales à l'ellipse. Si, comme il a été admis au n° 7, nous supposons encore ces géodésiques de longueur nulle, c'est-à-dire de même pente que celles qui sont issues des points de la courbe, nous voyons que la correspondance entre les régions intérieures à l'onde situées sur S_1 et sur S_2 se fera, en projection sur $t = \text{const.}$, par segments de longueur constante L portés sur les normales à l'ellipse. Cette correspondance sera univoque à partir de S_1 (la normale qui sert à la réaliser étant, de convention expresse, la plus courte, celle qui ne passe pas à l'intérieur de l'ellipse entre son point de départ et son pied); mais elle ne le sera pas à partir de S_2 , dès que L dépassera le rayon de courbure minimum de l'ellipse (rayon de courbure au sommet du grand axe, soit $\frac{b^2}{a}$): à partir de ce moment, l'aire triangulaire \mathcal{R}_2 prendra naissance et tout point situé à l'intérieur de cette aire²³) aura, dans S_1 , deux homologues différents. La trace γ_2 correspondant à un tel point, c'est-à-dire le cercle de rayon L ayant ce point pour centre, coupera la conique en quatre points de manière à déterminer, extérieurement à elle, deux aires distinctes.

Ajoutons que les choses se passent d'une manière un peu différente si l'on fait encore croître la constante L . Pour des valeurs suffisamment grandes de cette quantité, le point double de la courbe de section disparaît, la région extérieure que nous avons précédemment dénommée \mathcal{R}_0 cessant d'exister: au-

²²) Sous le point de vue auquel nous nous plaçons, comme dans tout ce qui précède, il s'agit d'une propagation rétrograde, c'est-à-dire vers le passé.

²³) La même propriété appartiendra d'ailleurs (toujours pour $L > b^2/a$) à d'autres points de la figure. En fait, la forme de la „surface de Riemann“ qui correspond à S_1 de par la transformation considérée est facile à indiquer immédiatement, car elle n'est autre que celle de la surface d'onde Γ_0 elle-même (convenablement arrêtée à la courbe de section τ , puisque S_1 est arrêtée à l'ellipse). Cette surface affecte donc, au voisinage du point de rebroussement de la caustique, la forme décrite dans A_2 (n° 6): elle recouvre trois fois le triangle \mathcal{T} compris entre les deux branches de la développée et l'arc IV—VI de la courbe de section, deux fois la région \mathcal{R}_2 . Mais nous n'avons à tenir compte, en ce moment, que du cas où deux images, sur S_1 , d'un même point de S_2 sont près de se confondre, et ce cas est celui que nous considérons dans le texte.

trement dit, aucun point 2 n'est centre d'un cercle de rayon L entièrement intérieur à l'ellipse (c'est-à-dire extérieur à l'onde). C'est ce qui se produit évidemment à partir du moment où L dépasse le demi petit axe²⁴). Dans ce cas, S_2 peut rencontrer la caustique sans rencontrer de ligne double de la surface.

II. C'est sous le bénéfice de ces données géométriques que nous allons reprendre (Cf. *JM*) l'étude d'une intégrale telle que

$$(9) \quad I = \iint v_{01} v_{12} dS_1$$

et de sa différentiation par rapport à v . Je me propose même de reprendre cette étude dès le commencement, c'est-à-dire tout d'abord, comme dans *JM*, en l'absence de caustiques : la méthode de calcul employée dans *JM* peut en effet être notablement simplifiée et, pour le cas primitivement traité où les caustiques n'interviennent pas, les résultats deviennent à peu près intuitifs moyennant une simple interversion de l'ordre des intégrations, la première d'entre elles ayant lieu par rapport à la variable que nous avons appelée y .

Rappelons que nous avons, dans *JM*, appelé *fonction-unité* toute fonction régulière non nulle au voisinage duquel nous nous plaçons, de sorte que toute puissance positive ou négative, entière ou fractionnaire d'une telle unité est encore une unité. Ajoutons que de telles fonctions-unités, lorsqu'elles figurent comme coefficients dans l'équation d'une courbe, se comportent, au point de vue de la forme de celle-ci, comme des constantes. Les courbes

$$ay + bx^2 = 0, \quad ay + bx^3 = 0, \quad ay^2 + bx^3 = 0,$$

où a , b , fonctions de x et de y , sont des unités, ont sensiblement au voisinage de l'origine, la première la forme d'une parabole ; la seconde, celle d'une parabole cubique ; la troisième, celle d'une parabole semi-cubique ; etc.

II^{bis}. Dans *JM*, nous avons été conduits à écrire les équations de nos deux traces, au moins lorsqu'elles sont tangentes ou près d'être tangentes, sous la forme²⁵)

$$(10) \quad y = 0, \quad y = Y(x)$$

²⁴) Pour $L = b$, la courbe de section τ présente un auto-contact, au centre de l'ellipse.

²⁵) La notation Y n'a pas le même sens que dans *JM*.

et, par conséquent, par un usage convenable des facteurs-unités, l'intégrale (9) sous la forme

$$(9') \quad \iint \frac{f(x, y) dx dy}{V \pm y(y - Y)}$$

la fonction f contenant, indépendamment de x , y et la fonction Y , indépendamment de x , les paramètres v , v_2 et les coordonnées du point 2 sur la surface S_2 ou S'_2 . Au voisinage du contact extérieur, c'est-à-dire lorsque le point 2 sera voisin de l'onde incidente tout en lui étant intérieur, le signe à prendre sous le radical, dans la formule (9'), sera — et l'aire d'intégration sera définie par

$$0 \leq y \leq Y(x),$$

x variant lui-même dans un intervalle (x', x'') dont les extrémités ont pour abscisses deux racines de l'équation $Y(x) = 0$. Or on peut écrire

$$(11) \quad f(x, y) = f(x, 0) + y f_1(x, y) = f_0(x) + y f_1(x, y)$$

f_1 étant elle-même une fonction régulière, donc bornée ainsi que les différentes dérivées que nous aurons à en considérer. Réduisant d'abord cette expression de f à son premier terme, nous voyons immédiatement que la quadrature par rapport à y donne le résultat $\pi f_0(x)$ et, par conséquent, la quadrature double, le résultat

$$\pi \int_{x'}^{x''} f_0(x) dx$$

Si la fonction f_0 contient les paramètres (principalement le paramètre v) par rapport auxquels on veut différentier, la dérivée correspondante sera, par hypothèse elle-même régulière et son intégrale dans l'intervalle (x', x'') , restera bornée, ou sera même infiniment petite avec l'amplitude de l'intégrale. Nous n'aurons donc à considérer que les termes aux limites

$$(12) \quad \pi \left[f_0(x'') \frac{dx''}{dv} - f_0(x') \frac{dx'}{dv} \right]$$

et nous voyons que la dérivée $\frac{dI}{d\nu}$ ne pourra devenir infinie que (au plus) de l'ordre des dérivées

$$(13) \quad \frac{dx'}{d\nu}, \quad \frac{dx''}{d\nu}.$$

Quant au second terme de l'expression (11), en vertu de la formule

$$\int_0^Y \sqrt{\frac{y}{Y-y}} dy = \frac{\pi}{2} Y,$$

sa différentiation n'introduira aucun terme aux limites analogue à (12) et (puisque les quantités sous les signes d'intégration sont supposées régulières) donnera un résultat nécessairement borné, dont nous n'aurons pas à nous occuper. On voit d'ailleurs qu'il en serait encore de même si l'on soumettait la portion correspondante d'intégrale à un nombre quelconque de différentiations successives.

12. Ceci s'applique encore lorsque les deux traces qui limitent l'aire d'intégration sont franchement sécantes, c'est-à-dire sécantes sans être au voisinage du contact. On peut alors, moyennant une transformation ponctuelle qui ne change pas l'axe des x , mettre leurs équations sous la forme (10) et, d'autre part, les deux dérivées (12) seront finies. Un calcul très analogue s'applique d'ailleurs aux cas où l'une des traces est entièrement et « franchement » intérieure à l'autre et limite seule l'aire d'intégration, de sorte que l'on a ainsi, sous forme manifestement bornée, la dérivée, par rapport à ν ou à tout autre paramètre, d'une intégrale du type (9) toutes les fois que le point 2 est franchement intérieur à l'aire utile S_2 .

13. On pourrait appliquer une marche analogue au cas du contact intérieur, qui correspond, comme nous l'avons dit, à celui où le point 2 est sur la pseudo-onde, cas dont nous savons d'ailleurs a priori qu'il ne donne

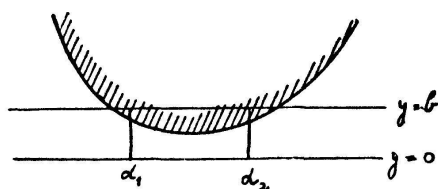


Fig. 4.

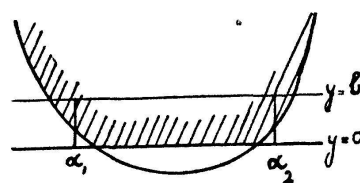


Fig. 4 bis.

lieu à aucune singularité. Au voisinage d'un tel contact intérieur, les deux traces peuvent être considérées comme ayant l'une des deux dispositions relatives représentées fig. 4 ou fig. 4^{bis}, l'aire d'intégration étant du

côte ombré sur l'une ou l'autre de ces figures et le signe à prendre sous le radical, dans la formule (9'), étant $+$. Comme dans *JM*, nous limiterons l'aire par une parallèle $y = b > 0$ à l'axe des x , toute la partie située au delà de cette parallèle donnant un résultat régulier, et par deux parallèles $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$ à l'axe des y situées de part et d'autre du point de contact. L'ordonnée b et les abscisses α_1 , α_2 étant supposées constantes, toute la partie de l'aire d'intégration extérieure au rectangle ainsi délimité donnera un résultat régulier. D'autre part, puisque la courbe $y = Y(x)$ est supposée passer au point considéré p pour les valeurs initiales des paramètres dont elle dépend, les deux côtés $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$ parallèles à l'axe des y auront pu être choisis assez voisins du point p pour que les ordonnées correspondantes de la courbe soient inférieures à b , le côté du rectangle qui appartient à la droite $y = b$ étant, par conséquent, entièrement compris dans l'aire d'intégration, et cela pour toutes les valeurs des paramètres suffisamment voisines des valeurs initiales. La

primitive de $\frac{1}{\sqrt{y(y-Y)}}$ étant

$$2 \log (\sqrt{y} + \sqrt{y-Y}),$$

le résultat de l'intégration correspondante effectuée entre la limite supérieure b et une limite inférieure égale à la plus grande des deux quantités $0, Y$ est, en toute hypothèse

$$2 \log (\sqrt{b} + \sqrt{b-Y}) - \log |Y|.$$

Cette quantité doit être multipliée par $f_0(x) dx$ et intégrée de α_1 à α_2 . Le premier terme, différentié ou non par rapport aux paramètres, ne donne lieu à aucune singularité, de sorte que toute la question porte sur la différentiation de l'intégrale

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \log |Y(x)| dx.$$

Le calcul étant ainsi dirigé, on voit qu'il s'appliquerait, non seulement aux deux dispositions des figures 4 et 4^{bis}, mais aussi (Cf. *JM*, 9) aux

deux dispositions représentées fig. 4 et 5 de *JM*. On peut toujours²⁶⁾ supposer qu'on est dans l'un des deux premiers cas ; mais on voit que cette remarque est en somme inutile.

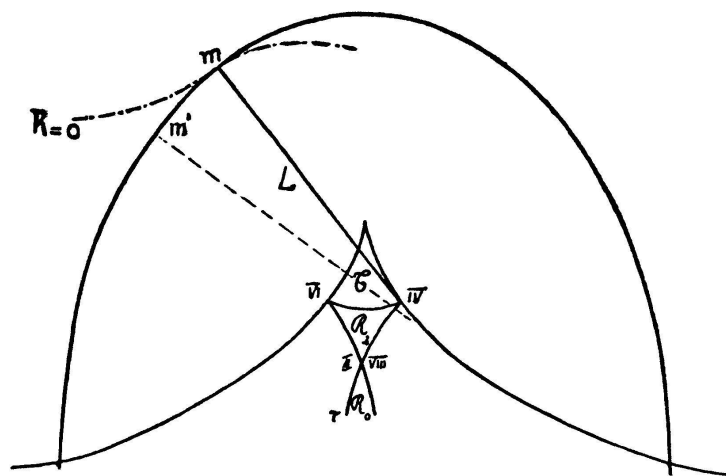


Fig. 5.

Nous n'insisterons pas ici d'ailleurs sur ce cas du contact intérieur, la méthode actuelle n'offrant pas alors, sur celle qui a été suivie dans *JM* (8—9) le même avantage que tout à l'heure.

14. Les systèmes de coordonnées que nous adopterons sur S_1 , S'_1 , S_2 (le cas de S'_2 étant, comme nous le verrons, hors de question) ne seront pas exactement ceux qui nous ont servi dans *JM*. Le premier d'entre eux (*JM*, 11) sera toutefois conservé : nous supposons donc que, par tout point situé sur S_1 ou voisin de S_1 , on mène une géodésique transversale à S_1 jusqu'à la rencontre avec la caractéristique I_0 : ce sera la longueur de l'arc géodésique ainsi délimité, mesurée avec la métrique H , et prise positivement lorsque cet arc est intérieur à l'onde qui sera la coordonnée y , de sorte que les valeurs de cette coordonnée en deux points correspondants (c'est-à-dire projections transversales l'un de l'autre) pris sur S_1 et sur S'_1 diffèrent entre elles purement et simplement de la quantité constante v . Nous donnerons d'autre part, à deux pareils points correspondants, la même coordonnée x . Celle-ci pourra, à cela près, être définie arbitrairement.

²⁶⁾ Dans le calcul qui nous intéresse, l'une des quantités v_{01} , v_{12} (tantôt l'une, tantôt l'autre) dépend des seules coordonnées du point 1, pendant que l'autre dépend également des paramètres. D'autre part, les dispositions des fig. 4, 4bis correspondent au cas où celle des deux aires $v_{01} \geq 0$, $v_{12} \geq 0$ qui est ramenée $y \geq 0$ est celle qui comprend l'autre entièrement ou presque entièrement à son intérieur. Ce résultat ne peut pas toujours être obtenu par une transformation ponctuelle fixe. Mais il n'y a aucun inconvénient, pour le calcul, à introduire une transformation ponctuelle dépendant du paramètre, pourvu que cette dépendance soit régulière.

Pour les paramètres ξ, η introduits aux n^{os} 5, 6 et qui, dans le cas d'une onde rétrograde incidente émanée d'un point fixe 0, définissent une géodésique issue de ce point, nous pourrions prendre les coordonnées x, y du point en lequel cette géodésique (ou, dans le cas du n^o 7, la ligne \mathfrak{L} de la congruence considérée) rencontre S_1 (de sorte que le premier membre de (7) se réduira à η). Ces mêmes quantités ξ, η serviront de coordonnées sur S_2 , d'après la méthode du n^o 7. Il est bien entendu que la correspondance entre ce système de coordonnées et la position d'un point de S_2 n'est pas nécessairement biunivoque. Elle l'est dans le cas qui a fait l'objet de *JM*; elle ne le sera plus si nous admettons l'intervention des caustiques. Nous pourrions toujours exprimer, en fonction de ξ, η , des coordonnées curvilignes λ_1, λ_2 choisies sur S_2 et aptes à représenter cette surface d'une manière régulière; mais, dans le cas des caustiques, le déterminant fonctionnel de ces expressions sera susceptible de s'annuler et, avec lui, le facteur K_2 qui figure dans l'expression de l'élément superficiel

$$(6 \text{ bis}) \quad dS_2 = K_2 d\xi d\eta$$

de la surface.

C'est, en particulier, ce qui aura lieu aux points de rebroussement de la courbe de section τ , numérotés IV et VI sur la figure 3, puisque la courbe représentée sur cette figure correspond, de par la correspondance dont il s'agit, à la trace I_0 sur S_1 , trace qui est dépourvue de singularité.

15. La méthode indiquée au n^o 11^{bis} amène, nous l'avons dit, à une forme très simple l'évaluation de l'intégrale (9) et de sa dérivée pour le cas traité dans *JM*, celui où il n'y a pas de caustique et où, par conséquent, pour chaque position du point 2 sur la courbe de section τ , les deux traces sont tangentes au premier ordre seulement. Le point de contact ayant une abscisse x précisément égale, dans nos notations, à la coordonnée ξ qui définit la position du point 2 sur τ , la quantité Y qui représente l'ordonnée d'une de ces traces (l'autre ordonnée étant nulle) sera (pour un contact extérieur) de la forme

$$(13) \quad Y = -A(x - \xi)^2,$$

le coefficient A , fonction régulière de x , étant positif et non nul — donc ce que nous avons appelé une unité — pour x voisin de ξ .

Si, à partir de la position que nous venons de considérer, on donne au point 2 un petit déplacement quelconque, la nouvelle expression de l'ordonnée Y deviendra

$$(14) \quad Y = -A(x - \xi)^2 + A_1(x - \xi) + A_0 = -A(x - \xi)^2 + b_1\eta(x - \xi) + b_0\eta,$$

le coefficient A ayant, en général, changé de valeur et les coefficients A_1 , A_0 étant également fonctions de ξ , η , mais contenant nécessairement η en facteur, puisque, pour toute valeur de ξ , Y a, lorsque η est nul, la forme (13).

15^{bis}. Dans le cas que nous considérons actuellement, le coefficient b_0 de η dans la formule (14), c'est-à-dire la dérivée $\frac{\partial Y}{\partial \eta}$ pour $x = \xi$, $\eta = 0$, est nécessairement positif. En effet, une valeur positive très petite de η correspond à un point 2 intérieur à notre aire S_2 , auquel correspond une trace γ_2 qui passe à l'intérieur de γ_0 , de sorte que le coefficient en question ne peut être négatif ; il ne peut non plus être nul, c'est-à-dire que la trace γ_2 du nouveau conoïde de sommet 2 ne pourra pas contenir un point ayant avec notre point $(\xi, 0)$ une distance infiniment petite du second ordre (par rapport à η pris comme infiniment petit principal, ξ restant invariable) : c'est ce que nous avons vu au n° 3.

16. Voyons maintenant comment l'expression (14) sera modifiée lorsque nous ferons varier v , c'est-à-dire lorsque nous couperons les caractéristiques I_0 et I_2 non plus par la surface S_1 , mais par la surface S'_1 à distance transversale constante de la première. Dans le système de coordonnées x , y adopté, la nouvelle trace de l'onde incidente I_0 aura encore pour équation $y = 0$ (et, en projection transversale sur S_1 , $y = v$). Celle du conoïde I_2 sera tangente à la première au point $x = \xi$, $y = 0$ et aura, par conséquent, une équation de forme analogue à (13). Pour η différent de zéro, elle sera complétée, comme tout à l'heure, par des termes en η , soit

$$(14') \quad \bar{Y} = -\bar{A}(x - \xi)^2 + \bar{b}_1 \eta (x - \xi) + \bar{b}_0 \eta$$

et, en projection transversale sur S_1 , par le terme additif v .

Les nouveaux coefficients \bar{b}_1 , \bar{b}_0 (ce dernier positif) sont, aux facteurs numériques près, ceux de la formule de Taylor : ils contiennent (en général) η , v , mais non x , qui y est remplacé par la valeur ξ . Au contraire, le coefficient \bar{A} contient en général (régulièrement) x . Par contre, puisque nous continuons à admettre l'hypothèse γ , ce coefficient est une unité, qui admettra même une borne inférieure positive pour toutes les positions du point 2 le long de la ligne τ et dans le voisinage de cette ligne.

Comme nous l'avons vu dans JM (13), les deux traces sur S'_1 ne sont pas à combiner entre elles, mais avec les traces primitives, après projection transversale sur S_1 . Dans le calcul du terme (aa) interviendra l'intégrale

$$(15) \quad \bar{I}_{02} = \iint v_{01} v_{12} dS_1 = \iint \frac{f(x, y) dx dy}{V y (\bar{Y} + v - y)},$$

étendue à l'aire comprise entre les lignes

$$(16) \quad y = 0, \quad y = \bar{Y} + v;$$

pour le terme $(b a)$, l'intégrale

$$(15') \quad \underline{I}_{02} = \iint v_{01} v_{12} dS_1 = \iint \frac{\bar{f}(x, y) dx dy}{V (y - v) (Y - y)}$$

étendue à l'aire comprise entre les lignes

$$(16') \quad y = v, \quad y = Y.$$

17. D'après ce qui a été établi au n° 11, les dérivées des intégrales (15), (15') par rapport à v , sont du même ordre de grandeur que celles des abscisses des points communs aux courbes (16) ou aux courbes (16'), c'est-à-dire des racines de chacune des équations

$$(17) \quad \bar{Y} + v = -\bar{A}(x - \xi)^2 + \bar{b}_1 \eta (x - \xi) + \bar{b}_0 \eta + v = 0,$$

$$(17') \quad Y - v = -A(x - \xi)^2 + b_1 \eta (x - \xi) + b_0 \eta - v = 0.$$

Pour différentier les fonctions implicites ainsi définies, on dispose de deux méthodes classiques :

ou bien appliquer le théorème des fonctions implicites, soit, pour l'équation (17) par exemple,

$$(18) \quad \frac{dx}{dv} = \frac{1 + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial v}}{2 \bar{A}(x - \xi) - (x - \xi)^2 \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \bar{b}_1 \eta} = \frac{1 + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial v}}{(x - \xi) \left[2 \bar{A} - (x - \xi) \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right] + \bar{b}_1 \eta}$$

ou bien imaginer que l'on forme, si l'on peut, l'expression explicite de x .

C'est, en réalité, la seconde de ces deux méthodes que nous emploierons. Mais la première va nous permettre de simplifier le calcul et de le rendre possible ²⁷⁾).

Les premiers membres des équations (17), (17') et, par conséquent, les racines que nous avons à étudier, dépendent en effet de ν de deux manières, à savoir par la présence du terme explicite $\pm \nu$ et par l'intervention du paramètre ν dans les divers coefficients. Au numérateur de (18), cette deuxième dépendance se traduit par des termes tous infiniment petits : en les négligeant, on n'altérera donc point sensiblement la dérivée cherchée.

Le dénominateur de (18) ne fait entrer la variabilité des coefficients en fonction de ν , x que par l'intermédiaire du terme en $\frac{\partial \bar{A}}{\partial x}$. Ce dernier terme, à son tour, en raison de la présence du facteur $(x - \xi)$, est infiniment petit vis-à-vis de la quantité \bar{A} , que nous savons être bornée inférieurement.

Ainsi, dans la différentiation qui nous intéresse, nous pouvons traiter tous les coefficients \bar{A} , \bar{b} comme des constantes, en commettant simplement ainsi sur le résultat une erreur relative infiniment petite, sous la condition de faire subir une altération convenable, elle aussi infiniment petite, au coefficient \bar{A} . Les évaluations que nous nous proposons d'obtenir pour la dérivée n'en seront pas affectées si elles ne font intervenir que la borne inférieure de \bar{A} .

Or la résolution de l'équation du second degré (17) donne

$$x = \frac{\bar{b}_1 \eta \pm \sqrt{\bar{b}_1^2 \eta^2 + 4 \bar{A} (\eta + \nu)}}{2 \bar{A}}$$

et, en dérivant par rapport à ν et faisant $\nu = 0$, on trouve immédiatement un résultat de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$, ce qui est bien le résultat que nous devons attendre (puisque la somme algébrique des dérivées que nous venons d'évaluer ²⁸⁾ doit fournir, à un terme borné près, la valeur

²⁷⁾ L'emploi du théorème de factorisation permettrait de surmonter la même difficulté. (Voir plus loin n° 19).

²⁸⁾ Les infinis qui interviennent dans les deux premiers termes sous le signe \int de (19) s'ajoutent.

Le contraire a lieu au niveau de la pseudo-onde, par un mécanisme semblable à celui qui intervenait dans notre travail des *Acta Mathematica*, tome 49, (n° 21, p. 243).

de v_{02}) et qui suffit à justifier, comme nous l'avons vu dans JM, les transformations effectuées dans ce Mémoire et à établir la formule

$$(19) \quad v_{02} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{d\bar{I}_{02}}{d\nu} - \frac{d\underline{I}_{02}}{d\nu} + \mathcal{F}_{02} \right) \quad \mathcal{F}_{02} = \iint_{S_1} L_1 v_{01} v_{02} dS_1$$

18. Abandonnons maintenant l'hypothèse γ et admettons par conséquent que la courbe de section τ présente un ou plusieurs points de rebroussement, intersections de S_2 avec une caustique. Les propriétés géométriques de la figure seront alors celles qui ont été décrites au n° 9. Nous continuerons d'ailleurs à rapporter les points de S_2 aux coordonnées ξ, η considérées au n° 14 ; seulement celles-ci n'auront plus, avec les points qu'elles représentent, une correspondance parfaitement biunivoque : un point de S_2 pourra avoir suivant les cas, soit un, soit plusieurs systèmes de coordonnées.

Cette circonstance ne change d'ailleurs, en général, rien d'essentiel aux calculs précédents ou aux considérations de JM. Les points 2 qui auront deux systèmes de coordonnées ξ, η seront les sommets de conoïdes interceptant à leur intérieur, sur S_1 , des régions ayant en commun avec celle qui est intérieure à l'onde incidente, deux aires distinctes : une intégrale telle que $\bar{I}_{02}, \underline{I}_{02}$ ou \mathcal{F}_{02} devra alors être étendue successivement à ces deux aires ; sa différentiation fera intervenir non plus deux, mais quatre quantités de la forme (13) ; mais celles-ci continueront à relever de l'étude précédente.

Les seuls points qui exigent une étude nouvelle sont les points de rebroussement. Nous considérerons, par exemple, le point IV de la fig. 2, qui pourra évidemment être supposé correspondre à l'origine des coordonnées dans le plan des ξ, η , pendant que le point m correspondant sera l'origine des coordonnées sur S_1 . Nous limiterons l'aire d'intégration, sur S_1 , à sa portion intérieure à un petit rectangle fixe ayant pour base, sur l'axe des x , un segment (ξ_1, ξ_2) pris autour de l'origine.

La formule de Taylor utilisée pour représenter l'ordonnée Y devra, pour ξ voisin de zéro, comporter un terme de plus, soit

$$(20) \quad Y = H(x - \xi)^3 + A(x - \xi)^2,$$

x ne figurant plus, cette fois, dans le coefficient A , mais dans le coefficient H . Ce dernier sera différent de zéro même pour $\xi = 0$, sans quoi ($A_2, 3$) le point IV considéré serait un point de rebroussement de la

caustique, et nous excluons le cas où S_2 passerait par un tel point de rebroussement. Si nous avons pris comme sens positif, sur l'axe des x , le sens de gauche à droite sur la figure 3, le coefficient en question sera positif pour toutes les valeurs de ξ qui nous intéressent actuellement.

Le coefficient A (courbure au point de contact) s'annulera au contraire, pour $\xi = 0$. Ce zéro, par rapport à la variable indépendante ξ , est simple ²⁹⁾, en vertu de ce qui a été dit au n° 2. Nous écrirons donc

$$Y = H(x - \xi)^3 + a \xi (x - \xi)^2,$$

le nouveau coefficient a étant une unité et étant d'ailleurs positif, puisque d'après les figures (III)—(V) (fig. 3) la concavité de la ligne γ_2 passe du côté négatif au côté positif de l'axe des x lorsque ξ passe par la valeur zéro en croissant.

Conformément à ce qui a été dit au n° 1, l'équation qui vient d'être écrite conserve sa forme, non seulement pour $\nu = 0$, mais ³⁰⁾ lorsqu'on fait varier ν .

Pour η différent de zéro, mais ν nul, la valeur de Y s'écrira

$$(20') \quad Y = H(x - \xi)^3 + A(x - \xi)^2 + b_1 \eta (x - \xi) + b_0 \eta, \\ A = A(\xi, \eta) = a\xi + b\eta.$$

Grâce aux remarques faites au n° 3, nous pouvons affirmer que le résultat du n° 15^{bis} subsiste dans les conditions actuelles, c'est-à-dire que *le coefficient b_0 est encore différent de zéro et même positif.*

Si enfin l'on fait également varier ν , on aura (en projection sur S_1 et avec modifications des divers coefficients), pour équation de la trace du conoïde Γ_2 ,

$$y = \bar{Y} = \bar{H}(x - \xi)^3 + \bar{A}(x - \xi)^2 + \bar{b}_1 \eta (x - \xi) + \bar{b}_0 \eta, \\ \bar{A} = \bar{A}(\xi, \eta, \nu) = \bar{a}\xi + \bar{b}\eta,$$

de sorte que les deux équations en x seront

$$(21) \quad \bar{Y} + \nu = \bar{H}(x - \xi)^3 + \bar{A}(x - \xi)^2 + \bar{b}_1 \eta (x - \xi) + \bar{b}_0 \eta + \nu = 0,$$

$$(21') \quad Y - \nu = H(x - \xi)^3 + A(x - \xi)^2 + b_1 \eta (x - \xi) + b_0 \eta - \nu = 0.$$

²⁹⁾ S_2 , surface d'espace, n'est certainement pas tangente à la bicaractéristique.

³⁰⁾ Le zéro de la fonction $A(\xi)$ serait, au contraire, variable avec ν_2 .

Dans ces deux équations, on peut simplifier l'expression des coefficients A, \bar{A} de $(x - \xi)^2$ par un changement de variable de la forme

$$(22) \quad \xi + \eta \varphi(\xi, \eta)$$

qui laisse fixes les points de l'axe des ξ . Il est clair, en effet, qu'on peut choisir un tel changement de variable de manière à réduire A à $a \xi$ et \bar{A} à $\bar{a} \xi$. Dans le second cas, les coefficients du changement de variable dépendent de ν ; mais, cette dépendance étant régulière, elle n'apporte pas d'obstacle aux calculs qui vont suivre.

19. Les divers coefficients des équations (21), (21') sont encore des fonctions de ξ, η , de ν (pour la première d'entre elles) et — pour \bar{H}, H — de x . Mais, comme au n° 17, nous pouvons, dans le calcul de $dx/d\nu$, faire abstraction de cette dépendance et considérer les H, A, B, b comme des constantes.

Toutefois, en vue de la suite que nous aurons à donner à ce calcul aux nos 20, 22, il est préférable de ne pas user de cette faculté en ce qui regarde la dépendance de H (ou de \bar{H}) par rapport à x et d'appliquer, relativement à cette dernière variable, le théorème de factorisation. Donc, dans l'équation (21'), nous remplacerons H par son développement suivant les puissances de $(x - \xi)$, soit

$$H + H' (x - \xi) + H'' (x - \xi)^2 + \dots$$

où cette fois, H, H', H'', \dots sont indépendants de x et, opérant suivant la méthode de M. Goursat³¹⁾, nous mettrons le premier membre de (21') sous forme du produit d'un facteur unité par le polynôme

$$II(x) = (x - \xi)^3 + U_2 (x - \xi)^2 + U_1 (x - \xi) + U_0$$

les quantités U_1, U_2, U_3 étant déterminées par les équations

$$\begin{aligned} b_0 \eta - \nu - H U_0 - H' U_0 U_2 - H'' U_0 (U_2^2 - U_1) - \dots &= 0, \\ b_1 \eta - H U_1 - H' (U_0 - U_1 U_2) + H'' (U_0 U_2 + U_1^2 - U_1 U_2^2) + \dots &= 0, \\ a \xi - H U_2 - H' (U_1 - U_2^2) - H'' (U_0 - 2 U_1 U_2 + U_2^3) - \dots &= 0. \end{aligned}$$

³¹⁾ Bull. Soc. Math. Franç., T. XXXVI (1908), p. 209. Nous sommes revenus sur ce sujet dans le même recueil (T. XLVII, 1919, Comptes rendus des séances, p. 44).

L'examen des termes du premier ordre de ces équations montre que U_0 , U_1 , U_2 peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \frac{b_0 \eta - \nu}{H} + \dots \\
 (23) \quad U_1 &= c_1 \eta + h_1 \nu & (h_1 = \frac{H'}{H^2} + \dots, c_1 = \frac{b_1}{H} - \frac{b_0 H'}{H^2} + \dots) \\
 U_2 &= \frac{a \xi}{H} + h_2 \nu & (h_2 = \frac{H''}{H^2} - \frac{H'}{H} h_1 + \dots)
 \end{aligned}$$

où, toutefois dans la forme donnée à U_2 , on suppose encore effectuée une transformation convenable du type (22). Les termes remplacés par des points sont d'ordre supérieur ; et il est encore à noter que ceux qui figurent dans U_0 contiennent tous en facteur celui qui est explicitement écrit.

Nous traiterons l'équation $II(x) = 0$ à la manière classique, en faisant d'abord disparaître le terme du second degré par le changement d'inconnue

$$(24) \quad x = -\frac{U_2}{3} + X.$$

La nouvelle équation sera

$$X^3 + P X + Q = 0$$

avec

$$(25) \quad P = U_1 - \frac{U_2^2}{3} = c_1 \eta + h_1 \nu - \frac{1}{3} \left(\frac{a \xi}{H} + h_2 \nu \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 (25') \quad Q &= U_0 - \frac{U_1 U_2}{3} + \frac{2 U_2^3}{27} = c_0 \eta - h_0 \nu + \frac{2}{27} \left(\frac{a \xi}{H} + h_2 \nu \right)^3 \\
 & \quad (c_0 = \frac{b_0}{H} + \dots, h_0 = \frac{1}{H} + \dots)
 \end{aligned}$$

(le terme en $U_1 U_2$ pouvant être incorporé aux termes en η et en ν), de sorte que le discriminant

$$(26) \quad \Delta' = -\Delta = -(4 P^3 + 27 Q^2)$$

se réduit, pour $\nu = 0$, à

$$(26') \quad \Delta_0' = -\Delta_0 = -c_0 \eta R, \quad R = 27 c_0 \eta + \frac{4 a^3 \xi^3}{H^3} + \dots$$

Le calcul relatif à l'équation (21) différerait uniquement du précédent par le changement de signe de v et le changement de H, A, b_1, b_0 en $\bar{H}, \bar{A}, \bar{b}_1, \bar{b}_0$.

L'équation admet trois racines réelles pour $\Delta < 0$ et une seule pour $\Delta > 0$.

Comme il fallait s'y attendre, la valeur initiale Δ_0 du discriminant, celle qui correspond à $v = 0$, renferme η en facteur. L'autre facteur, égalé à zéro, représente également, sur S_2 , un lieu de points z tels que la trace γ_2 correspondante soit tangente à l'axe des x : autrement dit, il donne à nouveau³²⁾ une partie de la courbe de section τ , qui, nous l'avons vu, a, dans le plan des $\xi \eta$, deux arcs images passant à l'origine. Le fait que ce second lieu ait avec le premier, à l'origine, un contact du second ordre ressort bien de l'interprétation que nous venons d'en donner. Prenons, par exemple, le cas, déjà considéré au n° 10, de la propagation d'ondes cylindriques ordinaires avec front initial suivant une courbe régulière quelconque telle qu'une ellipse, c'est-à-dire la transformation ponctuelle par segments de longueur constante L normaux à la courbe. Nous avons figuré (fig. 5) l'ellipse, sa développée, projection de la caustique, et sa transformée, c'est-à-dire la courbe τ . Au voisinage du point de rebroussement IV de cette dernière, c'est-à-dire du centre de courbure en un point m de l'ellipse où le rayon de courbure est L , une normale en un point m' , distant de m d'un arc qui sera pris comme infiniment petit principal, passera à une distance du point IV qui sera infiniment petite du second ordre et, par conséquent, le segment intercepté sur cette normale par la courbe τ sera, en vertu des propriétés connues du point de rebroussement, un infiniment petit du troisième ordre: or c'est ce segment qui est à reporter, avec un décalage égal à L , pour obtenir celui qui est compris entre l'ellipse, front initial, et la seconde courbe qui a même image qu'elle dans la figure S_2 .

Le même fait apparaît à l'inspection de la fig. 3 [figures partielles (III) — (IV)]. Si, en effet, on tient compte de ce que Y est une fonction croissante de η , on voit que l'unique possibilité d'une trace γ_2 coupant l'axe des x en trois points voisins de l'origine se présente pour ξ voisin de zéro et négatif, $b_0 \eta$ étant inférieur à la valeur de Y qui correspond à $\eta = 0$, laquelle est de l'ordre de ξ^3 .

³²⁾ La trace de pseudo-onde satisfait à la même condition, mais ne passe pas au voisinage de l'origine.

La région (voisine de l'origine) dans laquelle devra être situé le point (ξ, η) pour que les trois racines de l'équation cubique soient réelles est celle qui est comprise entre l'axe des x et la ligne infiniment voisine $R = 0$.

20. Pour ν voisin de zéro, mais différent de zéro, la ligne $\Delta = 0$ du plan des $x y$ aura une forme infiniment peu différente de la précédente. En tout cas, la forme de l'expression (26), où le coefficient de η^2 est essentiellement différent de zéro et négatif, montre que si l'on a tracé une parallèle à l'axe des x à une distance positive, suffisamment petite, mais choisie une fois pour toutes, β de cet axe et pris sur cette droite, également une fois pour toutes, un segment (ξ_1, ξ_2) suffisamment petit, la quantité Δ sera positive sur ce segment pour toutes les valeurs suffisamment petites de ν . Pour de telles valeurs de ν et pour toute valeur de ξ comprise entre ξ_1 et ξ_2 , le nombre des racines de l'équation $\Delta = 0$ voisines de zéro pourra être de zéro ou de deux ; mais β sera toujours supérieur à la plus grande d'entre elles.

La forme de la ligne $\Delta = 0$ dépend de la situation relative des deux lignes $P = 0$, $Q = 0$, dont la première (Cf. II) est sensiblement une parabole (du moins si c_1 n'est pas nul) et dont la seconde peut, au point de vue de son intersection avec la première, être assimilée à une parallèle à l'axe des ξ , savoir $\eta = \frac{h_0 \nu}{c_0}$. Ces deux lignes se coupent ou non au voisinage de l'origine (pour les petites valeurs de ν) suivant les signes comparés de ν et du coefficient $k = \frac{c_1 h_0}{c_0} + h_1$. Dans le premier cas, les deux points d'intersection seront,

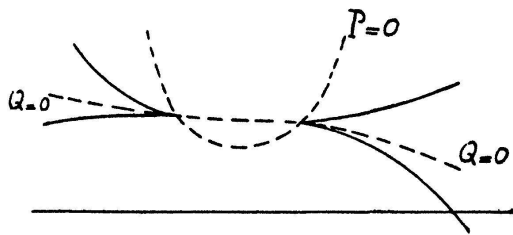


Fig. 6.

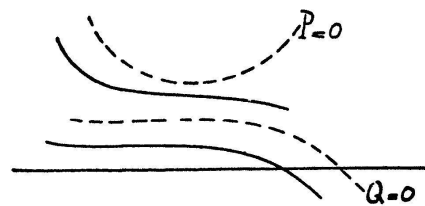


Fig. 6 bis.

d'après la forme de l'expression (26), des points de rebroussement de la ligne en question (fig. 6). Il résulte de ce qui précède que, pour ν tendant vers zéro, l'une des deux branches aboutissant à un tel rebroussement tendra vers un segment de l'axe des ξ et l'autre vers un arc de la courbe $R = 0$.

Si, au contraire, les deux courbes $P = 0$, $Q = 0$ sont sans point commun dans la région considérée, la ligne $\Delta = 0$ comprend (fig. 6 bis) deux branches entièrement séparées, de part et d'autre de $Q = 0$.

Ces deux figures 6, 6 bis devraient, naturellement, être échangées l'une avec l'autre si l'on raisonnait sur l'équation (21); et, d'autre part, on ne doit, dans

chaque cas, en retenir que la partie utile, c'est-à-dire celle qui est située dans la région $\eta \geq 0$.

On formera d'ailleurs l'équation du second degré qui donne, dans le plan des ξ η et au voisinage de l'origine, les deux ordonnées de la courbe $\Delta = 0$, en appliquant (par rapport à η) le théorème de factorisation à l'expression (26). Il est préférable d'introduire l'inconnue Q , en fonction de laquelle (25') permet de développer η : reportant dans (25), P prend la forme $P = M Q + N$, où M est une série entière en Q , pendant que

$$(27) \quad N = \left(\frac{c_1 h_0}{c_0} + h_1 \right) v - \frac{1}{3} \left(\frac{a \xi}{H} + h_2 v \right)^2 + \dots$$

est le terme indépendant de Q , c'est-à-dire la quantité obtenue en remplaçant η par sa valeur en fonction de ξ , v tirée de l'équation $Q = 0$. Dans l'expression $\Delta = 27 Q^2 + 4 (M Q + N)^3$, le théorème en question fera apparaître le facteur

$$(28) \quad Q^2 + s_1 Q + s_0$$

où s_0 , s_1 contiennent respectivement N^3 et N^2 en facteur, le premier avec un coefficient initialement égal à 1.

Les abscisses des points de rebroussement sont donnés par l'équation $N = 0$, et il apparaît bien qu'elles sont réelles ou imaginaires suivant le signe du premier terme de (27).

21. La quantité (26) est toujours négative et la racine réelle unique lorsque les racines du polynôme du second degré (28) sont imaginaires.

Si, au contraire, les racines de ce polynôme et, par conséquent, les valeurs correspondantes η' , η'' de η sont réelles, les racines de l'équation du troisième degré sont toutes trois réelles lorsque η est compris entre η' et η'' . Pour des valeurs de η satisfaisant à cette condition, nous aurons, conformément à la méthode de résolution classique, à introduire un angle ω par les deux relations concordantes

$$Q = 2 \left(\frac{-P}{3} \right)^{3/2} \cos \omega, \quad \sqrt{\Delta'} = 2 (-P)^{3/2} \sin \omega,$$

ce qui donne (en différentiant, comme nous savons en avoir le droit, sans tenir compte de la variabilité des coefficients)

$$\frac{d\omega}{d\nu} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{\Delta'}} \frac{dQ}{d\nu}$$

après quoi, les racines de l'équation seront

$$(29) \quad X = \sqrt[3]{\frac{-P}{3}} \cos \frac{\omega + 2j\pi}{3} \quad (j = 0, 1, 2).$$

Ici encore, la dérivée de P n'a pas à entrer en ligne de compte ; et, puisque la dérivée $\frac{dQ}{d\nu}$ est exactement ou sensiblement égale à 1, on voit que *les dérivées des racines (29) sont de l'ordre de* $\sqrt[3]{\frac{-P}{\Delta'}} \nu$, c'est-à-dire de

$$(30) \quad \frac{\sqrt[3]{-P}}{\sqrt{(\eta - \eta')(\eta'' - \eta)}}$$

La contribution de cette région du plan des $\xi \eta$ (pour une valeur déterminée de ν) à l'intégrale destinée à représenter v_{02} s'obtient en multipliant par

$$K_2 d\xi d\eta$$

et intégrant : cette contribution est finie, comme on le voit sans même avoir besoin de tenir compte du numérateur $\sqrt[3]{-P}$ de l'expression (28) ni du facteur K_2 (que nous avons vu s'annuler pour $\xi = \eta = 0$), puisque l'intégrale $\int_{\eta'}^{\eta''} \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta - \eta')(\eta'' - \eta)}}$ a la valeur π . La convergence est, de plus, uniforme pour toutes les valeurs (suffisamment petites) de ν .

22. Dans la région $\Delta > 0$, nous aurons, pour notre équation du troisième degré, la racine unique

$$X = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \frac{1}{6\sqrt{3}}\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \frac{1}{6\sqrt{3}}\sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{T_1} + \sqrt[3]{T_2}$$

T_1, T_2 étant les racines de l'équation du second degré

$$T^2 + QT - \frac{P^3}{27} = 0.$$

L'un quelconque des deux termes ainsi écrits a pour dérivée (en vertu de l'équation précédente, et en continuant à ne considérer comme variable que le terme v explicitement décrit)

$$\frac{1}{3} T^{-\frac{2}{3}} \frac{dT}{dv} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt[3]{T}}{2T+Q} = \pm \sqrt[3]{3} \frac{\sqrt[3]{T}}{\sqrt[2]{\Delta}},$$

dérivée que nous aurons à intégrer soit dans l'intervalle $(0, \beta)$ (si les ordonnées η', η'' de la courbe $\Delta = 0$ sont imaginaires), soit dans la partie de cet intervalle extérieure à (η', η'') . Ici encore, il nous suffira de noter que la dérivée que nous venons de former ne contient d'autre dénominateur que $\sqrt{\Delta}$ ou, ce qui revient au même, la racine carrée du polynôme (28). Or la primitive, par rapport à η , ou (ce qui revient au même, à des facteurs bornés près) par rapport à Q , de

$$\frac{1}{\sqrt{Q^2 + s_1 Q + s_0}}$$

est

$$\pm \log \left(Q + \frac{s_1}{2} \pm \sqrt{Q^2 + s_1 Q + s_0} \right)$$

expression où les signes se correspondent, mais peuvent toujours être choisis de manière que, dans l'argument du logarithme, les deux termes aient le même signe. Si l'on prend cette précaution, le logarithme portera sur une quantité bornée supérieurement (son maximum ayant lieu pour $\eta = \beta$ ou pour $\eta = 0$) et dont la borne inférieure ne sera autre que la racine carrée du discriminant D du polynôme (28). Or $D = \pm (s_1^2 - 4s_0)$ ne diffère que par un facteur unité de N^3 , de sorte que nous n'avons finalement à opérer que sur l'intégrale $\int \log. N d\xi$, laquelle est bien convergente, et cela uniformément pour toutes les valeurs de v .

De cette uniforme convergence, tant dans la région $\Delta > 0$ que dans la région $\Delta < 0$, il s'ensuit, comme on sait, que la différentiation par rapport à v , sous les signes de quadrature, est légitime, et c'est tout ce qui nous était nécessaire pour étendre au cas actuel les conclusions des nos 13—15 de *JM*.

23. Les remarques des nos 5—7 permettent de simplifier les considérations de *JM* (16) relatives aux termes obtenus en prenant, dans la for-

mule (F_1), le terme (b). On va voir que ces termes n'introduisent aucune difficulté nouvelle et, pour toute disposition de la figure, relèvent de ce qui a été dit ci-dessus.

Dans la formule (F), le terme (a) est la dérivée, par rapport à v , de l'intégrale (5^{bis}) étendue au domaine fixe S_1 (le point $1'$ étant considéré comme défini par sa projection transversale sur S_1 et sa distance transversale v à S_1); le terme (b) est la dérivée de l'intégrale (5), laquelle est également étendue à un domaine fixe si l'on définit le point $1'$ par v et les coordonnées ξ, η du n° 5 ou du n° 7. Moyennant ces choix de variables, les deux quantités à intégrer ne contiennent que des singularités indépendantes de v .

Dans les deux quantités en question, nous avons à remplacer u_1 ou u_1 , uniquement par la partie (b) de sa valeur (F_1), laquelle est une dérivée par rapport à v_2 . Donc les deux termes considérés seront de la forme

$$(31) (ab) = \frac{d}{dv} \iint \frac{\partial}{\partial v_2} \Phi_1(x, y, v, v_2) dx dy, \quad (bb) = \frac{d}{dv} \iint \frac{\partial}{\partial v_2} \Phi_2(\xi, \eta, v, v_2) d\xi d\eta,$$

les intégrales étant étendues à des domaines fixes et les différentiations se faisant dans les conditions classiques. Dès lors, l'interversion des différentiations, soit

$$(ab) = \frac{dJ_1}{dv_2}, \quad (bb) = \frac{dJ_2}{dv_2}$$

avec

$$J_1 = \frac{d}{dv} \iint \Phi_1(x, y, v, v_2) dx dy, \quad J_2 = \frac{d}{dv} \iint \Phi_2(\xi, \eta, v, v_2) d\xi d\eta$$

se fera également dans les conditions classiques. Or, les intégrales J_1, J_2 ne diffèrent de celles qui ont été traitées dans ce qui précède que par le changement de u'_2 en u_2 et de S_2 en S'_2 . La question est donc toute résolue à leur égard, et l'ensemble des termes ($a b$), ($b b$), ($c b$) donnera

$$-\frac{d}{dv_2} \iint u_2 v_{02}, dS_2$$

v_{02} , étant l'expression (19) dans laquelle le point 2 est remplacé par $2'$.

Ce raisonnement s'applique tant au cas traité dans JM qu'à celui qui vient de nous occuper.

24. La même manière de procéder permet de combler une lacune que nous avons laissée subsister dans un précédent Mémoire des *Acta Mathematica* ³³⁾ consacré aux équations à quatre variables indépendantes. Nous avons résolu pour ces dernières, dans le travail dont il s'agit, le problème correspondant à celui que nous avons traité dans *JM*, c'est-à-dire que nous avons exprimé les parties constituantes \mathfrak{V}_{02} et V_{02} de la solution élémentaire relative aux points 0 et 2 en fonction des quantités analogues \mathfrak{V}_{01} , V_{01} , \mathfrak{V}_{12} , V_{12} , moyennant intégration sur S_1 par rapport aux coordonnées du point 1. Mais nous avons à cet effet raisonné exclusivement sur les termes contenant les valeurs de la fonction φ , second membre de l'équation donnée, dans la région T_2 comprise entre S_1 et S_2 .

Les termes contenant les valeurs de u'_2 (ou encore de $L_2 u_2$) le long de S_2 donnent lieu à des calculs exactement identiques aux premiers.

Mais il n'en est pas de même de ceux qui contiennent les valeurs de u_2 (sans facteur L) et pour lesquels les opérations semblent au premier abord plus compliquées.

En réalité, ce dernier cas se ramène au précédent par une marche tout analogue à celle que nous venons d'indiquer pour les équations à trois variables. Il suffit, en ce qui concerne le passage de S_2 à S_1 , de prendre la formule de résolution du problème de Cauchy sous la forme (29^{bis}) de nos Leçons de Yale ³⁴⁾, soit, puisque $m = 4$, $m_1 = 2$,

$$2 \pi u_1 = (a) + (d) + (c') + (f') + (b') + (e');$$

$$(a) = - \iiint V_{12} \varphi dT, \quad (d) = \iiint V_{12} \varphi \frac{dT}{d\gamma},$$

$$(c') = - \iiint V_{12} (u'_2 + L_2 u_2) dS_2, \quad (f') = \iint V_{12} (u'_2 + L_2 u_2) \frac{dS_2}{d\gamma}$$

$$(b') = \frac{d}{d\gamma_2} \iiint V_{12'} u_2 dS_2, \quad (e') = - \frac{d}{d\gamma_2} \iint V_{12'} u_2 \frac{dS_2}{d\gamma}$$

Les termes (a) , (d) sont les mêmes que ceux qui figurent, avec la même notation, dans les formules (2) et (2') du Mémoire A_1 (Mémoire des *Acta Mathematica* qui vient d'être cité). Les termes (c') , (f') se déduisent

³³⁾ Tome XLIX, 1926.

³⁴⁾ No 144, p. 311 de l'édition française. La notation des divers termes est aussi voisine que possible de celle de A_1 ; mais nous les avons rangés dans un ordre plus logique et mieux adapté au raisonnement actuel.

des précédents par le changement de φ en $u'_2 + L_2 u_2$, de T_2 en S_2 , des intégrations quadruples en intégrations triples et des intégrations triples en intégrations doubles. Mais, de plus, on passe également suivant une loi très simple de ces termes aux termes restants (b') , (e') : on doit remplacer $u'_2 + L_2 u_2$ par u_2 et, d'autre part, appliquer la différentiation d/dv_2 en dehors des signes de quadrature. Telle est l'expression u_1 à laquelle, pour arriver à u_0 , on doit appliquer, le long de S_1 , la formule de résolution, que l'on peut d'ailleurs également prendre sous la forme précédente, les termes (b') , (e') et aussi, comme précédemment, (c') et (f') (pour la partie qui ne contient pas L) seront des dérivées par rapport à v . Ici encore, les intégrales ainsi différenciées étant relatives à des domaines fixes si on applique à (b') et à (e') la méthode du n° 5 ou du n° 7. Dans ces conditions, si, après avoir formé les termes

$$(32) \quad (c'a), (c'd), (f'a), (f'd), (b'a), (b'd), (e'a), (e'd),$$

dont le calcul a été indiqué dans A_1 et, d'une manière tout identique, $(c'c')$, $(c'f')$, $(f'c')$, $(f'f')$, $(b'c')$, $(b'f')$, $(e'c')$, $(e'f')$, on passe aux termes

$$(c'b'), (c'e'), (f'b'), (f'e'), (b'b'), (b'e'), (e'b'), (e'e'),$$

ceux-ci seront de forme tout analogue à (31) ; et c'est en vertu des règles classiques que l'on pourra faire sortir la différentiation $\frac{d}{dv_2}$ des signes de quadrature, en l'intervertissant, au besoin, avec la différentiation par rapport à v .

Moyennant cette transformation, les expressions soumises à la différentiation en v_2 sont identiques aux termes (32), au changement près de $u'_2 + L_2 u_2$ en u_2 , et relèvent, par conséquent des mêmes calculs.

En un mot, la valeur de \mathfrak{D}_{02} , fournie par la formule (14) (n° 19) du Mémoire cité A_1 et la valeur de V_{02} donnée aux n° 20 du même Mémoire permettent de construire la valeur u_0 , solution du problème de Cauchy, à partir des données portées par S_2 , absolument comme le permettaient \mathfrak{D}_{01} , V_{01} à partir des données portées sur S_1 . C'est ce qui ne ressortait pas des calculs du Mémoire en question.

(Reçu le 8 juin 1932)

