Ein Satz über die konforme Abbildung Riemannscher Flächen

Von ROLF NEVANLINNA, Helsingfors

§ 1. Einleitung

1. Herr *Speiser*[1]) hat in zwei interessanten Abhandlungen die konforme Abbildung einer speziellen Klasse von Riemannschen Flächen untersucht. Auf folgenden Seiten soll ein Beitrag zu diesem Speiserschen Problem gegeben werden. Ich benutze hierbei, außer dem *Koebe*schen Verzerrungssatz, eine Methode, welche von Herrn *Ahlfors*[2]) herrührt und von ihm mit großem Erfolg zur Untersuchung verschiedener Probleme aus der Theorie der konformen Abbildung angewendet worden ist.

2. Die von Herrn *Speiser* betrachteten Flächen können als diejenigen unendlich vielblättrigen Ueberlagerungsflächen F der in drei gegebenen Punkten w_1, w_2, w_3 punktierten w-Ebene definiert werden, welche an sämtlichen Stellen $w \neq w_1, w_2, w_3$ unverzweigt sind und außerdem folgenden speziellen Bedingungen genügen:

a) F ist einfach zusammenhängend.

b) Ueber den drei kritischen Stellen w_1, w_2, w_3 liegt, außer eventuellen schlichten Blättern, eine endliche oder unendliche Anzahl von Windungspunkten *unendlich hoher Ordnung*.

Um die Struktur einer solchen Fläche F zu beschreiben, denke man sie auf einen schlichten Kreis $|z| < R$ topologisch abgebildet. Es besteht dann eine stetige und umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten z des Kreisinneren und den inneren, d. h. den von den Windungspunkten verschiedenen Stellen der Riemannschen Fläche F. Die Windungspunkte sind Randpunkte der Fläche F; wenn der Punkt w gegen einen solchen Punkt rückt, so strebt der Bildpunkt $z = z(w)$ gegen den Rand $|z| = R$.

---

[1]) *A. Speiser:* Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen und Ueber Riemannsche Flächen (Diese Zeitschrift, Bd. 1 und 2, 1929, 1930). Ich bin Herrn *Speiser* auch für viele anregende briefliche Mitteilungen, welche meine Arbeit auf dem Gebiete der Theorie der Riemannschen Flächen wesentlich befördert haben, zu großem Dank verpflichtet.

[2]) *L. Ahlfors:* Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen (Acta Soc. Scient. Fennicae, Nova Series, T. 1, No. 9, 1930), Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche (Diese Zeitschrift, Bd. 3, 1931), sowie eine Arbeit über die konforme Abbildung Riemannscher Flächen, welche in den Acta Mathematica erscheinen wird.

Die drei Grundpunkte können ohne Einschränkung der Allgemeinheit in $w_\nu = e^{\frac{2\pi\nu i}{3}}$ ($\nu = 1, 2, 3$) gebracht werden. Wir ziehen durch diese Punkte den Einheitskreis und betrachten die unendlich vielen schlichten Kreisscheiben K_0: $|w| < 1$ und K_∞: $|w| > 1$, welche hierdurch aus der Fläche F ausgestanzt werden. Da jedes Blatt $K_0 + K_\infty$ vermittels mindestens zweier Windungspunkte mit der Fläche zusammenhängen muß, so sind entweder alle drei oder gewisse zwei von den drei Punkten w_ν, welche auf der Peripherie einer gegebenen der Kreisscheiben K_0 oder K_∞ belegen sind, Windungspunkte (und somit Randpunkte) der Fläche F. In jenem Fall entspricht vermöge der Abbildung $z = z(w)$ der betreffenden Kreisscheibe ein Teilgebiet k_0 bzw. k_∞ des Kreises $|z| < R$, welches von drei Querschnitten des Kreises, den Bildkurven l_{12}, l_{23}, l_{31} der Kreisbogen $w_1 w_2$, $w_2 w_3$, $w_3 w_1$, begrenzt wird; ein solches Teilgebiet heiße ein *Dreieck*. Wenn dagegen nur zwei von den Peripheriepunkten der betrachteten Kreisscheibe, z. B. w_1 und w_2, Windungspunkte der Fläche darstellen, so entspricht dieser Kreisscheibe ein *Zweieck* k_0 bzw. k_∞, welches von zwei Querschnitten l_{12} und l_{231} des Kreises $|z| < R$ begrenzt wird. Auf letzterem Bogen liegt der Bildpunkt des Peripheriepunktes w_3, der jetzt ein innerer Punkt der Fäche ist.

Die unendlich vielen Zweiecke und Dreiecke k füllen den Kreis $|z| < R$ aus und häufen sich gegen den Rand $|z| = R$. Wenn G_0 ein beliebiges der Gebiete k, z. B. ein Gebiet k_0 ist, so läßt sich die Fläche F von diesem Grundgebiet ausgehend durch kranzförmige Erweiterung ausschöpfen. Zu G_0 (die nullte Generation) werden die unmittelbar angrenzenden (zwei oder drei) Gebiete k_∞ (die erste Generation G_1) hinzugefügt, zum Gebiet $G_0 + G_1$ die von den angrenzenden Gebieten k_0 gebildete zweite Generation G_2, u. s. w.

Der Aufbau der Fläche F läßt sich nach Herrn *Speiser* noch einfacher durch einen „topologischen Baum" darstellen. Zu dieser Darstellung gelangt man, wenn man in der oben erklärten Figur der z-Ebene in jedem Gebiet k_0 bzw. k_∞ denjenigen Punkt z_0 bzw. z_∞ einzeichnet, welcher dem Punkt $w = 0$ bzw. $w = \infty$ entspricht, und den Punkt z_0 des Grundgebietes G_0 mit den (zwei oder drei) Punkten z_∞ der ersten Generation G_1 verbindet durch Kurvenbogen, die unter den Bildern der Halbstrahlen $\arg w = \frac{\nu\pi}{3}$ ($\nu = 1, \ldots, 6$) gewählt werden können. Setzt man diese Kurvenbogen in entsprechender Weise, ausgehend von den Endpunkten z_∞, bis zu den Punkten z_0, z_∞, ... der zweiten, dritten, ... Generation fort, so entsteht ein baumartiges Liniensystem B, welches die unendlich vielen „Knotenpunkte“ z_0, z_∞ verbindet. Auf jedem, von zwei aufeinander folgenden Verzweigungsknoten begrenzten Astsegment liegt stets eine gerade Anzahl ($\geqq 0$) von Knotenpunkten z_0, z_∞. Umgekehrt entspricht jeder derartigen Baumfigur eine wohlbestimmte Riemannsche Fläche F der hier betrachteten Art[3]).

3. Dem Hauptsatz der Theorie der konformen Abbildung gemäß läßt sich die Fläche F nicht nur topologisch, sondern sogar konform auf einen Kreis $|z| < R$ abbilden, dessen Radius R entweder endlich (hyperbolischer Fall) oder unendlich (parabolischer Fall) ist. Beim *Speiser*schen Problem handelt es sich nun um die Frage, welcher von diesen beiden möglichen Fällen für eine gegebene, durch das obige Verfahren dargestellte Fläche F vorliegt. Es seien hier zwei Fälle erwähnt, wo das Resultat bekannt ist.

a) Die Fläche sei so schwach verzweigt, daß die Figur B nur eine endliche Anzahl p von Verzweigungsstellen enthält. Dann besitzt die Fläche genau $p+2$ Windungspunkte und ebenso viele „logarithmische Enden“, denen die $p+2$ offenen Äste der Figur B zugeordnet sind. Eine derartige Fläche F gehört zum parabolischen Typus und läßt sich mithin auf die punktierte Ebene $z \neq \infty$ konform abbilden. Die Umkehrfunktion $w(z)$ der Abbildungsfunktion ist eine meromorphe Funktion der Ordnung $\frac{p}{2}+1$, welche eine Differentialgleichung

$$\{w, z\} \equiv \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = P(z)$$

befriedigt, wo $P(z)$ ein gewisses Polynom p-ten Grades ist[4]).

b) Wenn F möglichst stark verzweigt ist, d. h. wenn die Figur B sich an jedem Knotenpunkt z_0, z_∞ verzweigt, so handelt es sich um die universelle Ueberlagerungsfläche der in $w = w_1, w_2, w_3$ punktierten Ebene. Ueber jedem Grundpunkt w_ν liegt eine unendliche Anzahl von Windungspunkten. Die Fläche wird durch die Umkehrfunktion der Modulfunktion auf einen endlichen Kreis konform abgebildet, und es liegt mithin der hyperbolische Fall vor.

4. Um die Verzweigtheit einer Riemannschen Fläche der betrachteten Klasse zu charakterisieren, führe man die Anzahl $\sigma(n)$ der den

[3]) Man vergleiche hierzu meine Untersuchung Ueber Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten, welche in den Acta Mathematica erscheinen wird.
[4]) Vgl. meine oben zitierte Arbeit.

Generationen $G_0, G_1, \ldots, G_{n-1}$ angehörenden Verzweigungspunkte z_0, z_∞ ein. Die Anzahl der Knotenpunkte der n-ten Generation G_n berechnet sich dann auf $2 + \sigma(n)$. Für die unter a) genannten Flächen ist $\sigma(n)$ endlich, für die Modulfunktion wiederum ist $\sigma(n) = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$.

Das in Aussicht gestellte Kriterium können wir jetzt folgendermaßen formulieren:

Satz. *Wenn die Reihe*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n\,\sigma(n)}$$

divergent ist, so gehört die Riemannsche Fläche dem parabolischen Typus an.

§ 2. Beweis des Satzes

5. Wir denken uns die Riemannsche Fläche F vermittels der Funktion $z = z(w)$ auf den endlichen oder unendlichen Kreis $|z| < R$ konform abgebildet, und zeichnen in oben dargestellter Weise in diesem Kreis die Querschnitte l sowie das Liniensystem B, welches die Knotenpunkte z_0, z_∞ verbindet, ein. Wir fixieren dann einen beliebigen, außerhalb der Linien B belegenen Punkt z des Kreises und lassen ihn sich stetig bewegen, ohne die erwähnten Linien oder die Kreisperipherie $|z| = R$ zu überschreiten. Er beschreibt dann ein, von einem zur Figur B gehörenden Linienzug Γ sowie von gewissen Punkten des Kreises $|z| = R$ begrenztes einfach zusammenhängendes Gebiet H. Wir numerieren die auf der Kurve Γ liegenden unendlich vielen Knotenpunkte z_0, z_∞, indem jedem Punkt je die Ordnungszahl der entsprechenden Generation zuerteilt wird. Unter den Knotenpunkten befindet sich eine wohlbestimmte Verzweigungsstelle (z_0 oder z_∞), welche die niedrigste Ordnungszahl n enthält; wir sagen, das Gebiet H gehöre zur Generation G_n und nennen die erwähnte Verzweigungsstelle „Anfangspunkt“ des Gebietes H (im Gebiete G_0 wählen wir den Punkt z_0, welcher ohne Einschränkung der Allgemeinheit in $z = 0$ verlegt werden kann, als Anfangspunkt der zwei oder drei Gebiete H, welche diesen Punkt als Randpunkt haben). Der Anfangspunkt teilt die Randkurve Γ in zwei Äste, und die auf diesen Ästen liegenden Knotenpunkte z_0, z_∞ erhalten der Reihe nach die Ordnungszahlen $n + 1, n + 2, \ldots$.

6. Es sei H ein zur Generation G_n gehörendes Gebiet. Mittels der Umkehrfunktion $w(z)$ der Abbildungsfunktion $z(w)$ wird es auf ein un-

endlich vielblättriges Teilgebiet F_n der Riemannschen Fläche F abgebildet, welches genau einen Windungspunkt der Fläche F enthält. Wenn dieser Windungspunkt z. B. über dem Grundpunkt $w_3 = 1$ liegt, so setzt sich die Berandung von F_n aus unendlich vielen Halbstrahlen $(0, \infty)$ zusammen, welche gewisse der Strahlen $\arg w = \pm \frac{\pi}{3}$, $\arg w = \pm \frac{2\pi}{3}$ als Spurlinien haben. F_n enthält als Teilgebiet die einfach zusammenhängende universelle Ueberlagerungsfläche des zweifach zusammenhängenden Gebietes, welches entsteht, wenn man aus dem Zweieck $|\arg w| < \frac{\pi}{3}$ den Punkt $w_3 = 1$ entfernt. Andererseits liegen sämtliche Punkte des Zweiecks $|\arg w - \pi| < \frac{\pi}{3}$ außerhalb des Gebietes F_n.

Mittels der Funktion

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \log \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} + i c,$$

wo ein beliebiger Zweig des Logarithmus genommen wird, und wo c eine reelle Konstante ist, wird nun das Gebiet H auf ein schlichtes Gebiet H_ω der ω-Ebene abgebildet, welches die Halbebene $\mathfrak{R}(w) > \frac{\log 3}{2\pi}$ enthält und das selbst ein Teilgebiet der Halbebene $\mathfrak{R}(w) > -\frac{\log 3}{2\pi}$ ausmacht. Die Randkurve Γ_ω von H_ω verläuft im Streifen $|\mathfrak{R}(w)| < \frac{\log 3}{2\pi}$ und geht, falls man der Konstante c einen geeigneten ganzzahligen Wert gibt, durch die Punkte ik $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, so daß der Punkt $\omega = 0$ dem „Anfangspunkt“ des Gebietes H entspricht.

Es sei r eine beliebige Zahl $> n$. Man bestätigt leicht, daß der Kreis $|\omega| = r - n$ die Kurve Γ_ω in genau zwei Punkten A_r und B_r schneidet; wenn r vom Wert $r = n$ ins Unendliche wächst, so durchlaufen die Punkte A_r und B_r die beiden Bogen, in welche die Randkurve Γ_ω durch den Punkt $\omega = 0$ geteilt wird. Geht man zu der $\zeta = \log \omega$-Ebene über, so wird H_ω in ein Streifengebiet H_ζ und der Bogen $A_r\, B_r$ der Kreislinie $|\omega| = r - n$ in einen zur imaginären Achse parallelen Querschnitt $\mathfrak{R}(\zeta) = \log(r - n)$ übergeführt, dessen Länge kleiner als 2π ist.

Andererseits schneide man den Kreis $|z| < R$ auf längs einem Ast der Figur B, der den Nullpunkt mit der Peripherie $|z| = R$ verbindet, und bilde mittels eines beliebig festgelegten Zweiges der Funktion

$t = \log z$ den aufgeschnittenen Kreisbereich auf einen von zwei Parallelkurven und von der Geraden $\Re(\log z) = \log R$ begrenzten Bereich ab; dem Gebiet H entspricht hierbei ein gewisses Gebiet H_t der t-Ebene und dem Querschnitt $A_r B_r$ von H_ω ein Querschnitt von H_t, dessen Länge mit $s(r)$ bezeichnet werden soll. Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung findet man, daß

$$(s(r))^2 = \left(\int\limits_{A_r B_r} \left|\frac{d\log z}{d\log\omega}\right| |d\log\omega|\right)^2 \leqq \int\limits_{A_r B_r} |d\log\omega| \cdot \int\limits_{A_r B_r} \left|\frac{d\log z}{d\log\omega}\right|^2 |d\log\omega|$$

$$< 2\pi \frac{dA(r)}{d\log(r-n)} \leqq 2\pi r \frac{dA(r)}{dr},$$

wo $A(r)$ der Flächeninhalt des von dem betrachteten Querschnitt, von der Bildkurve Γ_t der Linie Γ und von der Geraden $\log|z| = \log R_0$ begrenzten Gebietes ist, wobei R_0 eine beliebig festgelegte Zahl des Intervalles $0 < R_0 < R$ ist und der Parameterwert r so groß $(r > r_0)$ gewählt werden soll, daß auf dem genannten Querschnitt $|z| > R_0$ gilt. Es wird mithin

$$\Sigma (s(r))^2 < 2\pi r \frac{dJ}{dr}, \tag{1}$$

wo die Summation über alle Gebiete H zu erstrecken ist, welche zu den Generationen $G_0, G_1, \ldots, G_n$ gehören $(n < r)$, und wo $J(r) = \Sigma A(r)$.

Die Anzahl der Querschnitte $s(r)$ sei gleich $\lambda(r)$, und die Gesamtlänge $\Sigma\, s(r)$ gleich $\alpha(r)$. Gemäß der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich, daß

$$\Sigma (s(r))^2 \geqq \frac{(\Sigma\, s(r))^2}{\lambda(r)} = \frac{(\alpha(r))^2}{\lambda(r)}. \tag{2}$$

Wir bezeichnen mit β die größere der Zahlen 0 und $2\pi - \alpha$:

$$\beta(r) = \max(0, 2\pi - \alpha), \tag{3}$$

so daß also $\alpha \geqq 2\pi - \beta$ und somit $\alpha^2 \geqq 4\pi^2 - 4\pi\beta$, und finden aus (1) und (2), daß

$$\frac{4\pi^2}{\lambda(r)} - \frac{4\pi\beta(r)}{\lambda(r)} < 2\pi r \frac{dJ}{dr}$$

und also, für $r > r_0$,

$$(4) \qquad 2\pi \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\lambda(r)} \leqq \mathfrak{J}(r) - \mathfrak{J}(r_0) + 2 \int_{r_0}^{r} \frac{\beta(r)\,dr}{r\lambda(r)}.$$

7. Wir benutzen jetzt folgenden Hilfssatz, dessen Beweis im 3. Abschnitt gegeben werden soll:

Hilfssatz. Wenn die Riemannsche Fläche zum hyperbolischen Typus gehört, so ist das Integral

$$(5) \qquad \int_{r_0}^{\infty} \frac{\beta(r)\,dr}{r\lambda(r)}$$

konvergent.

Nimmt man nun an, daß der hyperbolische Fall vorliegt, so strebt der Flächeninhalt $\mathfrak{J}(r) - \mathfrak{J}(r_0)$ für $r \to \infty$ gegen einen endlichen Wert $< 2\pi \log \frac{R}{R_0}$, und die rechte Seite der Beziehung (4) liegt somit unter der endlichen Schranke

$$2\pi \log \frac{R}{R_0} + 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\beta(r)\,dr}{r\lambda(r)},$$

woraus folgt, daß das links stehende Integral in (4) für $r \to \infty$ konvergiert.

Die gegebene Riemannsche Fläche gehört folglich sicher dem parabolischen Typus an, sobald das zuletzt genannte Integral divergent ist. Wegen der evidenten Beziehung (vgl. Einleitung): $\lambda(r) = \sigma(\nu) + 2$ für $\nu - 1 < r \leqq \nu$, sind dasselbe Integral und die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\sigma(n)}$$

gleichzeitig konvergent oder divergent, woraus sich die Richtigkeit der in unserem Satze ausgesprochenen Behauptung ergibt.

§ 3. Beweis des Hilfssatzes

8. Die Riemannsche Fläche F gehöre dem hyperbolischen Typus an; sie läßt sich also auf einen *endlichen* Kreis $|z| < R$ schlicht abbilden, dessen Radius R ohne Einschränkung der Allgemeinheit größer als 1 angenommen werden kann.

Gibt man dem oben eingeführten Parameter r einen ganzzahligen Wert n, so verbinden die Kurvenstücke $a_r\, b_r$, welche in der z-Ebene als Bilder der Kreisbogen $A_r\, B_r$ erscheinen, die Knotenpunkte der n-ten Generation G_n und bilden zusammen eine geschlossene Kurve C_r. Für nichtganzzahlige Werte r $(n - 1 < r < n)$ verbinden wir die Endpunkte der zu zwei Nachbargebieten H gehörigen Endpunkte a_r und b_r, welche im allgemeinen nicht zusammenfallen, vermittels eines Teilstückes γ_r desjenigen Zweiges Z der Figur B, auf welchem die betreffenden Endpunkte liegen. Der Verbindungsbogen γ_r ist ein Teilbogen desjenigen Segmentes von Z, welches von den zur $(n-1)$-ten und zur n-ten Generation gehörenden Knotenpunkte z_0, z_∞ (oder z_∞, z_0) begrenzt wird.

In der $t = \log z$-Ebene entspricht der durch obige Konstruktion hergestellten geschlossenen Linie C_r ein Kurvenbogen, dessen Länge mindestens gleich 2π ist. Wenn $\gamma(r)$ die Länge des Bildbogens eines der hinzugefügten Verbindungsbogen γ_r bezeichnet, so ist die Gesamtlänge des genannten Kurvenbogens andererseits gleich $\Sigma\, s\,(r) + \Sigma\, \gamma\,(r) = \alpha\,(r) + \Sigma\, \gamma\,(r)$, und es wird mithin $2\pi - \alpha \leqq \Sigma\, \gamma$, und also, gemäß (3),

$$\beta\,(r) \leqq \Sigma\, \gamma\,(r). \tag{6}$$

9. Um die Größen $\gamma\,(r)$ abzuschätzen, nehmen wir ein beliebiges der Kurvenstücke γ_r und fixieren das Astsegment $P_1\, P_2$, welches γ_r als Teilbogen enthält und von zwei aufeinander folgenden Verzweigungsstellen P_1 und P_2 begrenzt wird. Die Knotenpunkte P_1 und P_2 mögen zu den Generationen G_m und G_{m+2p+1} gehören. Wenn der Parameterwert r das Intervall $m \leqq r \leqq m + 2p + 1$ durchläuft, so bewegen sich die Endpunkte a_r und b_r des Kurvenstückes γ_r stetig von P_1 bis zu P_2. Die zwischen diesen Endpunkten liegenden Knotenpunkte, deren Zahl $2p$ beträgt, entsprechen gewissen Zweiecken k_0, k_∞, welche zusammen mit den beiden Dreiecken, in welchen die Endpunkte P_1 und P_2 liegen, ein Gebiet bilden, welches im folgenden mit K bezeichnet werden soll.

Dem Bogen $P_1\, P_2$ entspricht in der w-Ebene eine Linie, welche als Spurlinie eine der Geraden hat, die aus der reellen Achse durch eine

Drehung um $\frac{2\pi\nu}{3}$ $(\nu = 0, 1, 2)$ entstehen; im folgenden wird $\nu = 0$ angenommen. Ferner möge dem Endpunkt P_1 der Nullpunkt $w = 0$ entsprechen; der Bildpunkt von P_2 fällt dann in den Punkt $w = \infty$. Vermittels der Funktion

$$y = (-1)^p \log \frac{w - w_1}{w - w_2} - \frac{\pi i}{3},$$

bilden wir die universelle Ueberlagerungsfläche des zweifach zusammenhängenden Gebietes $w \neq w_1, w_2$, auf die schlichte y-Ebene ab. Setzt man hier $w = w(z)$, so läßt sich ein Zweig des Logarithmus bestimmen, so daß das Gebiet K in den schlichten Parallelstreifen $|\mathfrak{I}(y)| < (p+1)\pi$ übergeführt wird. Den Knotenpunkten z_0 des Bogens $P_1 P_2$ entsprechen bei dieser Abbildung die Punkte $y = -(p + \frac{2}{3})\pi i + 2\pi\nu i$, den Knotenpunkten z_∞ die Punkte $y = (p + \frac{2}{3})\pi i - 2\pi\nu i$ $(\nu = 0, 1, \ldots, p)$, so daß also der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Bildpunkten entweder gleich $\frac{2\pi}{3}$ oder gleich $\frac{4\pi}{3}$ ist. Dem Bogen $P_1 P_2$ ist die Strecke $|y| \leqq (p + \frac{2}{3})\pi$ der imaginären Achse zugeordnet.

Wir nehmen nun einen Wert r des Intervalles $m \leqq r \leqq m + 2p + 1$. Dem Bogen γ_r entspricht in der y-Ebene ein Segment der imaginären Achse, welche als Teilstrecke eines Knotenintervalles höchstens die Länge $\frac{4\pi}{3}$ hat. Wir wollen jetzt die Länge $\bar{\gamma}_{(r)}$ des Bogens γ_r mit Hilfe der Verzerrungssätze von *Koebe* und *Bieberbach* abschätzen.[5])

Es sei $y = i y_r$ der Punkt, welcher dem Endpunkt $z = a_r$ des betrachteten Bogens γ_r entspricht; nach obigem gilt für $m + p + \nu \leqq r \leqq m + p + \nu + 1$ $(|\nu| = 0, 1, \ldots, p)$ die Ungleichung

$$(7) \qquad (p+1)\pi - |y_r| \geqq \pi(\tfrac{1}{3} + p - |\nu|) > 1 + p - |\nu|.$$

---

[5]) Der hier gemeinte Satz lautet: Wenn $f(z) = a_1 z + \ldots$ den Kreis $|z| < \rho$ schlicht und konform abbildet, so liegt der Wert des Quotienten

$$\left| \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \right|,$$

wo z_1 und z_2 zwei beliebige Punkte des Kreises $|z| \leqq \theta\rho$ sind $(0 \leqq \theta < 1)$, unterhalb einer Schranke $Q(\theta)$, die nur von θ abhängig ist (es ist z. B. $Q(\theta) < \left(\frac{1+\theta}{1-\theta}\right)^4$). — Der *Bieberbach*sche Flächensatz besagt bekanntlich, daß der Flächeninhalt des Bildgebietes wenigstens gleich $\pi |a_1|^2 \rho^2$ ist.

Wir wenden zuerst den *Koebe*schen Verzerrungssatz an in dem Kreis vom Radius 2π, der den Punkt $y = i y_r$ zum Mittelpunkt hat, falls $(p + 1)\pi - |y_r| \geqq 2\pi$, und den Punkt $y = \pm (p - 1)\pi i$, falls $|\pm (p + 1)\pi - y_r| < 2\pi$. Man findet derart, daß in jedem Punkt y des Intervalles $|y| \leqq (p + \frac{2}{3})\pi$ der imaginären Achse, für welchen der Abstand $|y - i y_r| \leqq \frac{4\pi}{3}$ ist, die Ungleichung

$$\left|\frac{dz}{dy}\right| < N_1 \left|\frac{dz}{dy}\right|_{y=iy_r}$$

besteht, wo N_1 eine numerische Konstante ist.

Hierauf schlagen wir um den Punkt $y = i y_r$ einen Kreis mit dem Radius $(p + 1)\pi - |y_r| = \varrho(r)$, und erhalten mit Hilfe des Flächensatzes für den Flächeninhalt des in der z-Ebene liegenden Bildgebietes dieses Kreises die untere Schranke $\pi \varrho^2 \left|\frac{dz}{dy}\right|^2$, wo $y = i y_r$ zu nehmen ist. Da dieser Flächeninhalt andererseits höchstens gleich dem Flächeninhalt πq des Gebietes K ist, so wird

$$\left|\frac{dz}{dy}\right|_{y=iy_r} < \frac{\sqrt{q}}{\varrho(r)},$$

und also

$$\left|\frac{dz}{dy}\right| < \frac{N_1 \sqrt{q}}{\varrho(r)}$$

für jeden innerhalb des Intervalles $|y| \leqq (p + \frac{2}{3})\pi$ liegenden Punkt der Strecke $|y - i y_r| < \frac{4\pi}{3}$ der imaginären Achse. Diese Ungleichung ergibt für die Länge $\bar{\gamma}(r)$ des Bogens γ_r die obere Schranke

$$\bar{\gamma}(r) < \frac{4\pi N_1}{3} \cdot \frac{\sqrt{q}}{\varrho(r)}.$$

Wir nehmen nun an, daß der Bogen $P_1 P_2$ außerhalb des Einheitskreises $|z| = 1$ belegen ist. Dann gilt $\frac{d \log z}{dz} \leqq 1$, woraus hervorgeht, daß auch die Länge $\gamma(r)$ des Bildbogens von γ_r (in der $\log z$-Ebene) der Ungleichung

$$\gamma(r) < \frac{N_2 \sqrt{q}}{\varrho(r)}$$

genügt, wo N_2 die numerische Konstante $\frac{4\pi N_1}{3}$ bezeichnet. Unter Berücksichtigung der Beziehung (7), wo der rechts stehende Ausdruck den Wert des Radius $\varrho(r)$ angibt, wird ferner

$$(8) \qquad \int_m^{m+2p+1} \gamma(r)\, dr < 2N_2 \sqrt{q} \sum_{\nu=1}^{p+1} \frac{1}{\nu} < 2N_2 \sqrt{q} \log 3\,(p+1).$$

Diese Beziehung haben wir unter der Voraussetzung hergeleitet, daß m und $m+2p+1$ ganze Zahlen sind, welche die Ordnungszahlen der aufeinander folgenden Verzweigungsstellen P_1 und P_2 angeben, die den betrachteten Bogen $P_1\, P_2$ begrenzen. Nun sieht man unmittelbar ein, daß das obige Resultat auch dann besteht, wenn die genannten ganzen Zahlen durch beliebige Werte r_1 und r_2 $(0 < r_1 < r_2)$ ersetzt werden, wobei für $P_1\, P_2$ ein von inneren Verzweigungstellen freier Bogen zu wählen ist, dessen Endpunkte P_1 und P_2 den Parameterwerten $r = r_1$ bzw. r_2 zugeordnet sind. Es wird somit für einen beliebigen derartigen Bogen $P_1\, P_2$

$$(9) \qquad \int_{r_1}^{r_2} \gamma(r)\, dr < 2N_2 \sqrt{q} \log 3\,(r_2 - r_1 + 1) < N_3 \sqrt{q} \log 3\,(r_2 + 1)$$

wo $N_3 = 2N_2$ eine numerische Konstante und πq den Flächeninhalt des dem Bogen $P_1\, P_2$ entsprechenden Gebietes K bezeichnen.

Wir fixieren jetzt einen so großen Wert $n_0 > 1$, daß sämtliche Punkte z der Generation G_n für $n > n_0$ außerhalb des Einheitskreises $|z| = 1$ liegen, was möglich ist, da der Radius R voraussetzungsgemäß größer als 1 ist. Es sei $B\,(n_0, r)$ derjenige Teil der Baumfigur B, dessen Punkte $(z = a_r)$ dem Parameterintervall (n_0, r) entsprechen. Die Zweige von $B(n_0, r)$ zerlegen wir in Segmente $S(P_1, P_2)$, deren Endpunkte P_1, P_2 entweder Verzweigungsstellen oder den äußersten Werten n_0 und r angehörende Punkte (a_{n_0} bzw. a_r) sind, so daß im Innern von S keine Verzweigungsstellen vorhanden sind. Die Anzahl dieser Segmente ist offenbar höchstens gleich der doppelten Anzahl der innerhalb der Kurve C_r belegenen Verzweigungsstellen von B, vermehrt um 1, also höchstens gleich $2\lambda(r)$ (vgl. Nr. 7).

Integriert man die zu einem derartigen Bogen S gehörende Größe $\gamma(r)$ zwischen den Grenzen r_1 und r_2, welche den Endpunkten P_1 und P_2 zugeordnet sind, so wird, da jedenfalls $r_2 \leqq r$ ist,

$$\int\limits_S \gamma(r)\,dr < N_3 \sqrt{q} \log 3(r+1) < N_4 \sqrt{q} \log r, \tag{10}$$

wo also πq den Flächeninhalt des dem Bogen $P_1 P_2$ entsprechenden Gebietes K ist, und N_4 eine numerische Konstante bezeichnet.

10. Mittels letzter Ungleichung läßt sich nun das Integral

$$b(r) \equiv \int\limits_{n_0}^{r} \beta(u)\,du$$

in folgender Weise abschätzen. Zunächst gilt gemäß der Beziehung (6)

$$b(r) \leqq \int\limits_{n_0}^{r} (\Sigma\,\gamma(u))\,du,$$

wo die Summation über sämtliche, dem Parameterwert $r = u$ entsprechenden Bogen S zu erstrecken ist. Das letzte Integral läßt sich aber schreiben

$$\int\limits_{n_0}^{r} (\Sigma\,\gamma(u))\,du = \Sigma \int\limits_S \gamma(u)\,du,$$

wo über alle Bogen S der Figur $B(n_0, r)$ zu summieren ist, und es wird somit, nach der Beziehung (10)

$$b(r) < N_4 \log r \cdot \Sigma \sqrt{q}\,.$$

Beachtet man nun, daß die Anzahl der Bogen S höchstens $2\lambda(r)$ beträgt, so wird nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\Sigma \sqrt{q} \leqq \sqrt{2\lambda(r)} \cdot \sqrt{\Sigma q}\,.$$

Hier bedeutet $\pi \Sigma q$ den gesamten Flächeninhalt der dem Bogen S entsprechenden Gebiete K. Unter Beachtung der Definition dieser Gebiete sieht man unmittelbar ein, daß jeder Punkt des Kreises $|z| < R$, welcher zu einem Zweieck (k_0 oder k_∞) gehört, höchstens in *einem* Gebiet K enthalten ist, während ein Punkt z eines Dreieckes (k_0 oder k_∞) höchstens zu *drei* verschiedenen Gebieten K gehört. Hieraus folgt, daß der Gesamtinhalt $\pi \Sigma q$ den dreifachen Flächeninhalt des Kreises $|z| < R$ nicht übersteigen kann, so daß also für jedes $r > n_0$

$$\Sigma q \leqq 3 R^2 .$$

Zusammenfassend wird also schließlich für $r > n_0$

$$b(r) < N \sqrt{\lambda(r)} \cdot \log r,$$

wo N eine von r unabhängige Zahl ist.

Nunmehr läßt sich die Endlichkeit des Integrals (5) leicht beweisen. Durch partielle Integration findet man für $r > r_0 > n_0 > 1$, da $\lambda(r) > 1$ ist,

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\beta(r)}{r\lambda(r)}\, dr = \int_{r_0}^{r} \frac{d\, b(r)}{r\lambda(r)} \leqq \frac{b(r)}{r\lambda(r)} + \int_{r_0}^{r} \frac{b(r)\, dr}{r^2 \lambda(r)} + \int_{r_0}^{r} \frac{b(r)\, d\lambda(r)}{r\lambda^2}$$

$$\leqq N \frac{\log r}{r} + N \int_{r_0}^{r} \frac{\log r\, dr}{r^2} + N \int_{r_0}^{r} \frac{\log r}{r} \frac{d\lambda}{\lambda^{3/2}}$$

$$< N \left(\frac{\log r_0}{r_0} + \frac{1}{r_0} + \int_{r_0}^{r} \frac{\log r}{r} \frac{d\lambda}{\lambda^{3/2}} \right).$$

Da ferner $\frac{\log r}{r} < 1$ für $r \geqq r_0 > 1$, so wird der Ausdruck rechts kleiner als

$$N\left(2 + \int_{r_0}^{r} \frac{d\lambda}{\lambda^{3/2}}\right) = 2N\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda(r_0)}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda(r)}}\right) < 4N,$$

woraus die behauptete Konvergenz des Integrals (5) hervorgeht.

(Eingegangen den 1. April 1932)