

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 5 (1933)

**Artikel:** Ein Satz über die konforme Abbildung Riemannscher Flächen.  
**Autor:** Nevanlinna, Rolf  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-6657>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ein Satz über die konforme Abbildung Riemannscher Flächen

Von ROLF NEVANLINNA, Helsingfors

## § 1. Einleitung

1. Herr *Speiser*<sup>1)</sup> hat in zwei interessanten Abhandlungen die konforme Abbildung einer speziellen Klasse von Riemannschen Flächen untersucht. Auf folgenden Seiten soll ein Beitrag zu diesem Speiserschen Problem gegeben werden. Ich benutze hierbei, außer dem *Koebeschen* Verzerrungssatz, eine Methode, welche von Herrn *Ahlfors*<sup>2)</sup> herrührt und von ihm mit großem Erfolg zur Untersuchung verschiedener Probleme aus der Theorie der konformen Abbildung angewendet worden ist.

2. Die von Herrn *Speiser* betrachteten Flächen können als diejenigen unendlich vielblättrigen Ueberlagerungsflächen  $F$  der in drei gegebenen Punkten  $w_1, w_2, w_3$  punktierten  $w$ -Ebene definiert werden, welche an sämtlichen Stellen  $w \neq w_1, w_2, w_3$  unverzweigt sind und außerdem folgenden speziellen Bedingungen genügen:

a)  $F$  ist einfach zusammenhängend.

b) Ueber den drei kritischen Stellen  $w_1, w_2, w_3$  liegt, außer eventuellen schlichten Blättern, eine endliche oder unendliche Anzahl von Windungspunkten *unendlich hoher Ordnung*.

Um die Struktur einer solchen Fläche  $F$  zu beschreiben, denke man sie auf einen schlichten Kreis  $|z| < R$  topologisch abgebildet. Es besteht dann eine stetige und umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten  $z$  des Kreisinneren und den inneren, d. h. den von den Windungspunkten verschiedenen Stellen der Riemannschen Fläche  $F$ . Die Windungspunkte sind Randpunkte der Fläche  $F$ ; wenn der Punkt  $w$  gegen einen solchen Punkt rückt, so strebt der Bildpunkt  $z = z(w)$  gegen den Rand  $|z| = R$ .

---

1) *A. Speiser*: Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen und Ueber Riemannsche Flächen (Diese Zeitschrift, Bd. 1 und 2, 1929, 1930). Ich bin Herrn *Speiser* auch für viele anregende briefliche Mitteilungen, welche meine Arbeit auf dem Gebiete der Theorie der Riemannschen Flächen wesentlich befördert haben, zu großem Dank verpflichtet.

2) *L. Ahlfors*: Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen (Acta Soc. Scient. Fennicae, Nova Series, T. 1, No. 9, 1930), Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche (Diese Zeitschrift, Bd. 3, 1931), sowie eine Arbeit über die konforme Abbildung Riemannscher Flächen, welche in den Acta Mathematica erscheinen wird.

Die drei Grundpunkte können ohne Einschränkung der Allgemeinheit

in  $w_\nu = e^{\frac{2\pi\nu i}{3}}$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ) gebracht werden. Wir ziehen durch diese Punkte den Einheitskreis und betrachten die unendlich vielen schlichten Kreisscheiben  $K_0: |w| < 1$  und  $K_\infty: |w| > 1$ , welche hierdurch aus der Fläche  $F$  ausgestanzt werden. Da jedes Blatt  $K_0 + K_\infty$  mittels mindestens zweier Windungspunkte mit der Fläche zusammenhängen muß, so sind entweder alle drei oder gewisse zwei von den drei Punkten  $w_\nu$ , welche auf der Peripherie einer gegebenen der Kreisscheiben  $K_0$  oder  $K_\infty$  belegen sind, Windungspunkte (und somit Randpunkte) der Fläche  $F$ . In jenem Fall entspricht vermöge der Abbildung  $z = z(w)$  der betreffenden Kreisscheibe ein Teilgebiet  $k_0$  bzw.  $k_\infty$  des Kreises  $|z| < R$ , welches von drei Querschnitten des Kreises, den Bildkurven  $l_{12}$ ,  $l_{23}$ ,  $l_{31}$  der Kreisbogen  $w_1 w_2, w_2 w_3, w_3 w_1$ , begrenzt wird; ein solches Teilgebiet heiße ein *Dreieck*. Wenn dagegen nur zwei von den Peripheriepunkten der betrachteten Kreisscheibe, z. B.  $w_1$  und  $w_2$ , Windungspunkte der Fläche darstellen, so entspricht dieser Kreisscheibe ein *Zweieck*  $k_0$  bzw.  $k_\infty$ , welches von zwei Querschnitten  $l_{12}$  und  $l_{231}$  des Kreises  $|z| < R$  begrenzt wird. Auf letzterem Bogen liegt der Bildpunkt des Peripheriepunktes  $w_3$ , der jetzt ein innerer Punkt der Fläche ist.

Die unendlich vielen Zweiecke und Dreiecke  $k$  füllen den Kreis  $|z| < R$  aus und häufen sich gegen den Rand  $|z| = R$ . Wenn  $G_0$  ein beliebiges der Gebiete  $k$ , z. B. ein Gebiet  $k_0$  ist, so läßt sich die Fläche  $F$  von diesem Grundgebiet ausgehend durch kranzförmige Erweiterung ausschöpfen. Zu  $G_0$  (die nullte Generation) werden die unmittelbar angrenzenden (zwei oder drei) Gebiete  $k_\infty$  (die erste Generation  $G_1$ ) hinzugefügt, zum Gebiet  $G_0 + G_1$  die von den angrenzenden Gebieten  $k_0$  gebildete zweite Generation  $G_2$ , u. s. w.

Der Aufbau der Fläche  $F$  läßt sich nach Herrn *Speiser* noch einfacher durch einen „topologischen Baum“ darstellen. Zu dieser Darstellung gelangt man, wenn man in der oben erklärten Figur der  $z$ -Ebene in jedem Gebiet  $k_0$  bzw.  $k_\infty$  denjenigen Punkt  $z_0$  bzw.  $z_\infty$  einzeichnet, welcher dem Punkt  $w = 0$  bzw.  $w = \infty$  entspricht, und den Punkt  $z_0$  des Grundgebietes  $G_0$  mit den (zwei oder drei) Punkten  $z_\infty$  der ersten Generation  $G_1$  verbindet durch Kurvenbogen, die unter den Bildern der Halbstrahlen  $\arg w = \frac{\nu\pi}{3}$  ( $\nu = 1, \dots, 6$ ) gewählt werden können. Setzt man diese Kurvenbogen in entsprechender Weise, ausgehend von den Endpunkten  $z_\infty$ , bis zu den Punkten  $z_0, z_\infty, \dots$  der zweiten, dritten, ... Generation fort, so entsteht ein baumartiges Liniensystem  $B$ , welches

die unendlich vielen „Knotenpunkte“  $z_0, z_\infty$  verbindet. Auf jedem, von zwei aufeinander folgenden Verzweigungsknoten begrenzten Astsegment liegt stets eine gerade Anzahl ( $\geq 0$ ) von Knotenpunkten  $z_0, z_\infty$ . Umgekehrt entspricht jeder derartigen Baumfigur eine wohlbestimmte Riemannsche Fläche  $F$  der hier betrachteten Art<sup>3)</sup>.

3. Dem Hauptsatz der Theorie der konformen Abbildung gemäß läßt sich die Fläche  $F$  nicht nur topologisch, sondern sogar konform auf einen Kreis  $|z| < R$  abbilden, dessen Radius  $R$  entweder endlich (hyperbolischer Fall) oder unendlich (parabolischer Fall) ist. Beim *Speiserschen* Problem handelt es sich nun um die Frage, welcher von diesen beiden möglichen Fällen für eine gegebene, durch das obige Verfahren dargestellte Fläche  $F$  vorliegt. Es seien hier zwei Fälle erwähnt, wo das Resultat bekannt ist.

a) Die Fläche sei so schwach verzweigt, daß die Figur  $B$  nur eine endliche Anzahl  $p$  von Verzweigungsstellen enthält. Dann besitzt die Fläche genau  $p + 2$  Windungspunkte und ebenso viele „logarithmische Enden“, denen die  $p + 2$  offenen Äste der Figur  $B$  zugeordnet sind. Eine derartige Fläche  $F$  gehört zum parabolischen Typus und läßt sich mithin auf die punktierte Ebene  $z \neq \infty$  konform abbilden. Die Umkehrfunktion  $w(z)$  der Abbildungsfunktion ist eine meromorphe Funktion der Ordnung  $\frac{p}{2} + 1$ , welche eine Differentialgleichung

$$\{w, z\} \equiv \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''}{w'} \right)^2 = P(z)$$

befriedigt, wo  $P(z)$  ein gewisses Polynom  $p$ -ten Grades ist<sup>4)</sup>.

b) Wenn  $F$  möglichst stark verzweigt ist, d. h. wenn die Figur  $B$  sich an jedem Knotenpunkt  $z_0, z_\infty$  verzweigt, so handelt es sich um die universelle Ueberlagerungsfläche der in  $w = w_1, w_2, w_3$  punktierten Ebene. Ueber jedem Grundpunkt  $w_v$  liegt eine unendliche Anzahl von Windungspunkten. Die Fläche wird durch die Umkehrfunktion der Modulfunktion auf einen endlichen Kreis konform abgebildet, und es liegt mithin der hyperbolische Fall vor.

4. Um die Verzweigkeit einer Riemannschen Fläche der betrachteten Klasse zu charakterisieren, führe man die Anzahl  $\sigma(n)$  der den

<sup>3)</sup> Man vergleiche hierzu meine Untersuchung Ueber Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten, welche in den Acta Mathematica erscheinen wird.

<sup>4)</sup> Vgl. meine oben zitierte Arbeit.

Generationen  $G_0, G_1, \dots, G_{n-1}$  angehörenden Verzweigungspunkte  $z_0, z_\infty$  ein. Die Anzahl der Knotenpunkte der  $n$ -ten Generation  $G_n$  berechnet sich dann auf  $2 + \sigma(n)$ . Für die unter a) genannten Flächen ist  $\sigma(n)$  endlich, für die Modulfunktion wiederum ist  $\sigma(n) = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$ .

Das in Aussicht gestellte Kriterium können wir jetzt folgendermaßen formulieren:

**Satz.** *Wenn die Reihe*

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n \sigma(n)}$$

*divergent ist, so gehört die Riemannsche Fläche dem parabolischen Typus an.*

## § 2. Beweis des Satzes

5. Wir denken uns die Riemannsche Fläche  $F$  mittels der Funktion  $z = z(w)$  auf den endlichen oder unendlichen Kreis  $|z| < R$  konform abgebildet, und zeichnen in oben dargestellter Weise in diesem Kreis die Querschnitte  $l$  sowie das Liniensystem  $B$ , welches die Knotenpunkte  $z_0, z_\infty$  verbindet, ein. Wir fixieren dann einen beliebigen, außerhalb der Linien  $B$  belegenen Punkt  $z$  des Kreises und lassen ihn sich stetig bewegen, ohne die erwähnten Linien oder die Kreisperipherie  $|z| = R$  zu überschreiten. Er beschreibt dann ein, von einem zur Figur  $B$  gehörenden Linienzug  $\Gamma$  sowie von gewissen Punkten des Kreises  $|z| = R$  begrenztes einfach zusammenhängendes Gebiet  $H$ . Wir numerieren die auf der Kurve  $\Gamma$  liegenden unendlich vielen Knotenpunkte  $z_0, z_\infty$ , indem jedem Punkt je die Ordnungszahl der entsprechenden Generation zuerteilt wird. Unter den Knotenpunkten befindet sich eine wohlbestimmte Verzweigungsstelle ( $z_0$  oder  $z_\infty$ ), welche die niedrigste Ordnungszahl  $n$  enthält; wir sagen, das Gebiet  $H$  gehöre zur Generation  $G_n$  und nennen die erwähnte Verzweigungsstelle „Anfangspunkt“ des Gebietes  $H$  (im Gebiete  $G_0$  wählen wir den Punkt  $z_0$ , welcher ohne Einschränkung der Allgemeinheit in  $z = 0$  verlegt werden kann, als Anfangspunkt der zwei oder drei Gebiete  $H$ , welche diesen Punkt als Randpunkt haben). Der Anfangspunkt teilt die Randkurve  $\Gamma$  in zwei Äste, und die auf diesen Ästen liegenden Knotenpunkte  $z_0, z_\infty$  erhalten der Reihe nach die Ordnungszahlen  $n + 1, n + 2, \dots$ .

6. Es sei  $H$  ein zur Generation  $G_n$  gehörendes Gebiet. Mittels der Umkehrfunktion  $w(z)$  der Abbildungsfunktion  $z(w)$  wird es auf ein un-

endlich vielblättriges Teilgebiet  $F_n$  der Riemannschen Fläche  $F$  abgebildet, welches genau einen Windungspunkt der Fläche  $F$  enthält. Wenn dieser Windungspunkt z. B. über dem Grundpunkt  $w_3 = 1$  liegt, so setzt sich die Berandung von  $F_n$  aus unendlich vielen Halbstrahlen  $(0, \infty)$  zusammen, welche gewisse der Strahlen  $\arg w = \pm \frac{\pi}{3}$ ,  $\arg w = \pm \frac{2\pi}{3}$  als Spurlinien haben.  $F_n$  enthält als Teilgebiet die einfach zusammenhängende universelle Ueberlagerungsfläche des zweifach zusammenhängenden Gebietes, welches entsteht, wenn man aus dem Zweieck  $|\arg w| < \frac{\pi}{3}$  den Punkt  $w_3 = 1$  entfernt. Andererseits liegen sämtliche Punkte des Zweiecks  $|\arg w - \pi| < \frac{\pi}{3}$  außerhalb des Gebietes  $F_n$ .

Mittels der Funktion

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \log \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} + ic,$$

wo ein beliebiger Zweig des Logarithmus genommen wird, und wo  $c$  eine reelle Konstante ist, wird nun das Gebiet  $H$  auf ein schlichtes Gebiet  $H_\omega$  der  $\omega$ -Ebene abgebildet, welches die Halbebene  $\Re(w) > \frac{\log 3}{2\pi}$  enthält und das selbst ein Teilgebiet der Halbebene  $\Re(w) > -\frac{\log 3}{2\pi}$  ausmacht. Die Randkurve  $\Gamma_\omega$  von  $H_\omega$  verläuft im Streifen  $|\Re(w)| < \frac{\log 3}{2\pi}$  und geht, falls man der Konstante  $c$  einen geeigneten ganzzahligen Wert gibt, durch die Punkte  $ik$  ( $k=0, \pm 1, \dots$ ), so daß der Punkt  $\omega = 0$  dem „Anfangspunkt“ des Gebietes  $H$  entspricht.

Es sei  $r$  eine beliebige Zahl  $> n$ . Man bestätigt leicht, daß der Kreis  $|\omega| = r - n$  die Kurve  $\Gamma_\omega$  in genau zwei Punkten  $A_r$  und  $B_r$  schneidet; wenn  $r$  vom Wert  $r = n$  ins Unendliche wächst, so durchlaufen die Punkte  $A_r$  und  $B_r$  die beiden Bogen, in welche die Randkurve  $\Gamma_\omega$  durch den Punkt  $\omega = 0$  geteilt wird. Geht man zu der  $\zeta = \log \omega$ -Ebene über, so wird  $H_\omega$  in ein Streifengebiet  $H_\zeta$  und der Bogen  $A_r B_r$  der Kreislinie  $|\omega| = r - n$  in einen zur imaginären Achse parallelen Querschnitt  $\Re(\zeta) = \log(r - n)$  übergeführt, dessen Länge kleiner als  $2\pi$  ist.

Andererseits schneide man den Kreis  $|z| < R$  auf längs einem Ast der Figur  $B$ , der den Nullpunkt mit der Peripherie  $|z| = R$  verbindet, und bilde mittels eines beliebig festgelegten Zweiges der Funktion

$t = \log z$  den aufgeschnittenen Kreisbereich auf einen von zwei Parallelkurven und von der Geraden  $\Re(\log z) = \log R$  begrenzten Bereich ab; dem Gebiet  $H$  entspricht hierbei ein gewisses Gebiet  $H_t$  der  $t$ -Ebene und dem Querschnitt  $A_r B_r$  von  $H_\omega$  ein Querschnitt von  $H_t$ , dessen Länge mit  $s(r)$  bezeichnet werden soll. Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung findet man, daß

$$(s(r))^2 = \left( \int_{A_r B_r} \left| \frac{d \log z}{d \log \omega} \right| |d \log \omega| \right)^2 \leq \int_{A_r B_r} |d \log \omega| \cdot \int_{A_r B_r} \left| \frac{d \log z}{d \log \omega} \right|^2 |d \log \omega|$$

$$< 2\pi \frac{dA(r)}{d \log(r-n)} \leq 2\pi r \frac{dA(r)}{dr},$$

wo  $A(r)$  der Flächeninhalt des von dem betrachteten Querschnitt, von der Bildkurve  $I_t$  der Linie  $\Gamma$  und von der Geraden  $\log |z| = \log R_0$  begrenzten Gebietes ist, wobei  $R_0$  eine beliebig festgelegte Zahl des Intervalles  $0 < R_0 < R$  ist und der Parameterwert  $r$  so groß ( $r > r_0$ ) gewählt werden soll, daß auf dem genannten Querschnitt  $|z| > R_0$  gilt. Es wird mithin

$$(1) \quad \Sigma (s(r))^2 < 2\pi r \frac{d\mathcal{F}}{dr},$$

wo die Summation über alle Gebiete  $H$  zu erstrecken ist, welche zu den Generationen  $G_0, G_1, \dots, G_n$  gehören ( $n < r$ ), und wo  $\mathcal{F}(r) = \Sigma A(r)$ .

Die Anzahl der Querschnitte  $s(r)$  sei gleich  $\lambda(r)$ , und die Gesamtlänge  $\Sigma s(r)$  gleich  $\alpha(r)$ . Gemäß der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich, daß

$$(2) \quad \Sigma (s(r))^2 \geq \frac{(\Sigma s(r))^2}{\lambda(r)} = \frac{(\alpha(r))^2}{\lambda(r)}.$$

Wir bezeichnen mit  $\beta$  die größere der Zahlen 0 und  $2\pi - \alpha$ :

$$(3) \quad \beta(r) = \max(0, 2\pi - \alpha),$$

so daß also  $\alpha \geq 2\pi - \beta$  und somit  $\alpha^2 \geq 4\pi^2 - 4\pi\beta$ , und finden aus (1) und (2), daß

$$\frac{4\pi^2}{\lambda(r)} - \frac{4\pi\beta(r)}{\lambda(r)} < 2\pi r \frac{d\mathcal{F}}{dr}$$

und also, für  $r > r_0$ ,

$$(4) \quad 2\pi \int_{r_0}^r \frac{dr}{r\lambda(r)} \leq \mathcal{F}(r) - \mathcal{F}(r_0) + 2 \int_{r_0}^r \frac{\beta(r) dr}{r\lambda(r)}.$$

7. Wir benutzen jetzt folgenden Hilfssatz, dessen Beweis im 3. Abschnitt gegeben werden soll:

*Hilfssatz.* Wenn die Riemannsche Fläche zum hyperbolischen Typus gehört, so ist das Integral

$$(5) \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{\beta(r) dr}{r\lambda(r)}$$

konvergent.

Nimmt man nun an, daß der hyperbolische Fall vorliegt, so strebt der Flächeninhalt  $\mathcal{F}(r) - \mathcal{F}(r_0)$  für  $r \rightarrow \infty$  gegen einen endlichen Wert  $< 2\pi \log \frac{R}{R_0}$ , und die rechte Seite der Beziehung (4) liegt somit unter der endlichen Schranke

$$2\pi \log \frac{R}{R_0} + 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\beta(r) dr}{r\lambda(r)},$$

woraus folgt, daß das links stehende Integral in (4) für  $r \rightarrow \infty$  konvergiert.

Die gegebene Riemannsche Fläche gehört folglich sicher dem parabolischen Typus an, sobald das zuletzt genannte Integral divergent ist. Wegen der evidenten Beziehung (vgl. Einleitung):  $\lambda(r) = \sigma(v) + 2$  für  $v-1 < r \leq v$ , sind dasselbe Integral und die Reihe

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n\sigma(n)}$$

gleichzeitig konvergent oder divergent, woraus sich die Richtigkeit der in unserem Satze ausgesprochenen Behauptung ergibt.

### § 3. Beweis des Hilfssatzes

8. Die Riemannsche Fläche  $F$  gehöre dem hyperbolischen Typus an; sie läßt sich also auf einen *endlichen* Kreis  $|z| < R$  schlicht abbilden, dessen Radius  $R$  ohne Einschränkung der Allgemeinheit größer als 1 angenommen werden kann.

Gibt man dem oben eingeführten Parameter  $r$  einen ganzzahligen Wert  $n$ , so verbinden die Kurvenstücke  $a_r b_r$ , welche in der  $z$ -Ebene als Bilder der Kreisbogen  $A_r B_r$  erscheinen, die Knotenpunkte der  $n$ -ten Generation  $G_n$  und bilden zusammen eine geschlossene Kurve  $C_r$ . Für nichtganzzahlige Werte  $r$  ( $n - 1 < r < n$ ) verbinden wir die Endpunkte der zu zwei Nachbargebieten  $H$  gehörigen Endpunkte  $a_r$  und  $b_r$ , welche im allgemeinen nicht zusammenfallen, vermittels eines Teilstückes  $\gamma_r$  desjenigen Zweiges  $Z$  der Figur  $B$ , auf welchem die betreffenden Endpunkte liegen. Der Verbindungsbogen  $\gamma_r$  ist ein Teilbogen desjenigen Segmentes von  $Z$ , welches von den zur  $(n-1)$ -ten und zur  $n$ -ten Generation gehörenden Knotenpunkte  $z_0, z_\infty$  (oder  $z_\infty, z_0$ ) begrenzt wird.

In der  $t = \log z$ -Ebene entspricht der durch obige Konstruktion hergestellten geschlossenen Linie  $C_r$  ein Kurvenbogen, dessen Länge mindestens gleich  $2\pi$  ist. Wenn  $\gamma(r)$  die Länge des Bildbogens eines der hinzugefügten Verbindungsbogen  $\gamma_r$  bezeichnet, so ist die Gesamtlänge des genannten Kurvenbogens andererseits gleich  $\Sigma s(r) + \Sigma \gamma(r) = \alpha(r) + \Sigma \gamma(r)$ , und es wird mithin  $2\pi - \alpha \leq \Sigma \gamma$ , und also, gemäß (3),

$$(6) \quad \beta(r) \leq \Sigma \gamma(r).$$

9. Um die Größen  $\gamma(r)$  abzuschätzen, nehmen wir ein beliebiges der Kurvenstücke  $\gamma_r$  und fixieren das Astsegment  $P_1 P_2$ , welches  $\gamma_r$  als Teilbogen enthält und von zwei aufeinander folgenden Verzweigungsstellen  $P_1$  und  $P_2$  begrenzt wird. Die Knotenpunkte  $P_1$  und  $P_2$  mögen zu den Generationen  $G_m$  und  $G_{m+2p+1}$  gehören. Wenn der Parameterwert  $r$  das Intervall  $m \leq r \leq m + 2p + 1$  durchläuft, so bewegen sich die Endpunkte  $a_r$  und  $b_r$  des Kurvenstückes  $\gamma_r$  stetig von  $P_1$  bis zu  $P_2$ . Die zwischen diesen Endpunkten liegenden Knotenpunkte, deren Zahl  $2p$  beträgt, entsprechen gewissen Zweiecken  $k_0, k_\infty$ , welche zusammen mit den beiden Dreiecken, in welchen die Endpunkte  $P_1$  und  $P_2$  liegen, ein Gebiet bilden, welches im folgenden mit  $K$  bezeichnet werden soll.

Dem Bogen  $P_1 P_2$  entspricht in der  $w$ -Ebene eine Linie, welche als Spurlinie eine der Geraden hat, die aus der reellen Achse durch eine

Drehung um  $\frac{2\pi\nu}{3}$  ( $\nu = 0, 1, 2$ ) entstehen; im folgenden wird  $\nu = 0$  angenommen. Ferner möge dem Endpunkt  $P_1$  der Nullpunkt  $w = 0$  entsprechen; der Bildpunkt von  $P_2$  fällt dann in den Punkt  $w = \infty$ . Vermittels der Funktion

$$y = (-1)^p \log \frac{w - w_1}{w - w_2} - \frac{\pi i}{3},$$

bilden wir die universelle Ueberlagerungsfläche des zweifach zusammenhängenden Gebietes  $w \neq w_1, w_2$ , auf die schlichte  $y$ -Ebene ab. Setzt man hier  $w = w(z)$ , so läßt sich ein Zweig des Logarithmus bestimmen, so daß das Gebiet  $K$  in den schlichten Parallelstreifen  $|\Im(y)| < (p+1)\pi$  übergeführt wird. Den Knotenpunkten  $z_0$  des Bogens  $P_1 P_2$  entsprechen bei dieser Abbildung die Punkte  $y = -\left(p + \frac{2}{3}\right)\pi i + 2\pi\nu i$ , den Knotenpunkten  $z_\infty$  die Punkte  $y = \left(p + \frac{2}{3}\right)\pi i - 2\pi\nu i$  ( $\nu = 0, 1, \dots, p$ ), so daß also der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Bildpunkten entweder gleich  $\frac{2\pi}{3}$  oder gleich  $\frac{4\pi}{3}$  ist. Dem Bogen  $P_1 P_2$  ist die Strecke  $|y| \leq \left(p + \frac{2}{3}\right)\pi$  der imaginären Achse zugeordnet.

Wir nehmen nun einen Wert  $r$  des Intervalles  $m \leq r \leq m + 2p + 1$ . Dem Bogen  $\gamma_r$  entspricht in der  $y$ -Ebene ein Segment der imaginären Achse, welche als Teilstrecke eines Knotenintervalles höchstens die Länge  $\frac{4\pi}{3}$  hat. Wir wollen jetzt die Länge  $\bar{\gamma}_{(r)}$  des Bogens  $\gamma_r$  mit Hilfe der Verzerrungssätze von *Koebe* und *Bieberbach* abschätzen.<sup>5)</sup>

Es sei  $y = i y_r$  der Punkt, welcher dem Endpunkt  $z = a_r$  des betrachteten Bogens  $\gamma_r$  entspricht; nach obigem gilt für  $m + p + \nu \leq r \leq m + p + \nu + 1$  ( $|\nu| = 0, 1, \dots, p$ ) die Ungleichung

$$(7) \quad (p+1)\pi - |y_r| \geq \pi \left(\frac{1}{3} + p - |\nu|\right) > 1 + p - |\nu|.$$

<sup>5)</sup> Der hier gemeinte Satz lautet: Wenn  $f(z) = a_1 z + \dots$  den Kreis  $|z| < \rho$  schlicht und konform abbildet, so liegt der Wert des Quotienten

$$\left| \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \right|,$$

wo  $z_1$  und  $z_2$  zwei beliebige Punkte des Kreises  $|z| \leq \theta\rho$  sind ( $0 \leq \theta < 1$ ), unterhalb einer Schranke  $Q(\theta)$ , die nur von  $\theta$  abhängig ist (es ist z. B.  $Q(\theta) < \left(\frac{1+\theta}{1-\theta}\right)^4$ ). — Der *Bieberbachsche* Flächensatz besagt bekanntlich, daß der Flächeninhalt des Bildgebietes wenigstens gleich  $\pi |a_1|^2 \rho^2$  ist.

Wir wenden zuerst den *Koebeschen* Verzerrungssatz an in dem Kreis vom Radius  $2\pi$ , der den Punkt  $y = iy_r$  zum Mittelpunkt hat, falls  $(p+1)\pi - |y_r| \geq 2\pi$ , und den Punkt  $y = \pm(p-1)\pi i$ , falls  $|\pm(p+1)\pi - y_r| < 2\pi$ . Man findet derart, daß in jedem Punkt  $y$  des Intervalles  $|y| \leq (p + \frac{2}{3})\pi$  der imaginären Achse, für welchen der Abstand  $|y - iy_r| \leq \frac{4\pi}{3}$  ist, die Ungleichung

$$\left| \frac{dz}{dy} \right| < N_1 \left| \frac{dz}{dy} \right|_{y=iy_r}$$

besteht, wo  $N_1$  eine numerische Konstante ist.

Hierauf schlagen wir um den Punkt  $y = iy_r$  einen Kreis mit dem Radius  $(p+1)\pi - |y_r| = \rho(r)$ , und erhalten mit Hilfe des Flächensatzes für den Flächeninhalt des in der  $z$ -Ebene liegenden Bildgebietes dieses Kreises die untere Schranke  $\pi \rho^2 \left| \frac{dz}{dy} \right|^2$ , wo  $y = iy_r$  zu nehmen ist. Da dieser Flächeninhalt andererseits höchstens gleich dem Flächeninhalt  $\pi q$  des Gebietes  $K$  ist, so wird

$$\left| \frac{dz}{dy} \right|_{y=iy_r} < \frac{\sqrt{q}}{\rho(r)},$$

und also

$$\left| \frac{dz}{dy} \right| < \frac{N_1 \sqrt{q}}{\rho(r)}$$

für jeden innerhalb des Intervalles  $|y| \leq (p + \frac{2}{3})\pi$  liegenden Punkt der Strecke  $|y - iy_r| < \frac{4\pi}{3}$  der imaginären Achse. Diese Ungleichung ergibt für die Länge  $\bar{\gamma}(r)$  des Bogens  $\gamma_r$  die obere Schranke

$$\bar{\gamma}(r) < \frac{4\pi N_1}{3} \cdot \frac{\sqrt{q}}{\rho(r)}.$$

Wir nehmen nun an, daß der Bogen  $P_1 P_2$  außerhalb des Einheitskreises  $|z| = 1$  belegen ist. Dann gilt  $\frac{d \log z}{dz} \leq 1$ , woraus hervorgeht, daß auch die Länge  $\gamma(r)$  des Bildbogens von  $\gamma_r$  (in der  $\log z$ -Ebene) der Ungleichung

$$\gamma(r) < \frac{N_2 \sqrt{q}}{\rho(r)}$$

genügt, wo  $N_2$  die numerische Konstante  $\frac{4\pi N_1}{3}$  bezeichnet. Unter Berücksichtigung der Beziehung (7), wo der rechts stehende Ausdruck den Wert des Radius  $\rho(r)$  angibt, wird ferner

$$(8) \quad \int_m^{m+2p+1} \gamma(r) dr < 2N_2 \sqrt{q} \sum_{v=1}^{p+1} \frac{1}{v} < 2N_2 \sqrt{q} \log 3 (p+1).$$

Diese Beziehung haben wir unter der Voraussetzung hergeleitet, daß  $m$  und  $m+2p+1$  ganze Zahlen sind, welche die Ordnungszahlen der aufeinander folgenden Verzweigungsstellen  $P_1$  und  $P_2$  angeben, die den betrachteten Bogen  $P_1 P_2$  begrenzen. Nun sieht man unmittelbar ein, daß das obige Resultat auch dann besteht, wenn die genannten ganzen Zahlen durch beliebige Werte  $r_1$  und  $r_2$  ( $0 < r_1 < r_2$ ) ersetzt werden, wobei für  $P_1 P_2$  ein von inneren Verzweigungsstellen freier Bogen zu wählen ist, dessen Endpunkte  $P_1$  und  $P_2$  den Parameterwerten  $r = r_1$  bzw.  $r_2$  zugeordnet sind. Es wird somit für einen beliebigen derartigen Bogen  $P_1 P_2$

$$(9) \quad \int_{r_1}^{r_2} \gamma(r) dr < 2N_2 \sqrt{q} \log 3 (r_2 - r_1 + 1) < N_3 \sqrt{q} \log 3 (r_2 + 1)$$

wo  $N_3 = 2N_2$  eine numerische Konstante und  $\pi q$  den Flächeninhalt des dem Bogen  $P_1 P_2$  entsprechenden Gebietes  $K$  bezeichnen.

Wir fixieren jetzt einen so großen Wert  $n_0 > 1$ , daß sämtliche Punkte  $z$  der Generation  $G_n$  für  $n > n_0$  außerhalb des Einheitskreises  $|z| = 1$  liegen, was möglich ist, da der Radius  $R$  voraussetzungsgemäß größer als 1 ist. Es sei  $B(n_0, r)$  derjenige Teil der Baumfigur  $B$ , dessen Punkte ( $z = a_r$ ) dem Parameterintervall  $(n_0, r)$  entsprechen. Die Zweige von  $B(n_0, r)$  zerlegen wir in Segmente  $S(P_1, P_2)$ , deren Endpunkte  $P_1, P_2$  entweder Verzweigungsstellen oder den äußersten Werten  $n_0$  und  $r$  angehörende Punkte ( $a_{n_0}$  bzw.  $a_r$ ) sind, so daß im Innern von  $S$  keine Verzweigungsstellen vorhanden sind. Die Anzahl dieser Segmente ist offenbar höchstens gleich der doppelten Anzahl der innerhalb der Kurve  $C_r$  belegenen Verzweigungsstellen von  $B$ , vermehrt um 1, also höchstens gleich  $2\lambda(r)$  (vgl. Nr. 7).

Integriert man die zu einem derartigen Bogen  $S$  gehörende Größe  $\gamma(r)$  zwischen den Grenzen  $r_1$  und  $r_2$ , welche den Endpunkten  $P_1$  und  $P_2$  zugeordnet sind, so wird, da jedenfalls  $r_2 \leq r$  ist,

$$(10) \quad \int_S \gamma(r) dr < N_3 \sqrt{q} \log 3 (r + 1) < N_4 \sqrt{q} \log r,$$

wo also  $\pi q$  den Flächeninhalt des dem Bogen  $P_1 P_2$  entsprechenden Gebietes  $K$  ist, und  $N_4$  eine numerische Konstante bezeichnet.

10. Mittels letzter Ungleichung läßt sich nun das Integral

$$b(r) \equiv \int_{n_0}^r \beta(u) du$$

in folgender Weise abschätzen. Zunächst gilt gemäß der Beziehung (6)

$$b(r) \leq \int_{n_0}^r (\Sigma \gamma(u)) du,$$

wo die Summation über sämtliche, dem Parameterwert  $r = u$  entsprechenden Bogen  $S$  zu erstrecken ist. Das letzte Integral läßt sich aber schreiben

$$\int_{n_0}^r (\Sigma \gamma(u)) du = \Sigma \int_S \gamma(u) du,$$

wo über alle Bogen  $S$  der Figur  $B(n_0, r)$  zu summieren ist, und es wird somit, nach der Beziehung (10)

$$b(r) < N_4 \log r \cdot \Sigma \sqrt{q}.$$

Beachtet man nun, daß die Anzahl der Bogen  $S$  höchstens  $2\lambda(r)$  beträgt, so wird nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\Sigma \sqrt{q} \leq \sqrt{2\lambda(r)} \cdot \sqrt{\Sigma q}.$$

Hier bedeutet  $\pi \Sigma q$  den gesamten Flächeninhalt der dem Bogen  $S$  entsprechenden Gebiete  $K$ . Unter Beachtung der Definition dieser Gebiete

sieht man unmittelbar ein, daß jeder Punkt des Kreises  $|z| < R$ , welcher zu einem Zweieck ( $k_0$  oder  $k_\infty$ ) gehört, höchstens in *einem* Gebiet  $K$  enthalten ist, während ein Punkt  $z$  eines Dreieckes ( $k_0$  oder  $k_\infty$ ) höchstens zu *drei* verschiedenen Gebieten  $K$  gehört. Hieraus folgt, daß der Gesamthalt  $\pi \Sigma q$  den dreifachen Flächeninhalt des Kreises  $|z| < R$  nicht übersteigen kann, so daß also für jedes  $r > n_0$

$$\Sigma q \leq 3 R^2.$$

Zusammenfassend wird also schließlich für  $r > n_0$

$$b(r) < N \sqrt{\lambda(r)} \cdot \log r,$$

wo  $N$  eine von  $r$  unabhängige Zahl ist.

Nunmehr läßt sich die Endlichkeit des Integrals (5) leicht beweisen. Durch partielle Integration findet man für  $r > r_0 > n_0 > 1$ , da  $\lambda(r) > 1$  ist,

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^r \frac{\beta(r)}{r \lambda(r)} dr &= \int_{r_0}^r \frac{db(r)}{r \lambda(r)} \leq \frac{b(r)}{r \lambda(r)} + \int_{r_0}^r \frac{b(r) dr}{r^2 \lambda(r)} + \int_{r_0}^r \frac{b(r) d\lambda(r)}{r \lambda^2} \\ &\leq N \frac{\log r}{r} + N \int_{r_0}^r \frac{\log r dr}{r^2} + N \int_{r_0}^r \frac{\log r}{r} \frac{d\lambda}{\lambda^{3/2}} \\ &< N \left( \frac{\log r_0}{r_0} + \frac{1}{r_0} + \int_{r_0}^r \frac{\log r}{r} \frac{d\lambda}{\lambda^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Da ferner  $\frac{\log r}{r} < 1$  für  $r \geq r_0 > 1$ , so wird der Ausdruck rechts kleiner als

$$N \left( 2 + \int_{r_0}^r \frac{d\lambda}{\lambda^{3/2}} \right) = 2 N \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda(r_0)}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda(r)}} \right) < 4 N,$$

woraus die behauptete Konvergenz des Integrals (5) hervorgeht.

(Eingegangen den 1. April 1932)