Die Existenz der Zahlenreihe und des Kontinuums

Von P. FINSLER, Zürich

1. Vorbemerkungen

Es soll die widerspruchsfreie Existenz der natürlichen Zahlenreihe und des Kontinuums in absolutem Sinne dargetan werden.

Der Beweis stützt sich auf eine frühere Arbeit [1]), in der ein widerspruchsfreies Axiomensystem für die Mengenlehre aufgestellt wird und einige Sätze daraus abgeleitet werden. Diese Arbeit hat gelegentlich Ablehnung erfahren [2]), jedoch sind mir stichhaltige Einwendungen wesentlicher Art nicht bekannt geworden, und ich halte solche auch für ausgeschlossen. Um meinen Standpunkt klarzulegen, mögen hier folgende kurze Bemerkungen genügen:

1. Wer die Paradoxien und Antinomien der Logik und Mengenlehre nicht lösen kann (oder sie gar für unlösbar hält), der kann auch keine Kritik üben, denn mit einer Antinomie kann man alles beweisen, also auch alles widerlegen.

2. Wer die Antinomien in richtiger Weise lösen kann, der weiß, daß die reine (absolute) Logik einen sicheren Grund darstellt, auf dem man aufbauen kann. Ein System von Formeln als „schärfer" zu betrachten, ist ein Irrtum; Formeln allein genügen nicht, um die Antinomien auszuschließen [3]), dies kann nur der Gedanke tun, der darüber steht und der sich auf die Logik stützt.

3. Die endliche, aber nicht beschränkte Induktion als gegeben anzunehmen, wäre eine petitio principii; nur Finites zuzulassen, eine Einschränkung. Die Mathematik ist mehr als ein Handwerk oder ein Schachspiel. Auch transfinite Widersprüche müssen ausgeschlossen werden.

---

[1]) *P. Finsler.* Ueber die Grundlegung der Mengenlehre. Erster Teil. Die Mengen und ihre Axiome. Math. Zeitschrift, Bd. 25, 1926, S. 683 („Grundlegung").

[2]) So z. B. bei *R. Baer,* Ueber ein Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre. Math. Zeitschrift, Bd. 27, 1928, S. 536.

[3]) Vgl. z. B. *G. Frege,* Grundgesetze der Arithmetik. I und II, Jena 1893 und 1903, insbes. Nachwort.

2. Die Notwendigkeit eines Beweises

Die natürlichen Zahlen werden gerne als etwas unmittelbar Gegebenes betrachtet. Wenn es sich dabei nur um einen vorläufigen Standpunkt handelt, ist dies sicher berechtigt. Wenn man aber in kritischer Weise nichts Unbewiesenes zulassen will, so gilt es vielleicht doch noch für sehr kleine Zahlen, soweit sie sich vollständig im einzelnen überblicken lassen. Es gilt jedoch nicht mehr für beliebig große Zahlen und insbesondere nicht für die Zahlenreihe als Ganzes.

Dies könnte man schon aus der Tatsache entnehmen, daß es viele Mathematiker gab (oder noch gibt), welche die Existenz der Zahlenreihe als eines fertigen Systems mit unendlich vielen Elementen durchaus ablehnen. Man wird aber noch die Gründe dafür untersuchen müssen, denn man wird auch nichts ohne Beweis ablehnen wollen. Auch wird man sich, wenn man einen Beweis führen will, darüber klar sein müssen, was eigentlich bewiesen werden muß, wo also die Schwierigkeiten liegen.

Die Worte „natürliche Zahl“ oder „Zahlenreihe“ sind ohne Inhalt, wenn nicht gesagt wird, was darunter zu verstehen ist. Wenn wir über irgendwelche Dinge eine Aussage machen oder etwas beweisen wollen, so müssen wir genau sagen oder definieren, welche Dinge gemeint sind, und alle Eigenschaften, die wir ableiten, müssen sich aus der Definition ergeben. Für die natürlichen Zahlen kommen hier insbesondere zwei Definitionen in Betracht, die genetische und die axiomatische, die wir beide betrachten wollen.

a) Bei der genetischen Definition geht man von einer bestimmt gegebenen Anfangszahl aus, etwa von der Zahl 1. (Ob mit 0 oder 1 begonnen wird, ist an sich gleichgültig.) Dann nimmt man noch eine Operation $+1$ hinzu, die zu jeder schon gefundenen Zahl eine neue, von allen bisherigen verschiedene Zahl liefert. So erhält man die Zahlen $1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+1$ usw., die auch mit 2, 3, 4 usw. bezeichnet werden.

Kann man nun von der Gesamtheit aller dieser Zahlen reden?

Wenn man annimmt, es liege schon ein fest gegebenes System von Dingen vor, aus dem die einzelnen Zahlen der Reihe nach entnommen werden können, dann könnte man allerdings die Gesamtheit aller dieser Zahlen definieren: es sind alle die und nur die Dinge des gegebenen Systems, die, von der Zahl (dem Ding) 1 ausgehend, durch beliebige, aber alleinige Anwendung der Operation $+1$ erreicht werden können.

Wenn man aber ein solches System von Dingen nicht als gegeben voraussetzen kann, dann ist dieser Schluß nicht zulässig. Die Reihe der Zahlen ist dann eine „werdende", denn jede Zahl wird erst auf Grund aller vorhergehenden Zahlen sozusagen neu geschaffen, und man sieht zunächst nicht ein, ob dieser Prozeß schließlich zu einem Ende führt oder nicht.

Man könnte vielleicht denken: man sieht ein, daß dieser Prozeß zu keinem Ende führt. Dann übersieht man aber einen wichtigen Punkt: es ist nämlich noch gar nicht gesagt, daß sich der Prozeß in jedem einzelnen Fall wirklich durchführen, die Reihe also immer weiterführen läßt. Es ist noch gar nicht bewiesen, daß wirklich zu jeder Zahl eine folgende existiert.

Die Existenz einer nächstfolgenden Zahl scheint durch die Definition der Zahlen selbst gefordert zu werden. Aber eine Definition kann noch nicht die Existenz eines Dinges sicherstellen. Und darf man die Existenz eines Dinges fordern, das vielleicht einen logischen Widerspruch in sich trägt und deshalb gar nicht existieren kann? Das ist genau der Weg zu den Antinomien. Etwas logisch Widerspruchsvolles, also nicht Existierendes, können wir auch nicht durch einen Willkürakt erschaffen.

Welche Gründe veranlassen uns zu dem Glauben, daß es zu jeder Zahl eine nächstfolgende geben müsse?

Man könnte sich auf die Erfahrung berufen: zu jeder wirklich gegebenen Zahl können wir eine größere angeben. Aber die wirklich gegebenen Zahlen bilden einen so verschwindend winzigen Teil der Zahlen überhaupt, daß dies nicht als Beweis gelten kann.

Man könnte weiter sagen: Es ist kein Grund vorhanden, der gegen die Existenz einer nächstfolgenden Zahl spricht, also kann die Annahme dieser Existenz nicht zu einem Widerspruch führen.

Darauf ist zu erwidern, daß eben doch ein solcher Grund vorhanden ist. Er besteht darin, daß die genetische Definition der natürlichen Zahlen von zirkelhafter Natur ist, und zirkelhafte Definitionen können unerfüllbar sein.

Wenn man nämlich die Definition auf eine schärfere Form zu bringen sucht, so tritt der Zirkel hervor. Die genetische Definition der Zahlenreihe ist im wesentlichen eine Konstruktionsvorschrift, der man etwa die folgende Form geben kann:

Konstruktion $\mathfrak{A}$: Man beginne mit der Zahl 1 und setze hinter jede Zahl, die sich aus dieser Konstruktion $\mathfrak{A}$ ergibt, eine neue Zahl.

Bei der zuerst angegebenen Definition der einzelnen Zahlen hat man in ganz entsprechender Weise hinter jede durch ebendieselbe Vorschrift gefundene Zahl ein neues Zeichen $+ 1$ zu setzen.

Diese Vorschrift bezw. Konstruktion bezieht sich also ganz ausdrücklich auf sich selbst, und das ist ein offenbarer Zirkel. Daß aber dieser Zirkel nicht ungefährlich ist, erkennt man aus der anderen, aber in ganz analoger Weise gebildeten Konstruktionsvorschrift:

Konstruktion $\mathfrak{B}$*:* Man beginne mit der Zahl 1 und setze hinter jede Zahlenreihe, die sich aus dieser Konstruktion $\mathfrak{B}$ ergibt, eine neue Zahl.

Diese Konstruktion $\mathfrak{B}$ ist sicher nicht [4]) in jedem Falle erfüllbar, man käme sonst zu der Antinomie von *Burali-Forti.* Es ist daher auch nicht selbstverständlich, daß die Konstruktion $\mathfrak{A}$ in jedem Falle erfüllbar ist. *Der Satz, daß es zu jeder Zahl eine folgende gibt* [5]), *bedarf eines Beweises.*

b) Bei der axiomatischen Definition bilden die natürlichen Zahlen ein System von Dingen, die einem gegebenen Axiomensystem genügen. Diesem Axiomensystem kann man (nach *Peano*) etwa die folgende Gestalt geben:

I. 1 ist eine Zahl.

II. Wenn n eine Zahl ist, so ist auch $n + 1$ eine Zahl.

III. Sind m und n Zahlen und ist $m + 1 = n + 1$, so ist $m = n$.

VI. Für jede Zahl n ist $n + 1 \neq 1$.

V. Eine Aussage, die für die Zahl 1 gilt, und die für die Zahl $n + 1$ gilt, sofern sie für n gilt, gilt für jede Zahl n.

Ein solches Axiomensystem hat den Vorteil, daß es die Forderungen, die man an den Begriff der natürlichen Zahl stellt und die zu seiner Definition notwendig sind, einzeln und vollständig angibt, so daß man ein Fundament besitzt, auf dem sich die Lehre von den natürlichen Zahlen aufbauen läßt. Es bleibt aber die Frage, ob dieses Fundament selbst gesichert ist, d. h. ob das Axiomensystem keinen Widerspruch in sich enthält.

Um diese Frage zu beantworten, könnte man zu zeigen versuchen, daß es nicht möglich ist, von dem Axiomensystem ausgehend „in endlich vielen

---

[4]) Dabei wird allerdings vorausgesetzt, daß man jede Reihe von Zahlen (z. B. die Reihe aller natürlichen Zahlen) auch als Ganzes auffassen kann. Dies wird für die natürlichen Zahlen unter **3.** gezeigt und läßt sich auf Grund des in der „Grundlegung“ definierten Systems aller Mengen auch allgemein zeigen.

[5]) Der Satz dürfte hinfällig werden, wenn man verlangt, daß sich jede Zahl durch ein materielles Zeichen darstellen läßt. Sobald alle Atome der Welt für die Zeichen verbraucht sind, gibt es kein neues mehr.

Schritten“ einen Widerspruch herzuleiten. Wenn ein solcher Nachweis gelingt, so ist das wohl von Wichtigkeit, aber noch nicht genügend.

Wenn man nämlich annimmt, es gäbe nicht zu jeder Zahl eine folgende, dann gibt es auch nicht zu jedem Schritt einen folgenden, und die beschränkt vielen Schritte brauchen keinen Widerspruch zu ergeben. Es ist also wieder nicht gezeigt, daß es zu jeder Zahl eine folgende gibt, obschon das Gegenteil dieses Satzes mit dem Axiomensystem in offenkundigem Widerspruch steht. Dieser Widerspruch ließe sich aber nicht formalisieren und wäre deshalb für eine formale Methode nicht angreifbar.

Die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems läßt sich aber in einem absoluten Sinne beweisen, wenn es gelingt, ein widerspruchsfrei existierendes System von Dingen anzugeben, für welches sämtliche Axiome erfüllt sind. Daß man ein solches System nicht aus der genetischen Definition der Zahlenreihe allein entnehmen kann, wurde oben gezeigt. Es gelingt aber, ein solches System aus der Mengenlehre zu entnehmen.

Ebenso, wie sich die Widerspruchsfreiheit der Geometrie aus der Arithmetik beweisen läßt, läßt sich auch die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik aus der Mengenlehre beweisen. Für die Mengenlehre ist ein anderer Weg notwendig; hier kann man sich direkt auf die Logik stützen, wie in der „Grundlegung“ gezeigt wurde.

Die widerspruchsfreie Existenz des Kontinuums folgt aus der der Zahlenreihe nur dann, wenn man weiß, daß die Operationen der Mengenlehre, insbesondere die beliebige Teilmengenbildung, auf die Reihe der natürlichen Zahlen angewendet werden dürfen.

3. Der Beweis

Als „Mengen“ bezeichnen wir ideelle Dinge, die durch eine bestimmte Beziehung („als Element enthalten“) miteinander verknüpft sind. Zusammenfassungen von Mengen heißen Systeme. Nicht jedem System braucht eine Menge zu entsprechen. Das durch 3 Axiome festgelegte System aller Mengen werde mit Σ bezeichnet. Wegen des Begriffs „zirkelfrei“ muß auf die „Grundlegung“ selbst verwiesen werden; ebenso beziehen sich die angeführten Sätze auf diese Arbeit.

Wir betrachten Systeme $\mathfrak{S}$, welche, wie z. B. das System Σ, die Nullmenge und mit jeder Menge M stets auch die Menge $\{M\}$ enthalten, sofern diese Menge, die M als einziges Element enthalten soll, existiert. Der Durchschnitt aller dieser Systeme, der also alle und nur die Mengen enthält, die in jedem System $\mathfrak{S}$ vorkommen, werde mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnet. $\mathfrak{Z}$ enthält ebenfalls die Nullmenge und mit jeder Menge M auch die Menge $\{M\}$, sofern diese Menge existiert. Außerdem gilt aber für das System $\mathfrak{Z}$ das Induktionsprinzip:

Eine Aussage $\mathfrak{A}$, die für die Nullmenge gilt und die für die Menge $\{M\}$ gilt, sofern sie für M gilt und $\{M\}$ existiert, gilt für jede Menge von $\mathfrak{Z}$.

Zum Beweis betrachten wir das System aller der Mengen, für die die Aussage $\mathfrak{A}$ gilt. Dieses System enthält die Nullmenge und mit jeder Menge M auch die Menge $\{M\}$, sofern $\{M\}$ existiert, und gehört daher zu den Systemen $\mathfrak{S}$. Nach der Definition von $\mathfrak{Z}$ muß also jede Menge von $\mathfrak{Z}$ diesem System angehören, d. h. es gilt für sie die Aussage $\mathfrak{A}$.

Es folgt nun weiter, daß die Mengen von $\mathfrak{Z}$ sämtlich zirkelfrei sind. Nach Satz 14 der „Grundlegung" gilt dies nämlich für die Nullmenge, und nach Satz 15 existiert zu jeder zirkelfreien Menge M stets auch die Menge $\{M\}$ und sie ist ebenfalls zirkelfrei. Nach dem Induktionsprinzip ergibt sich also noch, daß $\mathfrak{Z}$ tatsächlich mit jeder Menge M stets auch eine Menge $\{M\}$ enthält.

Wenn die Menge $\{M\}$ mit der Menge $\{N\}$ identisch ist, so ist auch M mit N identisch nach dem Axiom der Beziehung. Ferner ist jede Menge $\{M\}$ von der Nullmenge verschieden, da diese im Gegensatz zu $\{M\}$ kein Element enthält.

Damit sind aber für das System $\mathfrak{Z}$ die Axiome *Peanos* sämtlich als erfüllt nachgewiesen, wenn man für die Zahl 1 die Nullmenge und für die Zahl $n + 1$ die Menge $\{M\}$ einsetzt, sofern n die Menge M bedeutet.

Bei der Definition von $\mathfrak{Z}$ wurde der Begriff zirkelfrei nicht benutzt, das System $\mathfrak{Z}$ ist also von diesem Begriff unabhängig. Nach Satz 12 existiert daher eine zirkelfreie Menge Z, welche gerade die Mengen von $\mathfrak{Z}$ als Elemente enthält [6]).

Nach Satz 17 gibt es eine zirkelfreie Menge, welche die sämtlichen Teilmengen von Z und nur diese enthält. Diese Menge ist aber bekanntlich dem Kontinuum äquivalent.

4. Schlussbemerkung

Man könnte fragen, ob sich die Existenz der Zahlenreihe und des Kontinuums nicht auch nachweisen läßt, ohne daß man den Begriff zirkelfrei zu Hilfe nimmt.

---

[6]) Damit ist auch das 7. Axiom *E. Zermelos* (Math. Ann. Bd. 65, 1908, S. 261), das in der „Grundlegung" noch fehlte, für die zirkelfreien Mengen als erfüllt nachgewiesen und somit die Widerspruchsfreiheit dieses Axiomensystems der Mengenlehre dargetan.

Für die Zahlenreihe könnte dies möglich sein, da man, allerdings nicht in einfacher Weise (und vielleicht auch nicht ohne eine Zirkeldefinition), einsehen kann, daß es zu jeder Menge M eine Menge $\{M\}$ gibt, also auch dann, wenn M nicht zirkelfrei ist.

Für den Nachweis jedoch, daß das System aller Mengen eine dem Kontinuum äquivalente Menge enthält, dürfte der Begriff zirkelfrei oder ein äquivalenter Begriff jedenfalls nicht zu vermeiden sein.

Man könnte aber, wenn die Zahlenreihe gegeben ist, für das Kontinuum die Gesamtheit aller Teil*systeme* der Zahlenreihe nehmen, dies wäre jedoch ein System höherer Stufe. Für die Bildung von Funktionen usw. kämen dann Systeme noch höherer Stufe in Frage. Dies wäre unbequem und könnte auch zu Schwierigkeiten führen. Die allgemeine Mengenlehre könnte man auf diese Weise jedenfalls nicht erhalten.

Der Vorteil der angewendeten Methode ist gerade der, daß die erste Stufe (die Mengen) schon die ganze Mengenlehre umfaßt; die zweite Stufe (Systeme von Mengen) und die dritte (alle Systeme einer Eigenschaft) braucht man nur für die Begründung, so daß man sich also z. B. in der Analysis, nachdem sie einmal begründet ist, um verschiedene Stufen nicht mehr zu kümmern braucht.

(Eingegangen den 1. April 1932)