

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1932)

Artikel: Sur l'ultraconvergence d'une classe de séries de Dirichlet.
Autor: Bernstein, M. Vladimir
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-5607>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur l'ultraconvergence d'une classe de séries de Dirichlet

par M. VLADIMIR BERNSTEIN, Genève.

I. J'étudie dans ce Mémoire, suivant le conseil de M. Montel, l'ultraconvergence des séries de Dirichlet dont les exposants ont une densité maximum finie.

On dit qu'une suite de nombres réels

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$$

a une *densité maximum finie* ($\leq D$) si cette suite peut être considérée comme suite partielle d'une autre suite

$$l_1, l_2, \dots, l_p, \dots$$

satisfaisant à la condition

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{l_p} = D;$$

cette deuxième suite est dite *mesurable et de densité D*. Cette terminologie est due à M. Pólya qui a étudié les propriétés des suites ayant une densité maximum finie¹⁾.

Les séries de Dirichlet dont les exposants ont une densité maximum finie représentent la classe de séries de Dirichlet qui se rapproche le plus des séries de Taylor; on peut donc s'attendre à ce que les propriétés de cette classe de séries ne diffèrent pas beaucoup de celles des séries de Taylor.

L'ultraconvergence des séries de Taylor a été étudiée par plusieurs auteurs, mais plus spécialement par M. Ostrowski qui a obtenu des résultats définitifs; les principaux de ces résultats peuvent être énoncés de la manière suivante:

I. *Toute série de Taylor qui possède une infinité de lacunes d'une largeur relative supérieure à un nombre positif fixe est ultraconvergente autour de chaque point régulier de son cercle de convergence*²⁾.

¹⁾ Voir [7], p. 550 et suiv. et [8], p. 327 (7) et suiv.; les chiffres entre crochets constituent des renvois à la Bibliographie qui se trouve à la fin du Mémoire.

²⁾ Voir [3], p. 557 ou [6], p. 204.

II. a) Toute série de Taylor qui est ultraconvergente autour d'un point régulier de son cercle de convergence peut être représentée comme la somme de deux séries, dont l'une possède des lacunes du type indiqué ci-dessus, et l'autre a un rayon de convergence supérieur à celui de la série donnée;

b) Si l'on considère une suite de sommes partielles d'une telle série

$$S_{n_1}(s), S_{n_2}(s), \dots, S_{n_k}(s), \dots$$

qui converge au-delà du cercle de convergence de la série, cette suite contient une infinité de sommes partielles $S_{n_k}(s)$ telles que le nombre des termes de la série qu'il lui faut adjoindre pour obtenir la somme suivante est supérieur à un nombre positif fixe multiplié par l'exposant du terme auquel la première somme est arrêtée³⁾.

La proposition I s'applique d'ailleurs non seulement aux séries de Taylor, mais aussi aux séries de Dirichlet les plus générales, comme l'a montré M. Ostrowski lui-même; quant à la proposition II, elle ne peut pas être vraie pour toutes les séries de Dirichlet, ni même pour toutes les séries dont la suite d'exposants a une densité maximum finie. En effet, M. Bohr a construit dès 1913 des séries de Dirichlet à suite d'exposants mesurable dont les sommes partielles de rang pair convergent dans un domaine s'étendant au-delà du demi-plan de convergence⁴⁾. Ces séries ont été construites avec des groupes de deux termes dont les exposants sont très voisins et dont les coefficients sont égaux en valeur absolue et de signe contraire; je donne à de tels groupes le nom de *groupes de Bohr*.

Je dirai dans la suite qu'il y a *ultraconvergence lacunaire* lorsque II. b) a lieu; au contraire je dirai qu'il y a *ultraconvergence serrée* lorsque l'on peut construire des suites de sommes partielles qui convergent au-delà du domaine de convergence sans satisfaire à II. b).

Dans le paragraphe 2 nous allons démontrer que la bande comprise entre les droites de convergence et d'holomorphie (lorsqu'elles sont distinctes) constitue toujours un domaine d'ultraconvergence serrée pour les séries de Dirichlet de la classe considérée.

Les §§ 3 et 4 seront consacrés à une étude plus détaillée des coefficients des séries considérées au § 2; nous arriverons au résultat inattendu que ces séries sont toutes construites à l'aide de groupes de plusieurs termes aux exposants très voisins qui peuvent être considérés comme la généralisation naturelle des groupes à deux termes avec les-

³⁾ Voir [4], p. 185.

⁴⁾ Voir [1], p. 6.

quels M. Bohr avait construit ses exemples de séries à ultraconvergence serrée, de sorte que le procédé de M. Bohr peut être considéré non plus comme un artifice, mais bien comme un procédé basé sur la nature même des séries envisagées.

Enfin, au paragraphe 5 nous allons montrer que la proposition I de M. Ostrowski reste vraie pour les séries de notre classe lorsque l'on y remplace les mots „droite de convergence“ par „droite d'holomorphie“. Pour la démonstration de ce fait nous ferons usage d'une proposition que nous aurons démontrée au § 3 et suivant laquelle chaque série de Dirichlet, dont la suite d'exposants a une densité maximum finie, peut être mise sous la forme d'une série de Dirichlet à coefficients variables, ces coefficients satisfaisant aux inégalités de Cauchy-Hadamard dans lesquelles on aura mis l'abscisse d'holomorphie à la place de l'abscisse de convergence. Ce fait nous permettra de conserver l'idée générale de la démonstration de M. Ostrowski.

Il serait intéressant de voir si la proposition II de M. Ostrowski reste aussi vraie pour les séries de notre classe lorsque l'on y fait la même modification; je considère cela comme très probable, mais je n'ai pas réussi à le démontrer; il serait aussi intéressant de voir si les propositions du § 4 subsistent pour des séries de Dirichlet plus générales, mais je n'entrerai pas ici dans des considérations de ce genre.

§ 2. **Théorème I.** *Si la suite*

$$(2, 1) \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$$

possède une densité maximum finie D et si la série

$$2, \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

a une abscisse d'holomorphie \mathcal{H} distincte de son abscisse de convergence \mathcal{C} supposée finie, la suite (2, 2) est ultraconvergente dans tout le demi-plan

$$(2, 3) \quad \Re(s) > \mathcal{H}$$

c.-à-d. il existe une suite d'indices

$$(2, 4) \quad n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$$

telle que si l'on pose

$$S_{n_k}(s) = \sum_{m=1}^{n_k} a_m e^{-\lambda_m s}$$

la suite

$$S_{n_1}(s), S_{n_2}(s), \dots, S_{n_k}(s), \dots$$

converge uniformément vers $f(s)$ dans chaque domaine fini complètement intérieur au demi-plan (2, 3).

Ce demi-plan est d'ailleurs un demi-plan d'ultraconvergence serrée de la série (2, 2); c.-à.-d. la suite (2, 4) peut être choisie de telle sorte que, quelque petit que soit ε , les inégalités

$$(2, 5) \quad \begin{cases} n_{k+1} - n_k < \varepsilon \lambda_{n_{k+1}} \\ \lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} < \varepsilon \lambda_{n_{k+1}} \end{cases}$$

soient vérifiées pour k assez grand.

Pour démontrer ce théorème, nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que la suite (2, 1) est mesurable et de densité D ; en effet, si la suite (2, 1) n'est pas mesurable, il existe une suite mesurable de densité D

$$(2, 6) \quad l_1, l_2, \dots, l_p, \dots$$

qui contient la suite (2, 1) comme suite partielle. La série (2, 2) peut donc être écrite sous la forme

$$(2, 7) \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{p=1}^{\infty} b_p e^{-l_p s}$$

où $b_p = 0$, si l_p ne fait pas partie de (2, 1), et $b_p = a_n$, si $l_p = \lambda_n$. Une suite convergente de sommes partielles de (2, 7) sera en même temps une suite convergente de sommes partielles de (2, 2).

De plus, si

$$(2, 8) \quad p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$$

est une suite d'indices tels que

$$\begin{cases} p_{k+1} - p_k < \varepsilon l_{p_{k+1}} \\ l_{p_{k+1}} - l_{p_k} < \varepsilon l_{p_{k+1}}, \end{cases}$$

il suffira de choisir les n_k de telle manière que l'on ait

$$(2, 9) \quad \lambda_{n_k} \leq l_{p_k}, \quad \lambda_{n_{k+1}} \geq l_{p_{k+1}},$$

ce qui est toujours possible, pour obtenir une suite (2, 4) vérifiant les inégalités (2, 5). Il suffit donc de démontrer le théorème pour les suites d'exposants mesurables.

D'autre part il est clair que nous pouvons supposer que l'abscisse de convergence \mathcal{C} est positive, tandis que l'abscisse d'holomorphic \mathcal{H} est négative ou nulle.

Cela dit, posons

$$C(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right)$$

et considérons l'expression

$$(2, 10) \quad \varphi(z) = -C(z) \int_0^{\infty(\arg s = \theta)} f(s) e^{zs} ds,$$

l'intégrale étant prise suivant une demi-droite faisant avec l'axe réel un angle aigu $\theta \neq 0$. Il n'est pas difficile de s'assurer⁵⁾ que (2, 10) définit une fonction de z dont le prolongement analytique est holomorphe dans le demi-plan $\Re(z) > 0$ et y satisfait, pour r assez grand, à la condition de croissance

$$(2, 11) \quad |\varphi(r e^{i\varphi})| < e^{[\pi D \cdot |\sin \varphi| + \varepsilon]r}$$

quelque petit que soit ε , et que d'autre part on a, pour toutes les valeurs entières et positives de l'indice n ,

$$\varphi(\lambda_n) = a_n C'(\lambda_n).$$

⁵⁾ Cf. le raisonnement de [8.], pp. 386—390 (66—70). Les chiffres entre parenthèses indiquent les pages des tirages à part. Je saisis cette occasion pour signaler une faute d'impression au théorème VII du même Mémoire (p. 407 (87)), théorème qui correspond à peu près à la proposition ci-dessus; l'exposant du second membre de l'inégalité à la 6-me ligne, p. 407, doit être $-r[h \cos \varphi - \pi D |\sin \varphi| - \varepsilon]$, et non $-r[h \cos \varphi - \varepsilon]$.

La série (2, 2) peut donc être mise sous la forme

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_n)}{C'(\lambda_n)} e^{-\lambda_n s},$$

$\varphi(z)$ étant une fonction holomorphe dans le demi-plan $\Re(z) > 0$ et y satisfaisant à la condition de croissance (2, 11).

Désignons maintenant par R_n un nombre compris entre λ_n et λ_{n+1} , et par C_n le contour du triangle formé par les demi-droites $\arg z = \pm \gamma$, et la droite $\Re(z) = R_n$; alors nous pouvons écrire

$$(2, 12) \quad S_n(s) = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{\varphi(\lambda_m)}{C'(\lambda_m)} e^{-\lambda_m s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\varphi(z)}{C(z)} e^{-sz} dz.$$

Choisissons maintenant le nombre R_n de telle sorte que l'on ait en premier lieu

$$(2, 13) \quad |C(R_n)| > e^{-\varepsilon R_n}$$

et que, en second lieu, l'inégalité (2, 11) soit déjà vérifiée pour $r = R_n$ dans le secteur

$$-\gamma \leq \arg z \leq \gamma,$$

où γ désigne un angle aigu que nous fixerons un peu plus loin.

L'existence d'une infinité de valeurs indéfiniment croissantes de R_n satisfaisant à l'inégalité (2, 13) résulte d'un théorème de M. Carlson⁶⁾; nous y reviendrons d'ailleurs dans un moment.

R_n étant choisi de la sorte, la partie de l'intégrale (2, 12) relative au côté vertical du triangle C_n est inférieure en module à

$$(2, 14) \quad 2 R_n \operatorname{tg} \gamma \cdot e^{[\pi D \sin \gamma + \varepsilon] \frac{R_n}{\cos \gamma} + \varepsilon R_n - \sigma R_n \mp t R_n \operatorname{tg} \gamma}$$

où l'on a posé

$$s = \sigma + it$$

et où l'on doit prendre le signe $-$, si $t > 0$, et le signe $+$, si $t < 0$.

⁶⁾ Voir [2], p. 239.

Supposons maintenant que s est situé dans le domaine angulaire

$$(2, 15) \quad -\theta \leq \arg(s - s_0) \leq \theta$$

où θ désigne un angle aigu aussi voisin que l'on veut de $\frac{\pi}{2}$, et s_0 un nombre réel et positif aussi petit que l'on veut. Prenons γ assez petit pour que l'on ait

$$(2, 16) \quad \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \theta < \varepsilon \quad \pi D \operatorname{tg} \gamma < \varepsilon \quad \operatorname{tg} \gamma < \frac{1}{2}$$

et supposons que ε a été pris inférieur à $\frac{1}{5} s_0$.

L'expression (2, 14), et, par conséquent, la partie de l'intégrale (2, 12) relative au côté vertical du triangle C_n , sera alors inférieure à

$$(2, 17) \quad R_n e^{-(\sigma - 5\varepsilon)R_n}.$$

Il s'ensuit que, si l'on donne à R_n une suite de valeurs indéfiniment croissantes qui vérifient (2, 13), la partie de l'intégrale (2, 12) relative à la partie verticale du contour tendra vers zéro. D'autre part, il est aisé de voir que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(z)}{C(z)} e^{-sz} dz$$

prise suivant les deux demi-droites $\arg z = \pm \gamma$, converge lorsque s est situé dans le domaine (2, 15) et représente une fonction holomorphe dans ce domaine. En effet, suivant un théorème de M. Carlson⁷⁾, on a, quelle que soit la valeur de l'angle aigu γ

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |C(re^{\pm i\gamma})|}{r} = \pi D \sin \gamma;$$

γ étant fixé, on peut donc choisir r_0 de façon que l'on ait pour $r > r_0$

$$|C(re^{\pm i\gamma})| > e^{[\pi D \sin \gamma - \varepsilon]r}.$$

⁷⁾ Voir [2], p. 239.

Il s'ensuit que, si l'on a pris r_0 assez grand pour que l'inégalité (2, 11) soit elle aussi vérifiée pour $r > r_0$ sur les deux demi-droites $\arg z = \pm \gamma$, on aura, en posant $z = re^{\pm i\gamma}$,

$$(2, 18) \quad \left| \frac{\varphi(z)}{C(z)} e^{-sz} \right| < e^{[\pi D \sin \gamma + \varepsilon]r - [\pi D \sin \gamma - \varepsilon]r - \sigma r \cos \gamma \mp tr \sin \gamma} \quad 8)$$

et, par conséquent, en vertu de (2, 15) et (2, 16)

$$(2, 19) \quad \left| \frac{\varphi(z)}{C(z)} e^{-sz} \right| < e^{-(\sigma \cos \gamma - 3\varepsilon)r}$$

ce qui démontre notre affirmation.

Nous pouvons donc dire que, si la suite d'indices

$$(2, 4) \quad n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$$

est choisie de telle sorte que chacun des intervalles $(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}})$, à partir d'une certaine valeur de k , contient des points qui vérifient l'inégalité (2, 13), la suite

$$S_{n_1}(s), S_{n_2}(s), \dots, S_{n_k}(s), \dots$$

converge uniformément dans le domaine (2, 15) vers $f(s)$.

Il ne nous reste donc, pour achever la démonstration de notre théorème, qu'à montrer que la suite (2, 4) peut être choisie de telle manière qu'elle vérifie les inégalités (2, 5) et que, en outre, elle ne dépende pas de ε .

A ce point je dois rappeler quelques-uns des résultats démontrés dans ma Thèse.

Considérons l'ensemble d'intervalles $E(q; \{\lambda_n\})$ construit de la manière suivante: à chaque point λ_n on fait correspondre deux intervalles d'_n et d''_n de longueur q ; l'intervalle d'_n a pour point frontière gauche, ou bien le point λ_n , ou bien le point frontière droit de l'intervalle d'_{n-1} , et précisément celui de ces deux points qui est situé plus à droite; de même, l'intervalle d''_n a pour point frontière droit le point λ_n ou bien le point frontière gauche de l'intervalle d''_{n+1} , et précisément celui de ces deux points qui est situé le plus à gauche. J'ai démontré qu'il ne faut qu'un nombre fini d'opérations pour construire les intervalles de l'en-

⁸⁾ On prendra le signe — ou + suivant que t sera positif ou négatif.

semble E appartenant à un intervalle fini quelconque de l'axe réel, et que d'autre part, si l'on convient de nommer *largeur relative* d'un intervalle (a, b) le rapport $\frac{b-a}{a}$, la largeur relative des intervalles de l'ensemble E tend vers zéro⁹⁾. D'autre part j'ai montré¹⁰⁾ que l'inégalité (2, 13) est vérifiée pour toutes les valeurs assez grandes de R qui n'appartiennent pas à l'ensemble $E(q)$, pourvu que q soit assez petit (p. ex. $< \frac{1}{4D}$).

Supposons maintenant que la suite (2, 4) a été construite de telle sorte qu'elle comprend *tous les indices* n_k pour lesquels l'intervalle $(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}})$ contient des points extérieurs à l'ensemble $E\left(\frac{1}{4D}\right)$ et ces indices seulement. Si alors n_k et n_{k+1} sont deux nombres *consécutifs* de la suite (2, 4), l'intervalle $(\lambda_{n_{k+1}}, \lambda_{n_{k+1}})$ ne contiendra aucun point extérieur à $E\left(\frac{1}{4D}\right)$; cet intervalle appartiendra par conséquent (du moins pour k assez grand) à l'ensemble $E\left(\frac{1}{4D}\right)$. Donc, on aura

$$(2, 20) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}{\lambda_{n_{k+1}}} = 0$$

et cette formule est équivalente à la deuxième inégalité (2, 5). Quant à la première de ces inégalités, elle découle immédiatement de (2, 20) et de l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = D.$$

Nous avons donc démontré que l'on peut choisir une suite d'indices (2, 4) vérifiant les inégalités (2, 5) et pour laquelle la suite

$$(2, 21) \quad S_{n_1}(s), S_{n_2}(s), \dots, S_{n_k}(s), \dots$$

converge uniformément dans tout domaine fini intérieur au demi-plan $\Re(s) > 0$; cette suite d'indices ne dépend d'ailleurs que de la suite d'exposants λ_n et ne dépend en aucune façon des coefficients de la série (2, 2). Ceci nous permet de déduire que, si $\mathcal{H} = -\infty$, la suite (2, 21) con-

⁹⁾ Voir [8], pp. 333—336 (13—16).

¹⁰⁾ Voir [8], p. 346 (26).

verge dans chaque demi-plan $\Re(s) > b$, quel que soit le nombre *néga-*
tif b ; en effet, on appliquera le raisonnement précédent à la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n b} e^{-\lambda_n (s-b)}$$

et l'on verra que les sommes partielles de rang n_k de cette série convergent uniformément dans tout domaine fini intérieur au demi-plan $\Re(s-b) > 0$; donc, la suite (2, 21) converge uniformément dans tout domaine fini intérieur au demi-plan $\Re(s) > b$, et b étant quelconque, elle converge uniformément à l'intérieur de chaque domaine fini. Notre théorème est donc complètement démontré, même pour le cas de $\mathcal{H} = -\infty$.

Notons d'ailleurs que dans la construction de la suite (2, 4) on aurait pu remplacer l'ensemble $E\left(\frac{1}{4D}\right)$ par tout autre ensemble d'intervalles indépendant de ε , pourvu que l'on puisse affirmer que l'inégalité (2, 13) est vérifiée à partir d'un certain point à l'extérieur de cet ensemble, et ce quelque petit que soit ε .

Disons maintenant encore quelques mots du cas où la suite $\{\lambda_n\}$ n'est pas mesurable, et possède seulement une densité maximum finie D . On pourrait croire, d'après ce qui précède, que pour former la suite d'indices (2, 4) il est nécessaire de construire effectivement une suite mesurable (2, 6) de densité D contenant la suite $\{\lambda_n\}$ comme suite partielle, mettre la série (2, 2) sous la forme (2, 7), construire en passant par l'ensemble d'intervalles $E\left(\frac{1}{4D}; \{L_p\}\right)$ la suite d'indices (2, 8), et finalement former la suite (2, 4) à l'aide des inégalités (2, 9). Or, en réalité il n'en est rien et l'on peut construire la suite (2, 4) directement en partant de l'ensemble $E\left(\frac{1}{4D}; \{\lambda_n\}\right)$ comme si la suite $\{\lambda_n\}$ était mesurable. Cela résulte du fait démontré dans ma Thèse que parmi les suites mesurables (2, 6) contenant la suite $\{\lambda_n\}$ comme suite partielle il en existe toujours une qui possède la propriété suivante: si

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, \dots$$

désignent les points de $\{L_p\}$ qui ne font pas partie des λ_n , l'ensemble $E(q; \{L_p\})$ ($q < \frac{1}{4D}$) s'obtient par la superposition des deux ensembles $E(q; \{\lambda_n\})$ et $E(q; \{\mu_m\})$, ces deux ensembles n'ayant pas de points com-

mons. On déduit immédiatement de ce fait que, si l'on construit d'une part la suite d'indices

$$(2, 8) \quad p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$$

pour lesquels l'intervalle $(l_{p_k}, l_{p_{k+1}})$ contient des points extérieurs à $E\left(\frac{1}{4D}; \{l_p\}\right)$, et la suite d'indices

$$(2, 4) \quad n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$$

qui se déduit de (2, 8) à l'aide des inégalités (2, 9), et d'autre part la suite des indices

$$(2, 4\text{bis}) \quad n'_1, n'_2, \dots, n'_k, \dots$$

pour lesquels l'intervalle $(\lambda_{n'_k}, \lambda_{n'_{k+1}})$ contient des points extérieurs à $E\left(\frac{1}{4D}; \{\lambda_n\}\right)$, ces deux suites (2, 4) et (2, 4bis) seront composées *des mêmes indices*; seulement, dans la première, certains de ces indices seront répétés plusieurs fois, ce qui correspond au fait que des sommes partielles de rangs différents de la série (2, 7) peuvent être égales à la même somme partielle de la série (2, 2).

§ 3. Considérons de nouveau une suite d'exposants $\{\lambda_n\}$, mesurable et de densité D , et soit

$$(3, 1) \quad n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$$

une suite d'indices construite de la manière indiquée au § 2. Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'elle a été construite en partant de l'ensemble $E\left(\frac{1}{4D}\right)$, mais tout ce que nous dirons dans la suite s'appliquera aussi bien aux suites d'indices construites en partant d'autres ensembles, comme nous l'avons indiqué à la fin du § 2.

Nous supposerons encore, comme au § 2, que l'abscisse de convergence \mathcal{C} de la série

$$(3, 2) \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

est finie et positive, tandis que son abscisse d'holomorphie est égale à zéro.

Si nous posons

$$S_n(s) = \sum_{m=1}^{m=n} a_m e^{-\lambda_m s}$$

$$P_k(s) = S_{n_{k+1}}(s) - S_{n_k}(s) = \sum_{m=n_k+1}^{m=n_{k+1}} a_m e^{-\lambda_m s}$$

nous pourrons écrire

$$(3, 3) \quad f(s) = P_0(s) + P_1(s) + \dots + P_k(s) + \dots$$

cette dernière série étant convergente dans tout le demi-plan d'holomorphic de (3, 2) c.-à-d. dans tout le demi-plan $\Re(s) > 0$.

Nous chercherons maintenant à évaluer l'ordre de grandeur des termes de la série (3, 3).

Désignons par R_k et R_{k+1} les affixes de deux points, extérieurs par rapport à l'ensemble $E\left(\frac{1}{4D}\right)$, et situés respectivement dans les intervalles $(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}})$ et $(\lambda_{n_{k+1}}, \lambda_{n_{k+1}+1})$; de tels points existeront sûrement par suite de la façon dont a été construite la suite (3, 1). Si nous désignons par D_k le contour du quadrilatère formé par les deux demi-droites $\arg z = \pm \gamma$ et les deux droites $\Re(z) = R_k$ et $\Re(z) = R_{k+1}$, nous pourrons écrire, en vertu des développements du paragraphe précédent,

$$(3, 4) \quad P_k(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_k} \frac{\varphi(z)}{C(z)} e^{-sz} dz$$

Si k est assez grand, nous pouvons obtenir une borne supérieure de la partie de cette intégrale relative aux côtés verticaux de D_k à l'aide de l'expression (2, 14); de même, l'inégalité (2, 18) nous donnera une borne supérieure pour la partie de l'intégrale relative aux deux autres côtés de D_k . D'ailleurs, ces bornes seront valables quel que soit $s = \sigma + i\tau$.

Supposons maintenant que s est situé dans une bande horizontale

$$|\tau| < h.$$

Nous pourrions alors passer des expressions (2, 14) et (2, 18) à des expressions analogues aux expressions (2, 17) et (2, 19). Au lieu de soumettre γ aux conditions (2, 16), nous le soumettrons aux conditions

$$h \operatorname{tg} \gamma < \varepsilon, \quad \pi D \operatorname{tg} \gamma < \varepsilon, \quad \operatorname{tg} \gamma < \frac{1}{2};$$

nous obtiendrons ainsi pour la fonction

$$\Phi(s, \varepsilon) = \frac{\varphi(\varepsilon)}{C(\varepsilon)} e^{-sz}$$

les bornes suivantes:

1) sur le côté $\mathcal{R}(\varepsilon) = R_k$

$$(3, 5) \quad |\Phi(s, \varepsilon)| < e^{-(\sigma-5\varepsilon)R_k};$$

2) sur le côté $\mathcal{R}(\varepsilon) = R_{k+1}$

$$(3, 6) \quad |\Phi(s, \varepsilon)| < e^{-(\sigma-5\varepsilon)R_{k+1}};$$

3) sur les côtés $\arg \varepsilon = \pm \gamma$

$$(3, 7) \quad |\Phi(s, \varepsilon)| < e^{-(\sigma \cos \gamma - 3\varepsilon)r} \quad (r = |\varepsilon|)$$

En condensant ces trois inégalités en une seule, nous pouvons écrire que sur tout le contour D_n on a

$$(3, 8) \quad |\Phi(s, \varepsilon)| < e^{-(\sigma-5\varepsilon)R_k}, \quad \text{si } \sigma > 0,$$

$$(3, 9) \quad |\Phi(s, \varepsilon)| < e^{-(\sigma-5\varepsilon)R_{k+1}}, \quad \text{si } \sigma < 0.$$

Supposons maintenant que les points R_k et R_{k+1} aient été choisis de telle sorte que la longueur de l'intervalle (R_k, R_{k+1}) soit aussi petite que possible. Suivant le mode de construction de la suite $\{n_k\}$ l'intervalle $(\lambda_{n_{k+1}}, \lambda_{n_{k+1}})$ appartient tout entier à l'ensemble $E\left(\frac{1}{4D}; \{\lambda_n\}\right)$. La largeur relative des intervalles de cet ensemble tend vers zéro; nous pouvons donc prendre

$$\begin{aligned} R_k &= (1 - \varepsilon) \lambda_{n_{k+1}}, \\ R_{k+1} &= (1 + \varepsilon) \lambda_{n_{k+1}}. \end{aligned}$$

Et si nous remarquons en outre que la longueur du contour D_k est inférieure à un multiple déterminé de R_{k+1} , nous verrons que, quelque petit que soit le nombre positif ω , on a pour k assez grand l'inégalité

$$|P_k(s)| < e^{-(\sigma-\omega)\lambda_{n_k+1}}$$

si seulement σ reste supérieur à un nombre négatif, d'ailleurs quelconque, donné à l'avance.

En récapitulant les résultats que nous venons d'obtenir, nous obtenons, pour les séries à suite d'exposants mesurable, le théorème suivant :

Théorème II. *Dans les conditions du théorème I, si l'on met la série*

$$(3, 2) \quad f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}$$

sous la forme

$$(3, 3) \quad f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(s)$$

où

$$(3, 10) \quad P_k(s) = \sum_{m=n_k+1}^{m=n_{k+1}} a_m e^{-\lambda_m s}$$

et les n_k sont choisis de la manière indiquée à la fin du § 2, et si, de plus, on pose

$$(3, 11) \quad P_k(s) = A_k(s) e^{-\lambda_{n_k+1} s}$$

les fonctions $A_k(s)$ satisfont, pour k assez grand et quelque petit que soit ω , aux inégalités

$$(3, 12) \quad |A_k(s)| < e^{(\delta+\omega)\lambda_{n_k+1}} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

uniformément par rapport à $s = \sigma + i\tau$, dans toute semi-bande

$$(3, 13) \quad \sigma > -\sigma. \quad |\tau| < h.$$

En d'autres termes, la série (3, 2) peut être mise sous la forme d'une série de Dirichlet à coefficients variables

$$(3, 14) \quad f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(s) e^{-\lambda_{n_k} + 1^s}$$

dont l'abscisse de convergence se confond avec l'abscisse d'holomorphie de (3, 2).

Notons qu'il est impossible de remplacer dans l'inégalité (3, 12) le nombre \mathcal{H} par un nombre inférieur, à moins de limiter la largeur de la bande (3, 13) où l'inégalité (3, 12) est applicable.

En effet, s'il était possible de le remplacer par un nombre $\mathcal{H}_1 < \mathcal{H}$, la série (3, 14) convergerait dans la semi-bande

$$\sigma > \mathcal{H}_1, \quad |\tau| < h$$

et $f(s)$ serait, par conséquent, holomorphe sur le segment

$$|\tau| < h$$

de la droite $\sigma = \mathcal{H}$, laquelle est par supposition la droite d'holomorphie de $f(s)$. Or, ceci n'est possible que si $h \leq \pi D$, car j'ai montré dans ma Thèse¹¹⁾ que chaque segment de la droite d'holomorphie de longueur supérieure à $2\pi D$ contient au moins un point singulier de $f(s)$. Si donc on veut pouvoir choisir h d'une manière arbitraire, le nombre \mathcal{H} ne peut pas être remplacé par un nombre inférieur dans l'inégalité (3, 12)¹²⁾.

Il est d'ailleurs presque évident que le théorème II, que nous avons démontré pour les séries à suite d'exposants mesurable, est vrai aussi pour les séries dont la suite d'exposants n'est pas mesurable, mais possède une densité maximum finie. On n'aura qu'à mettre la série sous la forme d'une série à suite d'exposants mesurable, comme nous l'avons fait au § 2, et appliquer le théorème II à cette dernière série; et comme les inégalités (3, 12) ne contiennent que les nombres λ_{n_k} et non les indices n_k , on verra que le théorème II est applicable tel quel aux séries dont la suite d'exposants admet une densité maximum finie sans être mesurable.

Avant de terminer ce paragraphe, indiquons encore une conséquence du théorème II.

Il peut arriver qu'il soit possible d'extraire de la suite (3, 1) une suite partielle

¹¹⁾ Voir [8], p. 403 (83).

¹²⁾ Il est d'ailleurs très probable que même pour des valeurs de h inférieures à πD on ne peut pas remplacer \mathcal{H} par un nombre inférieur dans l'inégalité (3, 12).

$$m_1, m_2, \dots, m_p, \dots$$

telle que les nombres

$$m_1 - 1, m_2 - 1, \dots, m_p - 1, \dots$$

fassent aussi partie de la suite (3, 1). Posons

$$m_p - 1 = n_{k_p}, \quad m_p = n_{k_p+1} \quad (p = 1, 2, \dots)$$

On aura alors

$$A_{k_p}(s) = a_{m_p}$$

et, par conséquent, en vertu des inégalités (3, 12), on pourra écrire

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{\log |a_{m_p}|}{\lambda_{m_p}} \leq \mathcal{H}.$$

Nous avons donc le théorème suivant:

Théorème III. *Si la suite d'exposants de la série*

$$(3, 2) \quad f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}$$

a une densité maximum finie D , si l'abscisse d'holomorphie de $f(s)$ est égale à \mathcal{H} , et si la suite d'indices

$$m_1, m_2, \dots, m_p, \dots$$

est telle que chacun des intervalles

$$(\lambda_{m_p-1}, \lambda_{m_p}) \quad \text{et} \quad (\lambda_{m_p}, \lambda_{m_p+1})$$

contient des points qui n'appartiennent pas à l'ensemble $E\left(\frac{1}{4D}, \{\lambda_n\}\right)$, les coefficients de la série (3, 2) de rang m_p ($p = 1, 2, \dots$) vérifient l'inégalité

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{\log |a_{m_p}|}{\lambda_{m_p}} \leq \mathcal{H}.$$

Le théorème II nous donnait déjà un moyen de calculer l'abscisse d'holomorphie en ne connaissant que les deux suites de nombres $\{a_m\}$ et $\{\lambda_m\}$, tandis que les théorèmes de ma thèse ne permettaient de la calculer que quand on connaît la fonction $\varphi(z)$ qui intervient au paragraphe 2 et au début de ce paragraphe. Toutefois, il peut être extrêmement difficile d'évaluer les expressions $A_k(s)$ qui interviennent au théorème II. C'est pourquoi le théorème III, que nous venons de démontrer, présente un réel intérêt; il ne permet pas de calculer l'abscisse d'holomorphie, mais il permet d'en calculer une borne inférieure, et ce par un procédé très simple et parfaitement réalisable.

§ 4. Nous sommes maintenant en état de mieux étudier les propriétés des coefficients des séries de Dirichlet du type considéré. Supposons de nouveau que la suite des $\{\lambda_n\}$ est mesurable et reprenons la représentation

$$f(s) = P_0(s) + P_1(s) + P_2(s) + \dots + P_k(s) + \dots$$

étudiée au paragraphe précédent.

L'ensemble $E(q; \{\lambda_n\})$ étant formé d'une infinité dénombrable d'intervalles distincts, désignons par e_k le $(k+1)$ -ème de ces intervalles comptés de gauche à droite. Alors les exposants des termes $a_n e^{-\lambda_n s}$ qui font partie de $P_k(s)$ seront tous situés à l'intérieur de e_k ; de plus, si nous posons

$$C_k(z) = \prod_{\lambda_n \text{ extérieur à } e_k} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

le produit infini se rapportant à tous les λ_n extérieurs à l'intervalle e_k , nous pourrions affirmer que, quelque petit que soit ε , l'inégalité

$$|C_k(z)| > e^{-\varepsilon z}$$

sera vérifiée à l'intérieur de e_k , pour k assez grand¹³⁾. Donc, en posant

$$\Phi_k(z) = \frac{\varphi(z)}{C_k(z)},$$

nous pouvons écrire en vertu de (3, 10) et (2, 12)

¹³⁾ Voir [8], p. 365 (45).

$$(4, 1) \quad P_k(s) = \sum_{m=n_k+1}^{m=n_{k+1}} \frac{\Phi_k(\lambda_m) \cdot e^{-\lambda_m s}}{\prod_{\substack{i \neq m \\ n_k < i \leq n_{k+1}}} \left(1 - \frac{\lambda_m^2}{\lambda_i^2}\right)},$$

les fonctions Φ_k satisfaisant, pour k assez grand, à la condition

$$(4, 2) \quad |\Phi_k(z)| < e^{\varepsilon z}, \quad \text{pour } \lambda_{n_k+1} \leq z \leq \lambda_{n_{k+1}};$$

on s'assurera d'ailleurs facilement, que si nous remplaçons la formule (4, 1) par la formule

$$(4, 3) \quad P_k = \lambda_{n_{k+1}}^{n_{k+1}-n_k} \sum_{m=n_k+1}^{m=n_{k+1}} \frac{\Psi_k(\lambda_m) \cdot e^{-\lambda_m s}}{\prod_{\substack{i \neq m \\ n_k < i \leq n_{k+1}}} (\lambda_i - \lambda_m)},$$

les fonctions $\Psi_k(\lambda_m)$ satisférons, pour k assez grand, aux inégalités

$$(4, 4) \quad |\Psi_k(z)| < e^{\varepsilon z}, \quad \text{pour } \lambda_{n_k+1} \leq z \leq \lambda_{n_{k+1}}$$

qui se déduisent immédiatement des inégalités (4, 2) et de l'égalité (2, 20). C'est cette formule (4, 3) qui, malgré son apparence rébarbative, nous permettra de voir comment sont formés les groupes de termes $P_k(s)$.

Donnons le nom *d'ordre du terme* $a_n e^{-\lambda_n s}$ (ou du *coefficient* a_n), au nombre ρ pour lequel

$$a_n = e^{\rho \lambda_n};$$

et nommons *ordre du groupe* $P_k(s)$, le plus grand des ordres de ses termes.

Cela posé, considérons pour commencer les groupes à deux termes (c.-à-d. ceux pour lesquels $n_{k+1} = n_k + 2$); supposons que la suite des λ_n est telle qu'une infinité de groupes $P_k(s)$ sont formés de deux termes et considérons la série

$$(4, 5) \quad \sum_{i=1}^{\infty} P_{k_i}(s)$$

formée par la réunion de ces groupes. En vertu des inégalités (3, 12) l'abscisse d'holomorphie de (4, 5) ne sera pas supérieure à l'abscisse d'holomorphie, supposée nulle, de la série complète; quant à l'abscisse de

convergence¹⁴⁾ de (4, 5), elle peut être quelconque, mais nous pouvons supposer qu'elle est positive, car seulement dans ce cas la série (4, 5) apporte une contribution réelle à l'ultraconvergence de la série complète dans le demi-plan $\Re(s) > 0$.

Nous pouvons certainement choisir un nombre positif \mathcal{Q} tel qu'il existe une suite infinie de groupes $P_{k_i}(s)$ dont l'ordre tend vers \mathcal{Q} lorsque k croît indéfiniment; soit

$$(4, 6) \quad T_k(s) = a_{r_k} e^{-\lambda_{r_k} s} + a_{r_{k+1}} e^{-\lambda_{r_{k+1}} s} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

la suite de ces groupes. En vertu des inégalités (3, 12) nous devons avoir

$$|e^{\lambda_{r_k} s} T_k(s)| < e^{\varepsilon \lambda_{r_k}};$$

d'autre part le module de l'un au moins des coefficients a_{r_k} et $a_{r_{k+1}}$ doit être compris entre $e^{(\mathcal{Q}-\varepsilon)\lambda_{r_k}}$ et $e^{(\mathcal{Q}+\varepsilon)\lambda_{r_k}}$. Mais la formule (4, 3) nous permet d'écrire

$$(4, 7) \quad T_k(s) = \frac{1}{\lambda_{r_{k+1}} - \lambda_{r_k}} (b'_k e^{-\lambda_{r_k} s} - b''_k e^{-\lambda_{r_{k+1}} s})$$

les nombres $|b'_k|$ et $|b''_k|$ étant inférieurs, en vertu de (4, 4), à $e^{\varepsilon \lambda_{r_k}}$. Il s'ensuit que l'on a nécessairement, pour k assez grand et quelque petit que soit ε ,

$$(4, 8) \quad \lambda_{r_{k+1}} - \lambda_{r_k} < e^{-(\mathcal{Q}-2\varepsilon)\lambda_{r_k}};$$

d'autre part il est facile de déduire de l'inégalité (2, 11) et des propriétés de la dérivée de $C(s)$ démontrées dans ma Thèse¹⁵⁾, que non seulement les fonctions $\Psi_k(s)$, mais leurs dérivées d'un ordre quelconque (fixé à l'avance), satisfont aux inégalités (4, 4) pour k assez grand. Et par conséquent, en confrontant (4, 7) avec (4, 3) on obtient, en tenant compte de (4, 8), que, quelque petit que soit ε ,

$$|b'_k - b''_k| < (\lambda_{r_{k+1}} - \lambda_{r_k}) \cdot e^{\varepsilon \lambda_{r_k}} < e^{-(\mathcal{Q}-3\varepsilon)\lambda_{r_k}}.$$

¹⁴⁾ Il s'agit ici (comme dans la suite du paragraphe) de l'abscisse de convergence de la série, *considérée comme série de Dirichlet*, c.-à.-d. les termes n'étant pas réunis en groupes; autrement les abscisses de convergence et d'holomorphie se confondraient pour les séries en question.

¹⁵⁾ Voir [8], p. 366 (46).

Donc, si nous posons

$$(4, 9) \quad T_k(s) = c_k (e^{-\lambda_{r_k} s} - e^{-\lambda_{r_k+1} s}) + d_k e^{-\lambda_{r_k+1} s},$$

nous aurons, pour k assez grand, quelque petit que soit ω ,

$$(4, 10) \quad |c_k| < e^{-(\mathcal{Q}-\omega)\lambda_{r_k}};$$

$$(4, 11) \quad |d_k| < e^{\omega\lambda_{r_k}}.$$

La série $\sum d_k e^{-\lambda_{r_k} s}$ converge donc absolument dans le demi-plan $\Re(s) > 0$. Les groupes $T_k(s)$ que nous étudions peuvent donc être réduits par l'addition des termes d'une série convergente dans le demi-plan $\Re(s) > 0$, à la forme spéciale

$$(4, 12) \quad B_k(s) = c_k (e^{-\lambda_{r_k} s} - e^{-\lambda_{r_k+1} s}) = \frac{b_k}{\lambda_{r_k+1} - \lambda_{r_k}} (e^{-\lambda_{r_k} s} - e^{-\lambda_{r_k+1} s}).$$

Or, c'est précisément à l'aide de groupes de cette forme, au facteur b_k près, que M. Bohr a formé, dès 1913, des exemples de séries de Dirichlet à ultraconvergence serrée. Nous voyons donc que, si nous donnons aux groupes du type (4, 12) le nom de *groupes de Bohr*, nous pourrions dire que *la série (4, 5) est égale à la somme de deux séries de Dirichlet, dont l'une converge dans tout le demi-plan d'holomorphie de (4, 5), tandis que l'autre est formée exclusivement avec des groupes de Bohr, le coefficient c_k étant du même ordre que le groupe correspondant de (4, 5).*

Passons maintenant au cas général; supposons que la série (4, 5) représente une série formée par des groupes (d'un nombre quelconque de termes) dont les ordres tendent vers $\mathcal{Q} > 0$, lorsque k croît indéfiniment. Considérons un de ces groupes dont l'ordre est supérieur à $\mathcal{Q} - \varepsilon$, et pour simplifier les notations, désignons-le par

$$(4, 13) \quad T_k(s) = a_{r_k} e^{-\lambda_{r_k} s} + a_{r_k+1} e^{-\lambda_{r_k+1} s} + \dots + a_{r_k+p} e^{-\lambda_{r_k+p} s},$$

le nombre de termes du groupe étant désigné par $p + 1$.

En reprenant un calcul fait dans ma Thèse¹⁶⁾, on verra facilement que, pour k assez grand, on a

¹⁶⁾ Voir [8], pp. 361—362 (31—32).

$$e^{-\varepsilon\lambda_{r_k}} < \frac{\lambda_{r_k}^{q+1}}{p!} < e^{\varepsilon\lambda_{r_k}}.$$

La formule (4, 3) nous permet par conséquent d'affirmer que si nous posons

$$(4, 14) \quad T_k(s) = p! \sum_{\nu=0}^{\nu=p} \frac{b_{\nu}^{(k)} e^{-\lambda_{r_k+\nu}s}}{\prod_{i=0}^{i=p} (i \neq \nu) (\lambda_{r_k+i} - \lambda_{r_k+\nu})},$$

les nombres $|b_{\nu}^{(k)}|$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, p$) seront, pour k assez grand, inférieurs à $e^{\varepsilon\lambda_{r_k}}$. On peut donc conclure que, parmi les nombres

$$(4, 15) \quad \delta_{\nu}^{(k)} = \frac{1}{p!} \prod_{i=0}^{i=p} (i \neq \nu) (\lambda_{r_k+i} - \lambda_{r_k+\nu}) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, p),$$

il y en a au moins un qui est inférieur en valeur absolue à $e^{-(\mathcal{D}-3\varepsilon)\lambda_{r_k}}$. Nous avons vu au § 2 que les exposants des termes d'un même groupe $P_k(s)$ doivent appartenir à un même intervalle de l'ensemble $E(q; \{\lambda_n\})$ ($q < \frac{1}{4D}$); nous avons obtenu maintenant une condition plus précise quant au „degré du voisinage“ de ces exposants.

Introduisons maintenant la notion de groupe de Bohr à plusieurs termes. Bien que M. Bohr n'ait fait en réalité usage que des groupes du type (4, 12), je crois pouvoir donner le nom de *groupes de Bohr à $p+1$ termes* aux expressions de la forme

$$(4, 16) \quad B_k(s) = b_k \sum_{\nu=0}^{\nu=p} \frac{1}{\delta_{\nu}^{(k)}} e^{-\lambda_{r_k+\nu}s};$$

en effet, l'expression (4, 12) employée par M. Bohr représente (au facteur b_k près) la première *différence divisée*¹⁷⁾ de la fonction e^{-sz} relative aux points $s_0 = \lambda_{r_k}$ et $s_1 = \lambda_{r_k+1}$, tandis que l'expression (4, 16) représente (au même facteur près) la *différence divisée d'ordre p* de la même fonction relative aux points $s_0 = \lambda_{r_k}$, $s_1 = \lambda_{r_k+1}$, ..., $s_p = \lambda_{r_k+p}$ ¹⁸⁾.

¹⁷⁾ Ou *fonction interpolaire* suivant la terminologie d'Ampère.

¹⁸⁾ Voir [5], p. 2.

Désignons maintenant par $\delta_{\mu}^{(k)}$ le plus petit parmi les nombres (4, 15), et posons

$$b_k = b_{\mu}^{(k)};$$

alors, en vertu de (4, 14) et (4, 16), le terme en $e^{-\lambda_{r_k} + \mu^s}$ sera identique dans $T_k(s)$ et dans $B_k(s)$, de sorte que la différence

$$(4, 17) \quad T'_k(s) = T_k(s) - B_k(s)$$

ne contiendra que p termes. D'ailleurs, la formule de Cauchy-Genocchi ¹⁹⁾ montre que, si l'on pose $s = \sigma + it$, on a

$$|B_k(s)| = \left| b_k \left\{ \left[\frac{d^p (e^{-\sigma z} \cos st)}{dz^p} \right]_{z=\xi'} + \left[\frac{d^p (e^{-\sigma z} \sin st)}{dz^p} \right]_{z=\xi''} \right\} \right| \leq 4 \cdot |b_k| \cdot |s| e^{-\sigma \xi}$$

ξ, ξ', ξ'' désignant des nombres compris entre λ_{r_k} et λ_{r_k+p} . Donc, en vertu de (3, 12) et de (4, 17), nous voyons que les différences $T'_k(s)$ satisfont aussi, pour k assez grand, aux inégalités

$$|e^{-\lambda_{r_k} s} T'_k(s)| < e^{\varepsilon \lambda_{r_k}}$$

quelque petit que soit ε . La série $\sum T_k(s)$ peut donc être représentée comme la somme de deux séries

$$\sum T_k(s) = \sum B_k(s) + \sum T'_k(s),$$

la première de ces séries étant formée exclusivement avec des groupes de Bohr, et ayant les mêmes abscisses d'holomorphie et de convergence que la série $\sum T_k(s)$ ²⁰⁾, tandis que la deuxième série (qui peut ne pas exister) est formée avec des groupes dont le nombre de termes est inférieur d'au moins une unité au nombre de termes du groupe correspondant de la série $\sum T_k(s)$.

En raisonnant avec la série $\sum T'_k(s)$ comme nous l'avons fait pour la série $\sum T_k(s)$, et ainsi de suite, nous verrons que chaque groupe $T_k(s)$ à $p + 1$ termes peut être mis sous la forme de p groupes de Bohr respectivement de $p + 1, p, p - 1, \dots, 3, 2$ termes auxquels s'ajoutera éventuellement un terme d'une série de Dirichlet convergente dans tout

¹⁹⁾ Voir [5], p. 6.

²⁰⁾ Voir la note ¹⁴⁾.

le demi-plan $\Re(s) > 0$. Convenons d'appeler *groupe de Bohr généralisé à $p + 1$ termes* une expression telle que

$$\mathcal{B}_k^{(p)}(s) = B_k^{(p)}(s) + B_k^{(p-1)}(s) + \dots + B_k^{(2)}(s),$$

où $B_k^{(p-\nu)}(s)$ désigne un groupe de Bohr à $p - \nu + 1$ termes formés avec les mêmes exposants que $B_k^{(p-\nu+1)}(s)$ sauf l'un d'eux ; chacun des groupes $B_k^{(p-\nu)}(s)$ contenant un coefficient arbitraire, le groupe de Bohr généralisé à $p + 1$ termes dépendra de p coefficients arbitraires $b_{\nu, k}$ ($\nu = 1, 2, \dots, p$).

Ceci posé, nous pouvons énoncer ainsi le résultat auquel nous sommes parvenus :

Théorème IV. *Toute série de Dirichlet*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

dont la suite d'exposants a une densité maximum finie et dont l'abscisse de convergence \mathcal{C} est différente de son abscisse d'holomorphie \mathcal{H} , peut être représentée comme la somme de deux séries de Dirichlet, dont l'une converge dans tout le demi-plan $\Re(s) > \mathcal{H}$, tandis que l'autre est formée exclusivement avec des groupes de Bohr généralisés, les coefficients de ces groupes satisfaisant à la condition

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{n_k+1}} \log |b_{\nu, k}| \leq \mathcal{H},$$

où λ_{n_k+1} désigne le plus petit des exposants du groupe $\mathcal{B}_k^{(p)}(s)$ duquel fait partie le coefficient $b_{\nu, k}$.

Nous voyons donc que le moyen que M. Bohr a utilisé pour construire des séries de Dirichlet à ultraconvergence serrée ne constitue pas, comme on aurait pu le croire, un artifice commode, mais est au contraire lié à la nature même des choses (du moins pour les séries dont les exposants ont une densité maximum finie).

§ 5. Dans les paragraphes précédents nous nous sommes occupés de l'ultraconvergence dans des domaines ne s'étendant pas en dehors du demi-plan d'holomorphie ; dans ce paragraphe nous étudierons au contraire l'ultraconvergence de certaines séries (précisément des séries lacunaires) dans des domaines s'étendant au-delà du demi-plan d'holomorphie. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème V. Si la suite d'exposants

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$$

de la série de Dirichlet

$$(5, 1) \quad f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}$$

a une densité maximum finie D et si de plus elle possède une infinité de lacunes de largeur relative supérieure à un nombre positif θ , c.-à.-d., s'il existe une suite d'indices indéfiniment croissants

$$m_1, m_2, \dots, m_\nu, \dots$$

tels que

$$(5, 2) \quad \frac{\lambda_{m_{\nu+1}} - \lambda_{m_\nu}}{\lambda_{m_\nu}} > \theta,$$

la suite des sommes partielles de (4, 1)

$$(5, 3) \quad Q_\nu(s) = \sum_{i=1}^{i=m_\nu} a_i e^{-\lambda_i s} \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

arrêtées aux termes de rang m_1, m_2, \dots , converge uniformément autour de chaque point de la droite d'holomorphie qui est régulier pour la fonction $f(s)$.

Ce théorème s'obtient d'un théorème connu de M. Ostrowski²¹⁾ si l'on y remplace les mots « droite de convergence » par les mots « droite d'holomorphie ». La démonstration de M. Ostrowski s'applique d'ailleurs avec très peu de modifications au théorème qui nous occupe. Au lieu d'appliquer les raisonnements à la série primitive, on les appliquera à la série

$$(5, 4) \quad f(s) = \sum A_k(s) e^{-\lambda_{n_k+1}s},$$

les $A_k(s)$ et les n_k satisfaisant aux conditions indiquées aux paragraphes précédents; le fait que cette série a des coefficients variables ne constituera pas un obstacle grâce aux inégalités (3, 12) auxquelles ces coeffi-

²¹⁾ Voir [3], p. 557, ou [6], p. 204.

cients satisfont et qui correspondent exactement aux inégalités auxquelles satisfont les coefficients des séries de Taylor.

Supposons, comme aux paragraphes précédents, que l'abscisse d'holomorphie de (5, 1) est égale à zéro. Considérons un point arbitraire s_0 de la droite d'holomorphie $\mathcal{R}(s) = 0$ en lequel $f(s)$ est holomorphe; nous pouvons encore supposer, sans restreindre la généralité, que $s_0 = 0$. La fonction $f(s)$ sera alors holomorphe dans un cercle

$$(5, 5) \quad |s| < \rho_0$$

et nous devons démontrer que l'on peut tracer un autre cercle

$$|s| < \rho_1 \leq \rho_0$$

à l'intérieur duquel les sommes partielles $Q_\nu(s)$ convergent uniformément vers $f(s)$.

Nous pouvons d'ailleurs affirmer que les quantités $Q_\nu(s)$ sont aussi des sommes partielles de la série (5, 4); en effet, il résulte de l'inégalité (5, 2) que chaque intervalle $(\lambda_{m_\nu}, \lambda_{m_\nu+1})$ contient des points qui n'appartiennent pas à l'ensemble $E\left(\frac{1}{4D}, \{\lambda_n\}\right)$; en conséquence tous les m_ν font partie de la suite $\{n_k\}$. Nous pouvons donc poser

$$(5, 6) \quad m_\nu = n_h$$

et

$$T_h(s) = \sum_{k=0}^{h-1} A_k(s) e^{-\lambda_{n_k} + 1^s};$$

et nous aurons, en vertu de (5, 3),

$$(5, 7) \quad Q_\nu(s) = T_h(s).$$

Or, grâce aux inégalités (3, 12) il n'est pas difficile d'évaluer l'ordre de grandeur des $T_h(s)$.

Il résulte de l'inégalité (5, 2) que la suite $\{\lambda_n\}$ n'est sûrement pas mesurable. Construisons donc la suite mesurable principale

$$l_1, l_2, \dots, l_p, \dots$$

contenant la suite $\{\lambda_n\}$ comme suite partielle, et soit p_n le numéro d'ordre

du point λ_n dans la suite $\{\lambda_n\}$. Soit k_1 un nombre tel que, pour $k > k_1$ et pour une valeur donnée de $\omega > 0$, on ait

$$(5, 8) \quad \frac{\rho_{n_k}}{D} - \omega < \lambda_{n_k} < \frac{\rho_{n_k}}{D} + \omega.$$

Soit d'autre part k_2 un nombre tel que, pour la même valeur de ω , les inégalités (3, 12) soient vérifiées pour $k > k_2$ dans la semi-bande

$$(5, 9) \quad \sigma > -\rho, \quad |\tau| < 2\sqrt{\rho} \quad (s = \sigma + i\tau)$$

où ρ désigne un nombre positif fixe que nous préciserons plus loin.

Désignons maintenant par k_0 le plus grand des deux nombres k_1 et k_2 . Désignons enfin par M la borne supérieure des fonctions

$$A_1(s), A_2(s), \dots, A_{k_0}(s)$$

dans le domaine

$$(5, 10) \quad -\rho < \sigma < 3, \quad |\tau| < 2\sqrt{\rho}.$$

Nous pourrions alors écrire que dans le domaine (5, 10), qui fait partie de la semi-bande (5, 9), on a

$$|T_h(s)| \leq M \sum_{k=0}^{k=k_0} e^{\lambda_{n_k} \rho} + \sum_{k=k_0+1}^{k=h-1} e^{(\rho+\omega)\lambda_{n_k+1}} \leq O(1) + \sum_{k=k_0+1}^{k=h-1} e^{(\rho+\omega)\left(\frac{\rho_{n_k+1}}{D} + \omega\right)}$$

où le symbole $O(1)$ désigne une quantité qui reste bornée lorsque h croît indéfiniment. Posons

$$e^{\frac{\rho+\omega}{D}} = R;$$

l'inégalité précédente nous donnera alors

$$(5, 11) \quad |T_h(s)| \leq O(1) + R^{\omega D} \sum_{m=1}^{m=\rho_{n_h}} R^m = O(1) + R^{\rho_{n_h}} \frac{R^{\omega D}}{R-1}$$

En procédant de la même manière et en notant que dans le domaine

$$(5, 12) \quad \rho < \sigma < 3, \quad |\tau| < 2\sqrt{\rho}$$

la série (5, 4) est absolument convergente, nous obtiendrons, pour ce domaine et pour $p > k_0$, l'inégalité

$$(5, 13) \quad \begin{aligned} |f(s) - T_h(s)| &= \left| \sum_{k=h}^{\infty} A_k(s) e^{-\lambda_{n_k+1}s} \right| \leq \sum_{k=h}^{\infty} e^{(-\rho+\omega)\lambda_{n_k+1}} \leq \\ &\leq \sum_{k=h}^{\infty} e^{-(\rho-\omega)\left(\frac{p_{n_k+1}}{D} + \omega\right)} \leq r^{\omega D} \sum_{m=p_{n_h+1}}^{\infty} r^m = r^{p_{n_h+1}} \frac{r^{\omega D}}{1-r} \end{aligned}$$

où

$$r = e^{-\frac{\rho-\omega}{D}}$$

pourvu que ω ait été pris inférieur à ρ .

Soit maintenant α un nombre positif fixe inférieur à l'unité et que nous préciserons plus loin. Traçons trois cercles concentriques $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, de centre α et de rayons

$$r_1 = \alpha - \alpha^2 \quad r_2 = \alpha + \alpha^3 \quad r_3 = \alpha + \alpha^2$$

(voir fig. 1). On prendra α assez petit pour que tous ces cercles soient

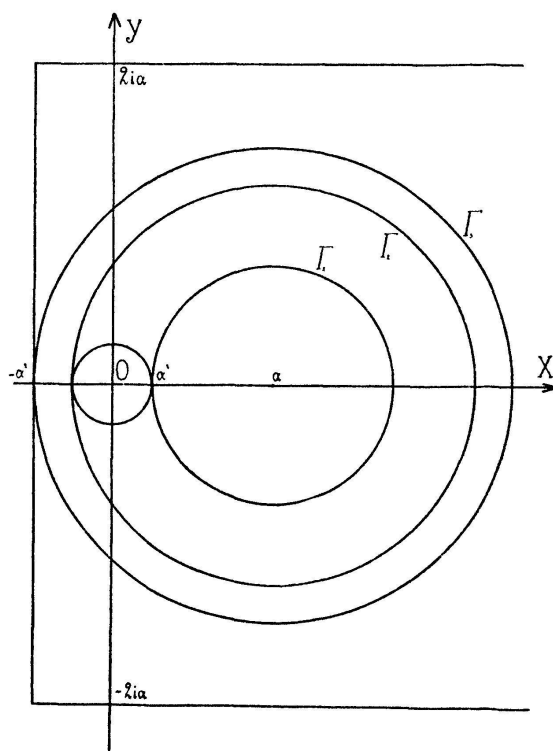


Fig. 1.

intérieurs au cercle (5, 5) et au domaine (5, 10). Il suffira pour cela de prendre

$$\alpha^2 = \rho$$

et c'est ce que nous supposons dorénavant; de plus, nous prendrons

$$\omega = \alpha^3$$

ce que nous pouvons faire, car ω n'était soumis jusqu'ici qu'à la condition d'être un nombre positif fixe, inférieur à ρ .

Le cercle I_3 étant intérieur au domaine (5, 10), nous pouvons lui appliquer l'inégalité (5, 11). Nous aurons donc dans I_3 en tenant compte de (5, 6) et (5, 7),

$$|Q_v(s)| = |T_h(s)| \leq AR^{\rho n_h} + B = AR^{\rho m_v} + B$$

où A et B , ainsi que dans la suite A', A'', \dots et $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$, désignent des quantités indépendantes de m_v , tandis que

$$R = e^{\frac{\alpha^2(1+\alpha)}{D}};$$

si maintenant nous désignons par M_0 le maximum de $f(s)$ dans le cercle (5, 5) nous aurons dans I_3 l'inégalité

$$|f(s) - Q_v(s)| \leq M_0 + B + AR^{\rho m_v} \leq A'R^{\rho m_v}.$$

Cela posé désignons respectivement par $M_1^{(v)}$, $M_2^{(v)}$, $M_3^{(v)}$ le maximum de $|f(s) - Q_v(s)|$ dans les cercles I_1 , I_2 , I_3 . Nous aurons alors, en tenant compte de (5, 8),

$$(5, 14) \quad \log M_3^{(v)} \leq \rho m_v \log R + \alpha = \alpha^2(1 + \alpha)\lambda_{m_v} + \alpha'.$$

D'autre part, le cercle I_1 est intérieur au domaine (5, 12), de sorte que nous pouvons lui appliquer l'inégalité (5, 13), ce qui nous donne

$$\log M_1^{(v)} \leq \rho_{m_v+1} \cdot \log r + \alpha'$$

avec

$$r = e^{-\frac{\alpha^2(1-\alpha)}{D}}$$

et, par conséquent, en tenant compte de (5, 8)

$$\log M_1^{(\nu)} \leq -\alpha^2 (1 - \alpha) \lambda_{m_\nu+1} + a'''$$

et encore, par suite de (5, 2),

$$(5, 15) \quad \log M_1^{(\nu)} \leq - (1 + \theta) \alpha^2 (1 - \alpha) \lambda_{m_\nu} + a'''.$$

Appliquons maintenant le théorème des trois cercles de M. Hadamard à la fonction $f(s) - Q_\nu(s)$ et aux cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Ce théorème, compte tenu des inégalités (5, 14) et (5, 15), nous permettra d'écrire l'inégalité

$$(5, 16) \quad \log \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \log M_2^{(\nu)} \leq \lambda_{m_\nu} \left[\alpha^2 (1 + \alpha) \log \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha} - \right. \\ \left. - (1 + \theta) \alpha^2 (1 - \alpha) \log \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha^2} \right] + a''.$$

Si l'on développe les logarithmes en série suivant les puissances de α , le coefficient de λ_{m_ν} dans cette inégalité pourra être mis sous la forme

$$- \theta \alpha^3 \left[1 + \varphi(\alpha) \right]$$

$\varphi(\alpha)$ désignant une fonction de α , holomorphe au voisinage du point $\alpha = 0$, réelle pour α réel et positif, et s'annulant pour $\alpha = 0$. Si donc nous prenons α assez petit pour que l'on ait $|\varphi(\alpha)| < \frac{1}{2}$, le coefficient de λ_{m_ν} dans l'inégalité (5, 16) sera algébriquement inférieur à $-\frac{1}{2} \theta \alpha^3$, et cette inégalité montrera que $M_2^{(\nu)}$ tend vers zéro lorsque ν croît indéfiniment. Or, cela veut dire que, dans le cercle Γ_2 , et par conséquent dans le cercle de rayon α^3 et de centre o (voir fig. 1), les fonctions $Q_\nu(s)$ convergent uniformément vers $f(s)$, ce qui démontre notre théorème.

Bibliographie

1. *H. Bohr*. Einige Bemerkungen über das Konvergenzproblem Dirichletscher Reihen (Rendiconti Palermo, t. 37, 1913).
2. *F. Carlson*, Ueber Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten (Math. Ann., t. 79, 1919).
3. *A. Ostrowski*. Ueber eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten (Sitz. Preuß. Akad., 1921).
4. *A. Ostrowski*, Ueber Potenzreihen, die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen (Sitz. Preuß. Akad., 1923).
5. *N. E. Nörlund*. Séries d'interpolation, Paris 1926.
6. *P. Montel*. Familles normales, Paris 1927.
7. *G. Pólya*. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen (Math. Zeitschrift, t. 29, 1929).
8. *V. Bernstein*. Sur les singularités des séries de Dirichlet (Rendiconti R. Ist. Lomb. Sc. Lett., t. 63, 1930).

(Reçu le 8 novembre 1931)