Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 4 (1932)

Artikel: Analytische Funktionen einer Quaternionenvariablen.

Autor: Fueter, Rud.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5606

Analytische Funktionen einer Quaternionen-variablen

Von Rud. FUETER, Zürich

Es ist fraglich, ob sich für die Funktionen einer Quaternionenvariablen eine so in sich abgeschlossene und dominierende Funktionsklasse definieren läßt, wie dies die analytischen Funktionen einer komplexen Variablen sind. Die Möglichkeit besteht, daß es verschiedene Arten analytischer Funktionen für Quaternionenvariable gibt. Im Folgenden entwickle ich eine Lösung des Problems, die mir dadurch ausgezeichnet erscheint, daß sie eine direkte Verallgemeinerung der klassischen Theorie der analytischen Funktionen ist, dieselben auch sozusagen umfaßt, und daß sie für das von mir untersuchte Problem der automorphen Funktionen einer Quaternionenvariablen von grundlegender Bedeutung ist[1]). Das Problem ist schon verschiedentlich aufgegriffen worden, aber meines Wissens niemals befriedigend gelöst worden[2]).

Ich beschränke mich, der Anschauung wegen, auf den Fall der reduzierten Quaternionenvariablen und -funktionen. Der Fall der allgemeinen Quaternionenvariablen ergibt sich daraus ohne weiteres, wie ich am Schlusse ausführen werde. Auf Zusammenhänge mit andern mathematischen Disziplinen werde ich hier nicht eingehen.

1. Es sei $z = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2$ eine reduzierte Quaternionenvariable, x_0, x_1, x_2, drei reelle Variable, 1, i_1, i_2, i_3 die positiven Quaternionen u_0, u_1, u_2 seien drei reelle, in Ω endliche, stetige und stetig differentiierbare Funktionen von x_0, x_1, x_2. Ω sei ein beliebiger Raumteil im 012-Raume.

Definition: *Unter diesen Voraussetzungen heiße:*

$$w = u_0 + u_1 i_1 + u_2 i_2 = f(z)$$

---

1) Siehe: *Fueter,* Ueber automorphe Funktionen der Picard'schen Gruppe I. Commentarii Math. Helv. Bd. 3, S. 42. Im zweiten Teile werden die hier entwickelten Prinzipien Anwendung finden.

2) *G. Scheffers:* Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich complexen Zahlen, Berichte kgl. Sächs. Ges. der Wiss. Bd. 45, S. 828 und Bd. 46, S. 120.

F. Hausdorff: Zur Theorie der Systeme complexer Zahlen. Berichte kgl. Sächs. Ges. der Wiss. Bd. 52, S. 60.

L. Autonne: Sur les propriétés qui, pour les fonctions d'une variable hypercomplexe, correspondent à la monogénéité, Journal de math. p. et appl. 1907, S. 53.

Sur la fonction monogène d'une variable hypercomplexe dans un groupe commutatif, Bull. Soc. math. de France, t. 37, S. 176.

P.W. Kechum: Analytic functions of hypercompl. variables, Trans. Am. Math. Soc. 30, pg. 641.

Sicherlich hat sich schon *W. R. Hamilton* mit solchen Fragen abgegeben. Siehe seine Lectures on Quaternions, Dublin, 1853, S. 557 u. ff.

eine analytische Funktion der Quaternionenvariablen z in Ω, wenn wenigstens zwei der Differentialgleichungen:

$$\text{I.} \qquad \begin{aligned} &0)\ u_1^{(0)} u_2^{(0)} + u_1^{(1)} u_2^{(1)} + u_1^{(2)} u_2^{(2)} = 0, \\ &1)\ u_0^{(0)} u_2^{(0)} + u_0^{(1)} u_2^{(1)} + u_0^{(2)} u_2^{(2)} = 0, \\ &2)\ u_0^{(0)} u_1^{(0)} + u_0^{(1)} u_1^{(1)} + u_0^{(2)} u_1^{(2)} = 0, \end{aligned}$$

oder wenigstens zwei der Differentialgleichungen:

$$\text{II.} \qquad \begin{aligned} &0)\ u_0^{(1)} u_0^{(2)} + u_1^{(1)} u_1^{(2)} + u_2^{(1)} u_2^{(2)} = 0, \\ &1)\ u_0^{(0)} u_0^{(2)} + u_1^{(0)} u_1^{(2)} + u_2^{(0)} u_2^{(2)} = 0, \\ &2)\ u_0^{(0)} u_0^{(1)} + u_1^{(0)} u_1^{(1)} + u_2^{(0)} u_2^{(1)} = 0, \end{aligned}$$

erfüllt sind, wo:

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_k} = u_l^{(k)}$$

gesetzt ist, und in I.:

$$u_l^{(0)2} + u_l^{(1)2} + u_l^{(2)2} \neq 0, \qquad l = 0, 1, 2,$$

in II.:

$$u_0^{(k)2} + u_1^{(k)2} + u_2^{(k)2} \neq 0, \qquad k = 0, 1, 2,$$

ist.

Durch diese Definition wird $w =$ Konst. (d. h. alle drei u_l konstant) als analytische Funktion ausgeschlossen, was ja auch der besondern Rolle der Konstanten in der Theorie der gewöhnlichen analytischen Funktionen entspricht.

Die Funktion u_l, die in beiden Differentialgleichungen auftritt, falls zwei Differentialgleichungen I erfüllt sind, ist ausgezeichnet. Oder die Variable x_k, nach der in beiden Differentialgleichungen differentiiert wird, falls zwei Differentialgleichungen II. erfüllt sind, ist ausgezeichnet.

Geometrisch bedeuten zwei erfüllte Differentialgleichungen I., daß für jeden Punkt von Ω zwei der durch ihn hindurchgehenden Flächen $u_l =$ konst., $l = 0, 1, 2$, auf der dritten senkrecht stehen. Zwei erfüllte Differentialgleichungen II. bedeuten, daß zwei der Bildflächen von $x_k =$ konst., $k = 0, 1, 2$, auf der dritten senkrecht stehen. Daraus erkennt man, daß die Gleichungen I. und II. invers sind; d. h. ist in einem Teilbereiche Ω' von Ω die Funktionaldeterminante D der u_l in Bezug auf die x_k von null verschieden, so existieren in Ω' die inversen Funktionen:

$$x_k = x_k(u_0, u_1, u_2), \quad k = 0, 1, 2, \quad z = \varphi(w);$$

genügen dann die Funktionen u_l in Bezug auf die x_k zwei Gleichungen I., so genügen die x_k in Bezug auf die u_l den zwei entsprechenden Gleichungen II., und vice versa. Daraus folgt:

1. Satz: *Ist w analytisch in Ω, und ist in dem Teilbereiche Ω' von Ω die Funktionaldeterminante der u_l in Bezug auf die x_k von null verschieden, so ist auch die in Ω' existierende inverse Funktion $z = \varphi(w)$ analytisch.*

Diese Ueberlegungen begründen den Umstand, daß zwei der Gleichungen I. *oder* II. zur Definition der analytischen Funktionen vorgeschrieben werden. Denn durch die Wahl des einen oder andern Gleichungssystems wählt man unter der Funktion und ihrer inversen nur die eine aus. Analytische Funktionen, die zwei Gleichungen I. erfüllen, werden wir solche vom *Typus I*, diejenigen, die zwei Gleichungen II. erfüllen, vom *Typus II* nennen. Analytische Funktionen, die in *der* Art gleichzeitig vom Typus I und II sind, daß die erfüllten Gleichungen I. und II. sich entsprechen, d. h. dieselbe Nummer haben, sollen *hyperanalytisch* heißen. Es ist noch fraglich, ob sie erst die eigentlichen analytischen Funktionen ergeben.

Aus der Gestalt von I. und II. folgen die Sätze:

2. Satz: *Ist w analytisch in Ω und c eine reelle Konstante $\neq 0$, so ist auch cw analytisch in Ω vom selben Typus.*

3. Satz: *Ist w analytisch in Ω, so sind es auch:*

$$-i_1 w i_1, \quad -i_2 w i_2, \quad -i_3 w i_3 = \overline{w}.$$

Ist w vom Typus I, so ändern sich die Differentialgleichungen nicht, falls man u_l durch $a_l u_l$ ersetzt, $l = 0, 1, 2$, wo die a_l beliebige reelle Konstanten $\neq 0$ sind. Ist w vom Typus II, so ändern sich die Differentialgleichungen nicht, falls man x_k durch $a_k x_k$, $k = 0, 1, 2$, ersetzt, wobei die a_k dieselbe Definition wie eben haben. Im ersten Falle ist daher auch $\sum_{l=0}^{2} a_l u_l i_l$ eine analytische Funktion vom Typus I, im zweiten Falle ist w auch eine analytische Funktion der Variablen $\sum_{k=0}^{2} a_k x_k i_k$ vom

Typus II. Dies hat darum nichts auffälliges, da ja die Koordinaten eines Quaternions gewisse lineare Funktionen des ganzen Quaternions sind[3]).

2. Im Folgenden verstehen wir unter einer linearen Quaternionensubstitution $S = \begin{pmatrix} \alpha\,\beta \\ \gamma\,\delta \end{pmatrix}$ nur solche, für die die zugehörige lineare Funktion:

$$z' = Sz = (\alpha z + \beta)\,(\gamma z + \delta)^{-1}, \text{ resp. } 'z = zS = (z\gamma + \delta)^{-1}\,(z\alpha + \beta),$$

reduziert ist, d. h. kein Glied mit i_3 enthält, und für die:

$$\gamma \neq 0:\ \beta - \alpha\gamma^{-1}\,\delta \neq 0;\ \text{oder } \gamma = 0:\ \alpha\delta \neq 0,$$

ist. Die Substitutionen der Picard'schen Gruppe haben z. B. diese Eigenschaften, falls man ihre imaginäre Einheit als i_1 wählt. Diese linearen Substitutionen Sz oder zS vermitteln eine winkeltreue Abbildung des Raumes in sich. Daher müssen sie alle Gleichungen I. und II. erfüllen.

4. Satz: *Die linearen Funktionen Sz oder zS sind im ganzen endlichen Raume hyperanalytisch. Sie erfüllen alle Gleichungen I. und II.*

Die linearen Funktionen Sz oder zS befriedigen aber auch die Differentialgleichungen der konformen Abbildung:

Ia. $$u_0^{(0)2} + u_0^{(1)2} + u_0^{(2)2} = u_1^{(0)2} + u_1^{(1)2} + u_1^{(2)2} = u_2^{(0)2} + u_2^{(1)2} + u_2^{(2)2},$$

IIa. $$u_0^{(0)2} + u_1^{(0)2} + u_2^{(0)2} = u_0^{(1)2} + u_1^{(1)2} + u_2^{(1)2} = u_0^{(2)2} + u_1^{(2)2} + u_2^{(2)2}.$$

Um IIa zu beweisen, bedenken wir, daß folgende leicht einzusehende Differentialformeln gelten:

$$\begin{aligned} (\alpha w \beta)^{(k)} &= \alpha w^{(k)}\,\beta, && \alpha, \beta \text{ konstante Quaternions;} \\ (w_1 + w_2)^{(k)} &= w_1^{(k)} + w_2^{(k)}, && \\ (w_1\,w_2)^{(k)} &= w_1^{(k)}\,w_2 + w_1\,w_2^{(k)}, && \Big(w^{(k)} = \sum_{n=0}^{2} u_n^{(k)}\,i_n\Big) \qquad (1) \\ (w^{-1})^{(k)} &= -w^{-1}\,w^{(k)}\,w^{-1}\,.\ ^{4)} && \end{aligned}$$

Daher wird:

$$\begin{aligned} \gamma \neq 0: z'^{(k)} &= (Sz)^{(k)} = (\alpha\gamma^{-1} + (\beta - \alpha\gamma^{-1}\,\delta)\,((\gamma z + \delta)^{-1})^{(k)} = \\ &= -(\beta - \alpha\gamma^{-1}\,\delta)\,(\gamma z + \delta)^{-1}\,\gamma i_k\,(\gamma z + \delta)^{-1}; \qquad (2) \\ \gamma = 0: z'^{(k)} &= (Sz)^{(k)} = (\alpha z + \beta)^{(k)}\,\delta^{-1} = \alpha i_k\,\delta^{-1}. \end{aligned}$$

---

[3]) Siehe *Hausdorff*, a. a. O. S. 48.

[4]) Siehe *Hamilton*, a. a. O. S. 570.

Daraus erkennt man, daß:

$$|z'^{(0)}| = |z'^{(1)}| = |z'^{(2)}|,$$

woraus sich die Gleichungen IIa ergeben. Da die inverse Funktion der linearen Funktionen wieder linear ist, gelten die Gleichungen IIa auch für diese, welche nichts anderes wie die Gleichungen Ia für die ursprüngliche Funktion sind.

3. *Zusammenhang mit den analytischen Funktionen einer komplexen Variablen.*

Es sei $\xi + i\eta$ eine gewöhnliche analytische Funktion der komplexen Variablen $x_0 + iy$. Dabei werde die Konstante ausgeschlossen. ω sei ein Bereich der $x_0\,y$-Ebene, in dem sie regulär sei. Dann gelten in ω die Riemann-Cauchy'schen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x_0},$$

aus denen die Existenz der beiden, den Gleichungen I. und II. entsprechenden Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0}\frac{\partial \eta}{\partial x_0} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x_0}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$ [5])

Wir setzen jetzt:

$$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad i = \frac{x_1 i_1 + x_2 i_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

wo das Vorzeichen der Quadratwurzel durch das Vorzeichen von y bestimmt ist. Der Ansatz für i ist erlaubt, da:

$$\left(\frac{x_1 i_1 + x_2 i_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right)^2 = -1$$

[5]) Aus diesen Gleichungen folgen die Riemann-Cauchy'schen, wenn noch:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \neq 0$$

vorausgesetzt wird, was der Zusatzbedingung in der obigen Definition der analytischen Quaternionenfunktion entspricht.

ist. x_0, x_1, x_2 dürfen alle diejenigen Wertetrippel durchlaufen, für die x_0, y ein Punkt von ω ist. So erhalten wir aus $\xi + \eta i$ die Quaternionenfunktion:

$$w = \xi + \frac{\eta}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (x_1 i_1 + x_2 i_2) \text{ von } z = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2,$$

deren drei u-funktionen sind:

$$u_0 = \xi, \; u_1 = \frac{\eta}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} x_1, \; u_2 = \frac{\eta}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} x_2,$$

wo in ξ und η überall für y der Wert $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ zu setzen ist.

Die so erhaltene Quaternionenfunktion w ist wegen der Riemann-Cauchy'schen Differentialgleichungen *hyperanalytisch*. Denn es ist:

$$u_0^{(0)} u_1^{(0)} + u_0^{(1)} u_1^{(1)} + u_0^{(2)} u_1^{(2)} =$$
$$= \frac{\partial \xi}{\partial x_0} \frac{\partial \eta}{\partial x_0} \frac{x_1}{y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{x_1}{y} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{x_1^2}{y^2} + \eta \frac{\partial \frac{x_1}{y}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{x_2}{y} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{x_1 x_2}{y^2} + \eta x_1 \frac{\partial \frac{1}{y}}{\partial x_2} \right) =$$
$$= \frac{x_1}{y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x_0} \left(-1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{y^2} \right) + \eta \left(\frac{1}{y} - \frac{x_1^2}{y^3} - \frac{x_2^2}{y^3} \right) \right] = 0,$$

$$u_0^{(0)} u_2^{(0)} + u_0^{(1)} u_2^{(1)} + u_0^{(2)} u_2^{(2)} =$$
$$= \frac{\partial \xi}{\partial x_0} \frac{\partial \eta}{\partial x_0} \frac{x_2}{y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{x_1}{y} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{x_1 x_2}{y^2} + \eta x_2 \frac{\partial \frac{1}{y}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{x_2}{y} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{x_2^2}{y^2} + \eta \frac{\partial \frac{x_2}{y}}{\partial x_2} \right) =$$
$$= \frac{x_2}{y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x_0} \left(-1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{y^2} \right) + \eta \left(\frac{1}{y} - \frac{x_1^2}{y^3} - \frac{x_2^2}{y^3} \right) \right] = 0.$$

Wegen:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{x_1}{y} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_0}; \quad \frac{\partial u_0}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{x_2}{y} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_0};$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{x_1 x_2}{y^2} - \eta \frac{x_1 x_2}{y^3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

folgt, daß daher auch die Gleichungen II. 1) u. 2) erfüllt sind. w befriedigt also I. 1), 2) u. II. 1), 2), dagegen im allgemeinen nicht die Gleichungen I. 0) u. II. 0). Man kann zeigen, daß dies nur dann der Fall ist, wenn $\xi + i\eta$ eine lineare Funktion mit reellen Koeffizienten ist.

Die hyperanalytische Funktion w ist rotationssymmetrisch; d. h. lassen wir die 01-Ebene um die reelle 0-Axe rotieren, so liegen die Bildpunkte jeder Lage der Ebene in derselben um die 0-Axe rotierenden Ebene. Daraus erkennt man, wie man Bereiche von w erhält. Wir setzen z. B. fest, daß x_1 stets das gleiche Vorzeichen wie y hat, und für $x_1 = 0$, x_2 dasselbe Vorzeichen wie y hat. Dann wird im allgemeinen auf der 02-Ebene (ausgenommen die 0-Axe) die Funktion w unstetig. Rotiert man der 01-Ebene von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ um die 0-Axe, so wird ω einen Raumteil bestreichen; jedes Ω, das ganz im Innern dieses Raumteiles liegt, und mit der 02-Ebene (ausgenommen die 0-Axe) keine Punkte gemein hat, ist dann Bereich von w.

Ist speziell $\xi + i\eta$ eine Funktion, die in Spiegelpunkten in Bezug auf die reelle Axe konjugiert imaginäre Werte annimmt, so sind ξ und η/y gerade Funktionen von y. Dann ist w auch auf der 02-Ebene stetig. w ist ebenfalls symmetrisch zur reellen Axe, und w geht bei der Rotation um die 0-Axe in sich über. Solche Funktionen sind alle rationalen Funktionen mit reellen Koeffizienten und alle analytischen Funktionen, die durch eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten gegeben sind. Z.B.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \,.\ ^{6})$$

Man erhält aus ihnen w, indem man einfach für z die Größe setzt: $z = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2$. Jede solche Funktion ist hyperanalytisch: z. B.

$$e^z = e^{x_0}\left(\cos\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) + \frac{\sin\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\,(x_1 i_1 + x_2 i_2)\right).$$

5. Satz: *Ist $\xi + i\eta$ eine gewöhnliche analytische Funktion der komplexen Variablen $x_0 + iy$ in ω, so erhält man eine hyperanalytische Funktion w der Quaternionenvariablen $z = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2$, wenn man in ihr $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $i = (x_1 i_1 + x_2 i_2)/y$ setzt. Der Bereich von w wird bei richtiger Festsetzung der Vorzeichen durch Rotation von ω um die reelle Axe 0 erhalten.*

6. Satz: *Setzt man in einer rationalen Funktion mit reellen Koeffizienten oder in einer konvergenten Potenzreihe mit reellen Koeffizienten für die Variable z die Größe $x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2$, so erhält man eine hyperanalytische Funktion von z.*

[6]) Siehe *Hamilton,* a. a. O. S. 545.

Setzt man in dem erhaltenen $w: x_2 = 0$, so geht die Funktion in die gegebene analytische Funktion der komplexen Variablen $x_0 + i_1 x_1$ über. Unsere Quaternionenfunktion w ist also in jeder durch die 0-Axe hindurchgehenden Ebene eine gewöhnliche analytische Funktion.

Umgekehrt entspringt jeder hyperanalytischen Funktion w, die rotationssymmetrisch in Bezug auf die 0-Axe ist, d. h. die sich in der Gestalt:

$$w = \xi + \frac{\eta}{y}(x_1 i_1 + x_2 i_2), \quad y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

darstellen läßt, wo ξ, η reelle Funktionen von x_0, y sind, und die den Gleichungen I. 1), 2) und II. 1), 2) genügt, aus einer gewöhnlichen analytischen Funktion. Denn I. 1), 2) sagen dann aus:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0}\frac{\partial \eta}{\partial x_0} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x_0}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x_0}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Da $u_0^{(0)2} + u_0^{(1)2} + u_0^{(2)2}$ nicht identisch verschwinden darf, kann man stets einen Raumteil angeben, in dem $\frac{\partial \xi}{\partial x_0}, \frac{\partial \xi}{\partial y}$ nicht null sind. Die beiden Gleichungen sagen dann aus, daß:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0} = \pm \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \mp \frac{\partial \eta}{\partial x_0}.$$

Somit ist $\xi \pm \eta i$ analytisch und erzeugt w.

4. Wir machen auf den Differentialausdruck:

$$U_{k,l}(w, z) = u_k^{(0)} u_l^{(0)} + u_k^{(1)} u_l^{(1)} + u_k^{(2)} u_l^{(2)},$$

$$w = u_0 + u_1 i_1 + u_2 i_2, \quad z = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2,$$

die lineare Substitution:

$$z' = Sz = x_0' + x_1' i_1 + x_2' i_2, \quad S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

w gehe dadurch über in $w' = u_0' + u_1' i_1 + u_2' i_2$. Dann wird:

$$U_{k,l}(w', z') = \sum_{n=0}^{2} (u_k'^{(0)} x_0^{(n)} + u_k'^{(1)} x_1^{(n)} + u_k'^{(2)} x_2^{(n)})$$
$$(u_l'^{(0)} x_0^{(n)} + u_l'^{(1)} x_1^{(n)} + u_l'^{(2)} x_2^{(n)}),$$

wo für $\frac{\partial x_m}{\partial x_n'}$ der Ausdruck $x_m^{(n)}$ gesetzt ist. Nach 2. befriedigen diese Differentialquotienten $x_m^{(n)}$ die Gleichungen I., II., I. a, II. a. Somit folgt:

$$U_{k,l}(w', z') = (x_0^{(0)2} + x_0^{(1)2} + x_0^{(2)2})\, U_{k,l}(w', z).$$

Nun ist wegen (2):

$$n(z'^{(0)}) = n(\beta\gamma - \alpha\gamma^{-1}\delta\gamma)\, n(\gamma z + \delta)^{-2}, \qquad S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

(wo für $\gamma = 0$ nur $\alpha\gamma^{-1}\delta\gamma = \alpha\delta$ zu setzen ist). Anderseits ist, wie man leicht sieht:

$$x_0^{(0)2} + x_0^{(1)2} + x_0^{(2)2} = \frac{1}{n(z'^{(0)})}.$$

Daher:

$$U_{k,l}(w', z') = \frac{n(\gamma z + \delta)^2}{n(\beta\gamma - \alpha\gamma^{-1}\delta\gamma)}\, U_{k,l}(w', z), \quad k, l = 0, 1, 2. \tag{3}$$

Macht man dagegen im Differentialausdruck:

$$V_{k,l}(w, z) = u_0^{(k)} u_0^{(l)} + u_1^{(k)} u_1^{(l)} + u_2^{(k)} u_2^{(l)}, \quad k, l = 0, 1, 2,$$

die Substitution:

$$w' = Sw = u_0' + u_1' i_1 + u_2' i_2,$$

so wird nach ganz entsprechender Rechnung:

$$V_{k,l}(w', z) = \frac{n(\beta\gamma - \alpha\gamma^{-1}\delta\gamma)}{n(\gamma w + \delta)^2}\, V_{k,l}(w, z), \quad k, l = 0, 1, 2. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt:

7. Satz: *Ist $w = f(z)$ eine analytische Quaternionenfunktion vom Typus I., so ist es auch $f(Sz)$. Ist $w = f(z)$ eine analytische Quaternionenfunktion vom Typus II., so ist es auch Sw.*

Diesen Satz kann man auch ohne weiteres geometrisch einsehen.

5. Die *singulären Gebilde* der analytischen Funktion $w = f(z)$ können einmal dort liegen, wo die u_l oder $u_l^{(k)}$ aufhören stetig oder endlich zu sein. Außerdem liegen sie an den Stellen, wo eine der Gleichungen:

$$u_l^{(0)2} + u_l^{(1)2} + u_l^{(2)2} = 0, \text{ oder } u_0^{(k)2} + u_1^{(k)2} + u_2^{(k)2} = 0,$$

erfüllt ist. Dies sind im allgemeinen Punkte, können aber auch Kurven sein, wie Beispiele zeigen.

Wir wollen annehmen, w erfülle die Gleichungen I. 0) und 2). Die inverse Funktion genügt dann II. 0) und 2). Die 1-Axe ist ausgezeichnet. Das Quadrat der Funktionaldeterminante der u in Bezug auf die x ist dann:

$$D^2 = (u_1^{(0)2} + u_1^{(1)2} + u_1^{(2)2}) \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=0}^{2} u_0^{(k)2} & \sum\limits_{k=0}^{2} u_0^{(k)} u_2^{(k)} \\ \sum\limits_{k=0}^{2} u_0^{(k)} u_2^{(k)} & \sum\limits_{k=0}^{2} u_2^{(k)2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{2} u_1^{(k)2} \right) \left((u_0^{(1)} u_2^{(2)} - u_0^{(2)} u_2^{(1)})^2 + \ldots + \ldots \right).$$

Daraus erkennt man, daß die Funktionaldeterminante nur null wird, wenn entweder:

$$u_1^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, 2;$$

oder wenn:

$$u_0^{(0)} : u_2^{(0)} = u_0^{(1)} : u_2^{(1)} = u_0^{(2)} : u_2^{(2)}$$

ist. Dies sind Punkte, in denen die beiden durch ihn hindurchgehenden Flächen:

$$u_0 = \text{konst.}, \; u_2 = \text{konst.}$$

sich berühren, oder für die die weiteren Gleichungen:

$$u_l^{(k)} = 0, \; k = 0, 1, 2,$$

für $l = 0$ oder 2 erfüllt sind.

Das Unendliche wird stets als *punktförmig* aufgefasst; und zwar mittels der Substitution $z' = z^{-1}$, für $z' = 0$. Das Verhalten von $f(z)$ für $z = \infty$ ist das Verhalten von $f(z'^{-1})$ für $z' = 0$. Wegen (3) ist auch $f(z'^{-1})$ als Funktion von z' analytisch in derselben Art wie $f(z)$ als Funktion von z.

Wir sagen, $w = f(z)$ sei in einem Punkte ihres Bereiches Ω *regulär*, wenn ihre Funktionaldeterminante D dort nicht null ist.

6. Das *Schwarz'sche Spiegelungsprinzip* kann auf die analytischen Quaternionenfunktionen vom Typus I übertragen werden, wo allerdings die Frage nach der *eindeutigen* Fortsetzbarkeit hier nicht gestellt wird. Es sei $w = f(z)$ vom Typus I., und erfülle z. B. I. 0) und 2). Für alle Punkte des Bereiches von w sei $x_1 \geqq 0$. Außerdem gehöre zu ihm eine Stück der 02-Ebene selbst. Dasselbe bestehe nur aus *regulären* Punkten. Auf diesem Stücke sei $u_1 = 0$. Dann können wir die Funktion w über dieses Stück so fortsetzen, daß sie auch weiter analytisch in gleicher Art bleibt. Dazu ordnen wir jedem Spiegelpunkt $x_0 - x_1 i_1 + x_2 i_2$ den Funktionswert:

$$f(x_0 - x_1 i_1 + x_2 i_2) = u_0 - u_1 i_1 + u_2 i_2,$$

zu, wo u_0, u_1, u_2 die den Werten x_0, x_1, x_2 des gegebenen Bereiches entsprechenden Funktionswerte sind. Wegen $u_1 = 0$ auf der 02-Ebene ist w dann in dem erweiterten Gebiete stetig. Ferner genügt es überall I. 0) und 2). Denn wenn $x_1 \rightarrow -x_1$, $u_1 \rightarrow -u_1$ übergeht, so wechseln die linken Seiten dieser Gleichungen nur das Vorzeichen. Ferner sind auch die $u_l^{(k)}$ stetig. Denn $u_0^{(0)}$, $u_0^{(2)}$, $u_2^{(0)}$, $u_2^{(2)}$ und $u_1^{(1)}$ sind an Spiegelpunkten gleich, $u_1^{(0)}$ und $u_1^{(2)}$ sind entgegengesetzt, aber auf der 02-Ebene null. Daher ist sicherlich $u_1^{(1)}$ auf der 02-Ebene nicht null, weil die Punkte regulär sind. Somit lauten die Gleichungen I. 0) und 2) auf der 02-Ebene so:

$$u_1^{(1)} u_0^{(1)} = 0, \quad u_1^{(1)} u_2^{(1)} = 0,$$

daher müssen auch $u_0^{(1)}$ und $u_2^{(1)}$, die an Spiegelpunkten entgegengesetzte Werte annehmen, auf der 02-Ebene null sein, also stetig sein.

Statt der Spiegelung über einen Teil der 02-Ebene können wir auch über eine beliebige Kugel (Ebene) spiegeln, falls u_1 auf derselben null ist. Der symmetrische Punkt ist der mittels Abbildung durch reziproke Radien erhältliche. Wegen (3) und weil die Abbildung durch reziproke Radien durch lineare Quaternionensubstitutionen gegeben wird, bleiben die Differentialgleichungen erfüllt (Die Abbildung durch reziproke Radien über die Einheitskugel wird z. B. durch $i_3 (i_3 z)^{-1}$ gegeben).[7]

[7]) Im II. Teile meiner unter [1]) genannten Arbeit werde ich das Spiegelungsverfahren wesentlich zur Herstellung analytischer automorpher Funktionen benutzen. Die dort behandelten Funktionen haben gerade die Eigenschaft, daß ihr u_1 auf den Ebenen und Kugelstücken, die den Diskontinuitätsraum der Picard'schen Gruppe abgrenzen, null sind, ebenso wie auf dessen Symmetrieebene.

7. Ist die allgemeine Quaternionenfunktion:

$$w = f(z) = \sum_{l=0}^{3} u_l i_l$$

der allgemeinen Quaternionenvariablen $z = \sum_{k=0}^{3} x_k i_k$ gegeben, so darf man die reelle 0-Axe als ausgezeichnet annehmen. Denn wäre die l-Axe ausgezeichnet, so hätte $-i_l w$ die 0-Axe ausgezeichnet. w ist dann analytisch in Ω, wenn in Ω entweder die drei Gleichungen:

I. $$u_0^{(0)} u_l^{(0)} + u_0^{(1)} u_l^{(1)} + u_0^{(2)} u_l^{(2)} + u_0^{(3)} u_l^{(3)} = 0, \quad l = 1, 2, 3,$$

oder die drei Gleichungen:

II. $$u_0^{(0)} u_0^{(l)} + u_1^{(0)} u_1^{(l)} + u_2^{(0)} u_2^{(l)} + u_3^{(0)} u_3^{(l)} = 0, \quad l = 1, 2, 3,$$

erfüllt sind, und keiner der Ausdrücke $\sum_{k=0}^{3} u_l^{(k)2}$, resp. $\sum_{l=0}^{3} u_l^{(k)2}$ identisch verschwindet. Die frühern Sätze gelten dann wieder. Ebenso kann man aus jeder gewöhnlichen analytischen Funktion $\xi + i\eta$ der komplexen Variablen $x_0 + iy$ eine hyperanalytische Funktion erzeugen, d. h. eine Funktion, die I. und II. erfüllt, wenn man:

$$i = \frac{x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3}{y}, \quad y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

setzt. Die Formeln (3) und (4) gelten entsprechend wieder.

(Eingegangen den 28. Oktober 1931)