Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 4 (1932)

Artikel: La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica.

Autor: Severi, Francesco

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5625

La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica

di FRANCESCO SEVERI, Roma

Un integrale semplice o integrale di *Picard* della prima specie sopra una superficie algebrica f, viene espresso analiticamente, per ogni scelta delle variabili indipendenti x, y, mediante un integrale operante sopra un differenziale del tipo

$$du = \int \frac{A dy - B dx}{f_z'}$$

in cui i polinomi A, B non hanno significato invariante per trasformazioni birazionali (ma soltanto covariante rispetto ai fasci di sezioni piane $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$).

Invece un integrale abeliano di 1ª specie di una curva f o un integrale doppio di 1ª specie di una superficie f, si presentano sotto le forme

$$\int \frac{\varphi dx}{f_y'}, \quad \iint \frac{\varphi \, dx \, dy}{f_z'}$$

e in ambedue i casi il polinomio φ ha significato invariante.

È possibile di collegare un integrale semplice di 1ª specie di una superficie f con un ente geometrico, di significato invariante, allo stesso modo che si collega un integrale abeliano di 1ª specie con un gruppo canonico della curva o un integrale doppio di 1ª specie con una curva canonica della superficie?

A questa domanda rispondo affermativamente nella presente Memoria [1]), provando che *un integrale semplice di 1ª specie u è pienamente caratterizzato, dal punto di vista invariantivo, dal proprio gruppo jacobiano,* sia esso costituito da un numero finito o infinito di punti. Caratterizzato, nel senso che ogni altro integrale collo stesso gruppo jacobiano differisce da u per una costante moltiplicativa e per una costante addittiva.

Chiamo *gruppo jacobiano* Γ di u il gruppo dei punti doppi delle curve $u = \text{cost.}$, cioè di quelli soli, fra i punti dove vien meno il teorema di

[1]) Della quale un sunto, limitato però ad alcune parti di essa, apparve qualche anno fa nei Rend. della R. Accademia Naz. dei Lincei, II_6, 2º sem. 1925, p. 521.

unicità e di esistenza per l'equazione differenziale $du = 0$, che hanno significato invariante. E sono veramente essi i soli punti invarianti, dove il teorema stesso cade in difetto, perchè facilmente dimostro (n. 5) che l'integrale u non può avere punti di indeterminazione (punti base del fascio delle curve trascendenti $u = \text{cost.}$).

Il gruppo Γ è pure evidentemente definito in modo *razionale*, come l'insieme di quelli, fra gli zeri simultanei delle funzioni razionali:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{B}{f_z'}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{A}{f_z'} \text{ [2]},$$

che sono invarianti. Pertanto esso consta di un numero finito di punti della superficie; oppure, se contiene infiniti punti (il che è possibile), questi sono distribuiti sopra una medesima curva canonica (pura o impura) di f, riempiendola tutta o riempiendo alcuna delle parti in cui essa eventualmente si spezzi.

È chiaro, in conseguenza, che il numero dei punti di Γ (numero *virtuale*, se Γ consta di infiniti punti) deve essere un invariante della superficie. Dimostro (n. 7) che esso uguaglia $I + 4$, ove I è l'invariante di *Zeuthen-Segre*, inerente ad f. Si tratta di un invariante relativo, cioè di un numero che resta inalterato soltanto per le trasformazioni birazionali, che non introducono curve eccezionali. E ciò è ben d'accordo col fatto che, se una trasformazione birazionale di f in f^* muta un punto P di f in una curva eccezionale P^*, questa appartiene ad una curva $u^* = \text{cost.}$, dell'integrale trasformato di u e la parte residua di tale curva incontra P^* in un punto, che comparisce ex novo nel gruppo jacobiano.

Un integrale semplice di 2ª specie di f (in particolare una funzione razionale) è caratterizzato in modo analogo con un insieme di punti invarianti, giacchè provo (n. 17) che *un integrale semplice di 2ª specie di f è individuato dal proprio gruppo jacobiano e dal proprio gruppo di indeterminazione* (individuato, nel senso solito); ed anche in tal caso questi due gruppi sono *razionalmente* determinati dall'integrale.

Proprietà analoghe si acquisiscono senza difficoltà per gli integrali abeliani (nn. 1, 4). Un integrale abeliano di 1ª specie u, sopra una curva f, è caratterizzato dal proprio gruppo jacobiano (gruppo dei punti doppi dell'involuzione trascendente $u = \text{cost.}$, il quale coincide col gruppo canonico determinato su f da u) e un integrale abeliano di 2ª specie è caratterizzato dal gruppo dei propri poli e dal proprio gruppo jacobiano. In

[2]) Le derivate coi d dritti denotano derivazioni fatte tenendo conto che z è funzione implicita di x, y definita da $f = 0$.

particolare, ciò vale per una funzione razionale; ma una siffatta funzione si può altresì caratterizzare (a meno di una sostituzione lineare fratta, a coefficienti costanti) col solo gruppo jacobiano, tranne certi casi eccezionali, nettamente specificati.

* * *

Quando un integrale semplice di 1ª specie u, della superficie f, è costante lungo le curve di genere $\varrho' \geq 0$ di un fascio irrazionale Σ, di genere $\varrho > 1$, il gruppo jacobiano di u consta di infiniti punti. Precisamente, esso è formato da un gruppo canonico di $2\varrho-2$ elementi (curve) dell'ente ∞^1 Σ, e da un gruppo di punti isolati, che sono gli $I+4-4(\varrho-1)(\varrho'-1)$ punti doppi delle curve del fascio (n. 9).

Pertanto, se il genere ϱ di Σ uguaglia l'irregolarità di f, ognuno degli integrali semplici di 1ª specie della superficie ha il proprio gruppo jacobiano costituito da infiniti punti.

Escluso questo caso, il gruppo jacobiano Γ di un integrale semplice di prima specie u della superficie, contiene soltanto $I+4$ punti (n. 18).

Il gruppo Γ, variando u, descrive su f una serie di gruppi di punti W, che chiamo la *serie canonica sopra la superficie irregolare,* per l'analogia che ha con la serie canonica di una curva o col sistema canonico di una superficie.

La serie canonica sta agli integrali semplici di 1ª specie della superficie, come il sistema canonico agli integrali doppi di 1ª specie. Si apre così un primo spiraglio di luce sul problema che da tempo s'impone nella geometria sopra una superficie e sul quale io ho riflettuto per tanti anni: quello cioè di costruire una teoria delle serie di gruppi di punti, la quale prenda posto accanto a quella, classica, dei sistemi lineari e continui di curve; e fornisca nuovi strumenti atti ad affrontare i molti vitali problemi che restano ancora insoluti in uno dei dominii più brillanti, ma anche più difficili, della moderna geometria.

Invero, imbattersi in una serie, che si presenti spontaneamente collegata cogli enti analitici, che toccano più a fondo l'aspetto funzionale delle proprietà geometriche, è una occasione fortunata per determinare gli attributi naturali con cui definire le serie da considerarsi. Perchè qui la difficoltà maggiore sta proprio nel porre bene il problema e nello scegliere, fra le possibili definizioni, quella che non conduce a costruzioni artificiali.

Orbene, le proprietà più notevoli della serie W son le seguenti:

1) Essa è *razionale,* ma non necessariamente *lineare* (per la distinzione invariantiva di questi due concetti ved. il n. 20).

2) È priva di punti fissi.
3) È involutoria.
4) Due gruppi qualunque di W sono equivalenti sopra qualche curva (irriducibile o riducibile) della superficie (*linearmente equivalenti,* come dirò in breve), e la g^1_{I+4}, che li contiene, consta di gruppi di W.
5) È generabile come luogo di una serie lineare razionalmente fissata sopra una curva mobile in un sistema lineare.

Lasciando da parte la proprietà 2), che pure è interessante ed estende la proprietà analoga della serie canonica sopra una curva, ma che non ha evidentemente nulla a che fare colla questione generale sopra posta, ho analizzato il valore ed i rapporti reciproci delle altre proprietà e così son giunto a proporre la definizione seguente delle serie di gruppi di punti che ho chiamato *serie di equivalenza:*

Una serie di gruppi di n punti, sopra una superficie f, si dice una serie di equivalenza di ordine n, quando:

a) Due gruppi qualunque della serie son linearmente equivalenti.

b) Esiste qualche g^1_n congiungente (sopra una curva irriducibile o riducibile di f) due gruppi della serie e formata da gruppi della medesima.

Dimostro che una serie di equivalenza è irriducibile e involutoria. È poi quasi evidente che ogni serie di equivalenza parziale è contenuta in una serie di equivalenza completa dello stesso ordine.

Una serie di equivalenza i cui punti non invadan tutta la superficie (e stieno per conseguenza sopra una curva della medesima) è manifestamente razionale (anzi lineare) e la chiamo perciò una *serie lineare sulla superficie*. Se invece la serie ∞^r invade tutta la superficie, la chiamo una *serie di equivalenza superficiale* [3]) ed è agevole dimostrare la sua razionalità nel caso in cui r vale 2, anzi in questo caso sussiste altresì il teorema reciproco; nel caso generale la questione resta sospesa, ma è probabile si debba concludere per la negativa. Invero, la serie risulterebbe senza dubbio razionale, se tale fosse una varietà algebrica V i cui punti son congiungibili a due a due da curve razionali, tracciate sulla varietà. Ora, per quanto non si possa escludere che la serie di equivalenza goda, in conseguenza della sua definizione, di altre proprietà, atte a particolarizzare ulteriormente la sua varietà rappresentativa, sì da renderla sempre razionale, sta il fatto che una varietà che goda della sola proprietà segna-

[3]) Vi sono anche serie di equivalenza superficiali, che sono *lineari* (nel senso del n. 20) p. es. la serie segata sopra una superficie f dello spazio ordinario dalle rette di una stella col centro esterno ad f.

lata, può essere non razionale. Tale è ad es. la varietà V_3^6, priva di punti multipli, intersezione completa in S_5 di una forma quadrica e di una forma cubica, della quale il *Fano,* in un lavoro notevole [4]), ha dimostrato l'irrazionalità. Questa V_3^6 contiene appunto curve razionali congiungenti due punti qualunque della varietà [5]); sicchè — trasportato alle varietà il concetto di serie d'equivalenza — si può dire che i suoi punti costituiscono una serie d'equivalenza di 1° ordine e dimensione 3, non razionale.

Pertanto, la questione se ogni serie d'equivalenza debba di necessità esser razionale, va certo risoluta negativamente, quando trattasi di serie di gruppi di punti sopra una varietà a più di due dimensioni.

Comunque sia, l'interesse si concentra sulle serie di equivalenza superficiali, razionali. Le chiamo le *serie principali della superficie* f e denoto con I_n^r una serie principale di ordine n e di dimensione r.

Notevoli serie razionali di equivalenza si ottengon considerando i gruppi di intersezione delle curve di due sistemi lineari tracciati sulle superficie (n. 40); esse risultano serie principali, non appena i due sistemi sieno almeno ∞^1. Le chiamo le *serie principali intersezioni complete.*

I gruppi di una serie di equivalenza possono avere punti fissi o gruppi parziali variabili sopra una curva (irriducibile o no) C ed equivalenti fra loro su C. Astraendo sia dai punti fissi, come dai suddetti gruppi variabili, si ottiene ancora una serie di equivalenza (n. 41), resto di una serie lineare rispetto ad una serie di equivalenza, cosicchè, oltre alle serie principali intersezioni complete, vi son le serie principali che diventano intersezioni complete con l'aggiunta di una serie lineare.

Il concetto di serie di equivalenza (e l'ordine della serie) diviene invariante in senso assoluto, soltanto quando si astragga dai punti fissi e dalle eventuali componenti, che sieno serie lineari (n. 42).

Il fatto capitale, per lo sviluppo della teoria delle serie principali, è dato dal teorema che *ogni serie razionale di gruppi di punti della superficie è contenuta in una serie lineare o principale dello stesso ordine* (n. 43): la dimostrazione, ancorchè ridotta alla sua più semplice espressione, è concettualmente laboriosa. Da essa traggo la transitività della relazione di equivalenza superficiale di due gruppi di un eguale numero di punti, intendendo che due gruppi sieno *superficialmente equivalenti,* quando appartengono, come gruppi totali, ad una medesima serie principale.

---

[4]) Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, t. 43, 1908).

[5]) Come già risulta dal lavoro del *Fano* e dalla rappresentazione fatta dall' *Enriques* della varietà in discorso con un' involuzione di gruppi di punti in S_3 (Rendiconti della R. Accad. Naz. dei Lincei, XXV_5, 1° sem. 1912, p. 81).

Acquisita questa proprietà, rimane aperto un ampio orizzonte e si capisce come si possa trasportare alle serie principali il « metodo rapido » che ho in passato indicato per lo sviluppo della teoria delle serie lineari, in quanto esso poggia essenzialmente sulla univocità delle operazioni di somma e di sottrazione.

Poichè ogni serie principale completa è intersezione completa o resto di una serie lineare rispetto ad una intersezione completa, la teoria delle serie principali si lega intimamente allo studio della *coppie* φ, ψ *di funzioni razionali del punto della superficie* f. Chiamato *gruppo simultaneo* di φ, ψ un gruppo dove φ, ψ assumano rispettivamente due dati livelli λ, μ, da cui si escludano gli eventuali punti di indeterminazione comuni, ed ogni gruppo di livello di una funzione razionale del punto variabile sopra una curva di f, la quale sia indipendente da λ, μ; e *ordine simultaneo* il numero dei punti di un gruppo simultaneo, l'ordine simultaneo risulta un covariante assoluto della coppia φ, ψ. Il minimo ordine simultaneo della coppia φ, ψ, un cui gruppo simultaneo possa essere assegnato ad arbitrio su f, è un *nuovo carattere della superficie,* analogo al rango di *Weierstrass* per una curva. Ma mentre il rango si riduce (a meno di un' unità) al genere della curva, il carattere cui alludo sembra essenzialmente distinto dai conosciuti. Il carattere medesimo (se è finito) si presenta nella ricerca di una relazione fra l'ordine e la dimensione di una serie principale. Di tutto ciò mi occuperò ampiamente in altra occasione.

L'opportunità e la promettente fecondità del concetto introdotto son già dimostrate dalla immediatezza colla quale, dalle più elementari proprietà inerenti al concetto, segue la razionalità di una superficie i cui gruppi di n punti formino una varietà razionale (n. 46); chè il teorema in questione viene subito così ridotto alla razionalità di una superficie contenente un sistema continuo di curve razionali segantisi a due a due; mentre la proprietà era stata dimostrata per $n = 2$ [6]) ricorrendo a teoremi più elevati di geometria sopra una superficie e sopra una varietà.

§ 1. Caratterizzazione invariantiva di un integrale abeliano

1. Innanzi di trattare l'argomento principale, esporrò talune semplici, ma interessanti osservazioni, sul modo d'individuare un integrale abeliano sopra una curva.

E mi rifarò dal caso di una funzione razionale del punto di una curva algebrica, in quanto questo caso fornisce l'orientamento opportuno. Sia

---

[6]) *Albanese*, Condizioni per la razionalità della varietà delle coppie di punti di due superficie algebriche distinte o coincidenti (Rend. della R. Accad. Naz. dei Lincei, $XXXIII_5$, 2° sem. 1924, pag. 73).

$\varphi(x, y)$ una funzione razionale del punto (x, y) d'una curva irriducibile f, la quale senza restrizioni (dal punto di vista invariante) può supporsi piana, dotata di soli nodi e in posizione generica rispetto agli assi. Sia

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

l'equazione di f. Tenuto allora conto che il gruppo degli zeri della funzione razionale $\frac{d\varphi}{dx}$ è formato dal gruppo jacobiano J di φ (gruppo dei punti doppi della g_n^1 luogo dei gruppi di livello costante di φ) e dal gruppo G' all' infinito di f, costituito da zeri doppi di $\frac{d\varphi}{dx}$, mentre il gruppo dei poli consta del gruppo jacobiano J' della funzione razionale x e dal gruppo G dei poli di φ, ciascuno dei quali è polo di 2^0 ordine per $\frac{d\varphi}{dx}$ [7]), si conclude senz' altro che, se un' altra funzione razionale $\psi(x, y)$ del punto di f ha gli stessi poli (colle stesse molteplicità) e lo stesso gruppo jacobiano di φ, la funzione razionale

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} : \frac{d\psi}{dx}$$

non si annulla mai, nè mai diviene infinita su f, onde risulta sopra la curva:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \lambda \frac{d\psi}{dx}$$

con λ costante; ossia:

$$\varphi = \lambda \psi + \mu,$$

con μ costante; sicchè coincidono le serie lineari $\varphi =$ cost., $\psi =$ cost.

Approfondiamo quand' è che i gruppi jacobiani delle φ, ψ posson coincidere senza che coincidano le funzioni stesse.

Anzitutto, le φ, ψ posson esser linearmente indipendenti, senza che sieno distinte le serie $\varphi =$ cost. $\psi =$ cost. E in questo caso è chiaro che i gruppi jacobiani delle φ, ψ coincidono. I valori assunti dalle φ, ψ in un medesimo gruppo G della g_n^1 da esse definita, al variare di G son legati da una corrispondenza (algebrica, biunivoca e perciò birazionale e perciò) proiettiva non degenere. Onde una delle φ, ψ è funzione lineare fratta dell' altra, a coefficienti a, b, c, d costanti:

7) Ved. *Severi,* Trattato di geometria algebrica (Bologna, Zanichelli, 1926) vol. I, parte I, pag. 118. Queste proprietà sono state poste nel giusto e più semplice rilievo dal *De Franchis* (Rend. del Circolo Matem. di Palermo, t. 34, 1912, p. 165).

$$\varphi = \frac{a\,\psi + b}{c\,\psi + d} \qquad (ad - bc \neq 0).\ ^{8})$$

Se invece le φ, ψ hanno lo stesso gruppo jacobiano, ma esse non definiscono la medesima g_n^1, due casi posson presentarsi: o i gruppi delle due g_1 non sono equivalenti, oppure le due g_n^1 appartengono ad una medesima g_n^r $(r > 1)$.

Nel 1º caso, i gruppi dei poli di φ, ψ figurano rispettivamente come gruppi totali di poli e di zeri di 2º ordine della funzione razionale θ, onde i doppi delle due g_n^1 appartengono ad una medesima serie g_{2n}. Ci si trova pertanto in presenza di una coppia di funzioni razionali, che provengono da una medesima funzione razionale *eccezionale* con una operazione, la quale, applicata ad una generica funzione razionale del punto di f, conduce ad una funzione irrazionale (operazione di estrazione di radice quadrata).

Nel secondo caso, supposto che la g_n^r sia semplice, la sua imagine proiettiva in S_r è una curva C di ordine n, le cui tangenti appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti. Curve siffatte sono state già completamente determinate [9]). E *B. Segre*, nella Memoria citata a piè di pagina, ha pure caratterizzato, dal punto di vista invariantivo, le g_n^r anche composte, per le quali si presenta il suddetto caso eccezionale. Se $r > 3$ e la g_n^r è semplice, l'eccezione può aversi soltanto per una g_r^r $(n = r)$ sopra una curva razionale; mentre, se $r = 3$, serie eccezionali possono aversi sopra una curva di genere e moduli arbitrarii. Ma trattasi, comunque, anche in tal caso, di serie molto particolari. Concludendo:

Una funzione razionale del punto di una curva è individuata (a meno di una costante moltiplicativa e di una addittiva) dal gruppo jacobiano e dal gruppo polare. Se si conosce invece il solo gruppo jacobiano, la funzione è generalmente determinata a meno di una sostituzione lineare fratta a coefficienti costanti (non degenere) oppure si presenta uno dei casi eccezionali sopra specificati.

Osservazione 1ª. È appena necessario di ricordare che, nel caso di una funzione razionale, l'individuazione più naturale (a meno di una costante moltiplicativa) è col gruppo dei poli e col gruppo degli zeri. Ma questo modo d'individuazione non si estende agli integrali abeliani.

---

[8]) Ved. il Trattato citato, pag. 98.

[9]) Cfr. *Gherardelli*, Un'osservazione sulle serie jacobiane di una serie lineare (Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei, VI_6, 1927, p. 286); *B. Segre*, Sulle curve algebriche le cui tangenti appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti (Memorie della R. Acc. Naz. dei Lincei, II_6, 1928, p. 578).

Se si dà il solo gruppo polare (o il solo gruppo degli zeri) la funzione può variare in un sistema lineare di funzioni dello stesso ordine.

Osservazione 2ª. Il teorema dimostrato fornisce in sostanza l'integrazione della funzione razionale $\frac{d\varphi}{dx}$, perfettamente determinata dal gruppo jacobiano di φ.

2. Passiamo ora agli effettivi integrali abeliani (trascendenti). Sia anzitutto

$$u = \int \frac{\varphi(x, y)}{f_y'} dx \tag{2}$$

un integrale abeliano di 1ª specie, appartenente alla curva f, d'ordine m e di genere p, ove φ è un'aggiunta d'ordine $m-3$. Sia inoltre t il valore di u in un punto dato di f, valore che, una volta fissata l'origine delle integrazioni, è definito a meno dei periodi.

Vi sono infiniti punti di f soddisfacenti alla condizione $u \equiv t$ (modd. periodi) (uno solo, se fosse $p = 1$). Variando il punto considerato su f, si ottengono ∞^1 gruppi di punti, costituenti un'*involuzione trascendcnte* γ: un'involuzione, nel senso che ogni punto di f appartiene ad un sol gruppo di γ.

Il gruppo jacobiano di quest' involuzione, consta dei punti al finito, che annullano $\frac{du}{dx}$, cioè dei punti del gruppo canonico staccato su f, fuori dei nodi, dall'aggiunta φ. E invero, uno (x_0, y_0) di questi punti, come zero (generalmente) semplice di $\frac{du}{dx}$, è (a meno dei periodi) zero doppio di $u(x, y) - u(x_0, y_0)$; e, viceversa, uno zero doppio (al finito) di $u(x, y) - u(x_0, y_0)$ è zero semplice per $\frac{du}{dx}$. Quanto al gruppo G' degli m punti all' infinito di f, ognuno è zero doppio per $\frac{du}{dx}$, epperò zero semplice dell' integrale $u-t$, per un conveniente t. Dunque:

Sopra una curva algebrica f di genere $p > 1$, l'equazione $u = t$, dove u sia un integrale abeliano di 1ª specie sulla curva, definisce ivi, al variare di t, i gruppi di un'involuzione trascendente, il cui gruppo jacobiano coincide col gruppo canonico corrispondente ad u.

Osservazione 1ª. Si capisce a priori, senza eseguir calcoli, che il gruppo G' non dia alcun contributo al gruppo jacobiano di γ, perchè questo gruppo è di sua natura invariante, mentre G' può cangiarsi con una trasformazione omografica. Del resto il calcolo è immediato. Quanto ai poli di $\frac{\varphi}{f_y'}$, volendo evitare il breve calcolo, basta osservare ch'essi non posson essere doppi per γ, perchè l'integrale (2) può scriversi sotto la forma

$$-\int \frac{\varphi(x, y)}{f_x'} dy,$$

cosicchè in quei poli è $\frac{du}{dy} \neq 0$, onde non può trattarsi di punti doppi per γ.

Osservazione 2ª. Nell' intorno di un punto di f, diverso dai punti del gruppo jacobiano di γ, l'equazione $u = t$ è risolubile rispetto alla x (o alla y) del punto di f, dando luogo ad una funzione olomorfa nell' intorno del valore $t = t_0$ corrispondente a quel punto [10]). Questa risoluzione non è invece possibile nell'intorno di un punto doppio di γ. Il gruppo jacobiano presentasi così come gruppo di diramazione della funzione a infiniti rami; ed in tal senso la sua considerazione può farsi risalire a *Riemann,* che ne ha profittato per contare i moduli della curva [11]).

Osservazione 3ª. Dal teorema dimostrato segue altresì la formula di *Zeuthen* per le involuzioni irrazionali sopra una curva f e la relativa interpretazione funzionale. Invero, tra f^*, f ci sia una corrispondenza $(1, \mu)$ ed f^* abbia il genere > 0. Sieno u^*, u due integrali corrispondenti di 1ª specie di f^*, f. La involuzione $u =$ cost. è composta coll' involuzione I_μ che si ha su f come imagine di f^*. Siccome i punti doppi della involuzione $u =$ cost. provengon dai trasformati dei punti doppi della $u^* =$ cost. e dai punti doppi di I_μ, ne segue il risultato ricordato. Questa dimostrazione non è sostanzialmente dissimile da una conosciuta di *Painlevé.*

3. Il gruppo jacobiano K di f basta a individuare l'integrale u, perchè per ogni gruppo canonico passa una sola aggiunta d'ordine $m-3$. Dunque:

Un integrale abeliano di 1ª specie è individuato (a meno di una costante moltiplicativa e di una additiva) dal proprio gruppo jacobiano.

4. Passiamo agli integrali abeliani di 2ª specie. Sia u un integrale siffatto (trascendente).

L'equazione $u =$ cost. (modd. periodi) dà luogo ancora ad una involuzione trascendente γ, della quale può considerarsi il gruppo jacobiano,

---

10) Si avverta che, per poter parlare della risoluzione dell' equazione $u = t$ attorno ad un punto non doppio per γ, occorre fissare, entro l'intorno, l'origine delle integrazioni e supporre che il cammino d'integrazione varii soltanto nell' intorno medesimo. Ciò non esclude che il punto possa essere (sulla riemanniana di f) di accumulazione pel gruppo $u = t$ di γ; ma due punti dell' intorno danno allora lo stesso valore di u, soltanto se per uno di essi il cammino d'integrazione esorbita dall' intorno considerato.

11) Cfr. p. es. *Picard,* Traité d'Analyse (t. II, 3 éd., 1926), p. 578.

che risulta costituito, anche in tal caso, dal gruppo degli zeri (al finito) della funzione razionale $\frac{du}{dx}$; ciò almeno quando il gruppo G' all'infinito non ha particolari legami con u; il che può sempre escludersi, facendo eventualmente precedere una generica trasformazione omografica.

Gli zeri e i poli della funzione razionale $\frac{du}{dx}$ si determinano agevolmente, per es. esprimendo u per mezzo di una combinazione lineare degli integrali elementari di 2ª specie relativi ai suoi poli e degli integrali di 1ª specie [12]). Cosi si vede che $\frac{du}{dx}$, oltre agli zeri (semplici) nei punti del gruppo jacobiano J di u, possiede zeri di secondo ordine nei punti di G' e che ha come poli del 1º ordine i punti del gruppo jacobiano J' della funzione razionale x e come poli di 2º ordine i poli di u. Donde si trae intanto la conclusione seguente, che giova raccogliere pel seguito:

Il gruppo jacobiano di un integrale abeliano di 2ª specie equivale al doppio del gruppo polare aumentato di un gruppo canonico.

Sia ora un altro integrale di 2ª specie u_0, avente lo stesso gruppo jacobiano e lo stesso gruppo polare di u. Le funzioni razionali $\frac{du}{dx}$, $\frac{du_0}{dx}$ hanno allora gli stessi poli e gli stessi zeri, onde il loro rapporto è una costante; e però risulta $u = \lambda u_0 + \mu$ (λ, μ costante). Pertanto:

Un integrale abeliano di 2ª specie è individuato (a meno di una costante moltiplicativa e di una additiva) dal gruppo jacobiano e dal gruppo polare.

Il teorema si estende agli integrali abeliani di 3ª specie. La dimostrazione è ormai ovvia. Se u, u_0 sono integrali di 3ª specie, aventi gli stessi punti singolari con le stesse composizioni (polari e logaritmiche), cioè tali che le funzioni razionali $\frac{du}{dx}$, $\frac{du_0}{dx}$ abbian lo stesso gruppo polare (colle medesime molteplicità) risulta $u = \lambda u_0 + \mu$, non appena coincidano anche i gruppi jacobiani dei due integrali.

§ 2. Gruppo jacobiano di un integrale semplice di Iª specie: Caso generale.

5. Sia ora la superficie algebrica irriducibile, d'ordine m, dotata di singolarità ordinarie (linea doppia e punti tripli) e in posizione generica rispetto agli assi (ipotesi non restrittive):

---

12) Ved. p. es. le mie Vorlesungen über algebraische Geometrie (Leipzig, Teubner, 1921), p. 261.

$$f(x, y, z) = 0.$$

Sia u un integrale semplice di 1ª specie, appartenente ad f. Le curve trascendenti $u =$ cost. forman su f un *fascio trascendente* Σ: fascio, nel senso che per un punto *generico* di f ne passa una sola. Verifichiamo che ciò vale altresì per un punto *qualunque* di f, ossia che Σ non ha punti base.

Suppongasi infatti, per assurda ipotesi, che P sia un punto base di Σ. Poichè (prese come variabili indipendenti x, y) le $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$ son funzioni razionali del punto di f, le curve $u =$ cost. risultano algebroidi nell' intorno di P su f [13]) e quindi hanno in P molteplicità di intersezione finita [14]). Pertanto una conveniente trasformazione birazionale di f fa sparire il punto base P e sulla superficie trasformata f^* si ottiene una curva eccezionale P^*, che corrisponde ad un intorno di un certo ordine di P e che è tagliata in uno o più punti *variabili* dalle curve $u^* =$ cost., omologhe delle $u =$ cost. Ora ciò è assurdo, perchè lo integrale u^* staccherebbe sulla curva P^* un effettivo integrale abeliano di 1ª specie, mentre un integrale abeliano di 1ª specie su P^*, che è una curva razionale, è necessariamente costante. Dunque:

Un integrale semplice di 1ª specie sopra una superficie f, considerato come funzione uniforme del punto variabile in un intorno quadridimensionale di un punto qualunque di f, dà sempre luogo ivi ad una funzione omolorfa, che non ha mai punti di indeterminazione.

Il risultato non fa che precisare dal punto di vista critico quanto già in sostanza si ammetteva nella teoria degli integrali semplici di 1ª specie.

6. Ciò premesso, assumasi su f un fascio lineare generico H, di curve C di genere $\pi > 0$, il quale sia generico nel senso che abbia n (≥ 0) punti base semplici e distinti; che non contenga curve spezzate, ma soltanto δ curve di genere $\pi - 1$, dotate ciascuna di un nodo; e che non abbia particolari legami col fascio Σ, di cui al n. prec.

Sopra una C, le curve di Σ staccano una involuzione trascendente γ, il cui gruppo jacobiamo consta di $2\pi - 2$ punti e varia con C, descrivendo una curva D, luogo dei contatti delle curve dei fasci H, Σ. Poichè il gruppo suddetto è razionalmente individuato su C (n. 2), la curva D è algebrica. È manifesto inoltre che essa passa semplicemente per ogni punto base del fascio H, pel gruppo G dei δ nodi delle C — che chiameremo

13) L'algebroidicità cui si allude acquista senso preciso quando, nel calcolare u, ci si limiti a considerare i cammini di integrazione che appartengono all' intorno quadridimensionale di P sulla riemanniana di f, fissando un punto del detto intorno come origine di quei cammini. Così u diviene funzione uniforme del punto ivi variabile.

14) Ved. il mio Trattato citato, pagg. 85, 89.

gruppo jacobiano del fascio H o della corrispondente funzione razionale — e pel gruppo dei punti doppi di Σ, che chiameremo *gruppo jacobiano* Γ *del fascio* Σ *o del corrispondente integrale semplice di* 1^a *specie.*

Il gruppo (C, D)[15]) risulta dunque equivalente ad un gruppo $(C, C) + (C, C')$, dove $|C'|$ è il sistema aggiunto a $|C|$. E però, in forza di uno dei miei criteri di equivalenza[16]), la curva D appartiene totalmente al sistema $|C + C'|$.

Suppongasi che il fascio H possa variare in una rete L, priva di punti base e di ∞^1 curve spezzate; ed J denoti la curva jacobiana di questa rete, curva, che come si sa, è equivalente a $2\,C + C'$. Sia H_1 un altro fascio generico di L; C_1 la curva comune ad H, H_1; D_1 la curva dei contatti dei fasci H_1, Σ.

La curva D incontra J nel gruppo G e ulteriormente in un gruppo Q. Le curve della rete L, che passan per un punto P di Q, si toccano ivi. Pertanto, attesa la definizione della D, esse toccan tutte la curva di Σ per P (curva ben determinata, perchè Σ non ha punti base). Onde P appartiene anche alla curva D_1. Ulteriormente D_1 sega J nel gruppo G_1 dei δ punti doppi delle curve di H_1. Inoltre, le curve D, D_1 incontrano C_1 nel medesimo gruppo canonico K_1, che è il gruppo jacobiano dell'integrale di 1^a specie subordinato da u su C_1.

Vediamo ora di caratterizzare le ulteriori intersezioni delle D, D_1, fuori dei gruppi K_1, Q, ad esse comuni, che già abbiamo trovato. Sia M una di queste ulteriori intersezioni. Essa non giace su J, perchè le sole intersezioni di D, D_1 sopra J appartengono a Q; nè giace su C_1, perchè le D, D_1 sopra C_1 si segano in K_1. D'altronde la curva ben determinata di Σ, che passa per M, tocca ivi le curve, pure ben determinate di H, H_1, uscenti da M, e siccome queste curve, per essere M fuori di C_1 e di J, son distinte e non si toccano, il punto M è doppio per la curva di Σ che lo contiene.

Viceversa, è chiaro che ogni punto M, appartenente al gruppo jacobiano Γ di Σ, è comune alle curve D, D_1 ed è distinto dai punti dei gruppi K_1, Q, attesa la posizione generica del fascio H rispetto a Σ.

Dunque Γ è individuato come gruppo comune alle D, D_1, fuori di K_1, Q; e consta perciò di un numero finito Δ di punti; o, se consta di infiniti punti, questi costituiscono parti comuni alle D, D_1, e però riempiono una o più curve *algebriche*. Quest' ultimo caso verrà esaminato dettagliatamente nel § 4.

---

15) Indico, secondo il solito, con (A, B) il gruppo dei punti comuni alle curve A, B e con $[A, B]$, quando occorra, il loro numero.

16) *Severi,* Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche (Annali di Matematica, XII_3, 1905), n. 6. Ved. pure un altro mio lavoro, negli Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. LXV, 1906, pagg. 629, 630.

Per ora ci limiteremo ad esaurire il caso in cui le D, D_1 sono irriducibili ed hanno in conseguenza un numero finito di punti comuni.

Poichè le D, D_1, ambedue equivalenti a $C + C'$, sono equivalenti fra loro, sopra D sussiste l'equivalenza:

$$(D_1, D) \equiv (D, D) \equiv \Gamma + Q + K_1$$

D'altronde su J sussiste la:

$$(J, D) \equiv G + Q \equiv (2C + C', C + C'),$$

dunque si ha su D:

(3) $$\Gamma \equiv G - K_1 - (C, D)$$

E siccome:

$$[\Gamma]^{17)} = \Delta,\ [G] = \delta,\ [K_1] = 2\pi - 2,\ [C, D] = n + 2\pi - 2,$$

si perviene alla *relazione numerativa fondamentale:*

$$\Delta = \delta - n - 4\pi + 4,$$

di cui la (3) fornisce l'*interpretazione funzionale.*

L'espressione $\delta - n - 4\pi$, come è ben noto, è indipendente dal fascio H considerato e coincide con l'invariante relativo I di *Zeuthen-Segre,* appartenente ad f. In conclusione le curve di Σ posseggono $I + 4$ punti doppi.

7. Aggiungiamo un' altra notevole caratterizzazione geometrica di un punto P del gruppo jacobiano Γ di Σ.

Siccome la curva di Σ che passa per P, ha ivi un punto doppio, questo assorbe due intersezioni della curva stessa con un' altra qualunque curva E di f, uscente da P; cioè il punto medesimo fa parte del gruppo jacobiano dell'integrale di 1ª specie subordinato da u sovra E, epperò (n. 2) appartiene al gruppo canonico individuato sulla curva (algebrica, irriducibile) E dall' integrale di u. Viceversa, un punto P godente di questa proprietà, qualunque sia E per P, è manifestamente doppio per l'*unica* curva di Σ, che passa per P. Riassumendo possiamo enunciare il teorema:

Il gruppo jacobiano Γ d'un integrale semplice di 1ª specie, appartenente ad una superficie il cui invariante di Zeuthen-Segre valga I, consta di $I + 4$ punti, oppure di infiniti. In questo caso (che verrà esaminato nel § 4) i punti del gruppo jacobiano riempiono una curva algebrica (irri-

17) Il simbolo $[A]$ denota il numero dei punti del gruppo A.

ducibile o no). Ognuno P dei punti di Γ è caratterizzato dalla proprietà di appartenere al gruppo canonico individuato da u sopra una qualsiasi curva algebrica di f, passante per P.

8. Il gruppo Γ apparisce già, da quanto precede, un invariante funzionale relativo, essendo legato all' invariante numerico relativo I. Rendiamoci conto direttamente della cosa.

Consideriamo all' uopo una trasformazione birazionale di f in f^*, che muti un punto P di f in una curva eccezionale P^* di f^*. Denoteremo il trasformato di un elemento qualunque — punto o curva o carattere — di f, colla lettera asteriscata, che denota l'elemento originario.

La rete L (n. 6) può supporsi scelta in modo che P sia fuori di C_1 e di J (e quindi diverso anche dai punti base di H, H_1). Allora nella rete L^* vi sono ∞^1 curve spezzate in P^* ed in una curva residua; ed in ciascuno dei fasci H^*, H_1^* vi è una di tali curve. In conseguenza le curve di contatto delle coppie di fasci H^*, Σ^*; H_1^*, Σ^*, sono le curve $D^* + P^*$, $D_1^* + P^*$ e la jacobiana della rete L^* è $J^* + P^*$.

Quanto alla curva S di Σ, che passa per P, ad essa corrisponderà una curva di Σ^*, composta da $S^* + P^*$ o da $S^* + 2P^*$, secondo che P non è od è doppio per S. Nel primo caso il numero dei punti doppi delle $u =$ cost., nel passaggio da f ad f^*, aumenta di un' unità, pel fatto che la curva $S^* + P^*$ acquista un nuovo punto doppio, che non entra del conto dei Δ punti corrispondenti a quelli di Γ; ma poichè aumenta di un' unità anche I, rimane vero che il numero dei punti doppi delle $u^* =$ cost. è $I^* + 4$. Nel secondo caso, vi è una curva di Σ^* con infiniti punti doppi distribuiti lungo P^*. Essa (come quando trattasi di un fascio algebrico) deve contarsi due volte nel numero complessivo delle curve del fascio Σ^* dotate di un punto doppio. Il numero delle curve di Σ^* con un punto doppio isolato diminuisce di un' unità, ma poichè la $S^* + 2P^*$ conta per due, così ritorna complessivamente il numero $I^* + 4$.

Osservazione. Qualora la superficie f — che è irregolare, perchè contiene integrali semplici trascendenti di 1ª specie — possedesse infinite curve eccezionali essa (a norma di un noto teorema di *Castelnuovo-Enriques)* sarebbe trasformabile in una rigata di genere $\varrho > 0$; ed allora ognuna delle $u =$ cost. verrebbe composta con infinite generatrici della rigata ed il numero dei punti doppi di curve $u =$ cost. sarebbe infinito, se fosse $\varrho > 1$, mentre non esisterebbero affatto punti del gruppo jacobiano, se fosse $\varrho = 1$. Tutto ciò deriva dal fatto che l'integrale u sarebbe costante lungo le generatrici, onde darebbe luogo ad un integrale abeliano di prima specie entro l'ente ∞^1, i cui elementi sono appunto le generatrici. Sicchè il gruppo jacobiano di u, si ridurrebbe alle curve costituenti, entro il detto ente ∞^1, il gruppo jacobiano dell' integrale abeliano u. Queste circostanze saranno lumeggiate nel § 4, sotto ipotesi anche più generali.

9. Come utile illustrazione del teorema dimostrato possiamo ritrovare l'estensione, data da *Castelnuovo-Enriques* [18]), della formula di *Zeuthen-Segre*, concernente i punti doppi delle curve di un fascio lineare.

Si tratta del numero Δ delle curve di un fascio irrazionale Φ, di genere $\varrho > 0$, dotate di un punto doppio. La via sotto indicata ha il vantaggio di fornire anche la spiegazione funzionale della formula numerativa.

Sia u uno dei ϱ integrali semplici di 1ª specie di f, che son costanti lungo le curve di Φ. La equazione $u = \text{cost.}$ determina entro Φ, concepito come ente ∞^1 di elementi (curve), un' involuzione trascendente γ; il fascio Σ delle $u = \text{cost.}$ è in tal caso *composto* col fascio Φ, nel senso che ogni curva di Σ consta di infinite curve di Φ (di una sola, se $\varrho = 1$), costituenti un gruppo di γ. Nell' involuzione vi sono (n. 2) $2\varrho - 2$ curve dotate di infiniti punti doppi. E poichè per ciascuna di queste i punti doppi son distribuiti lungo una curva di genere ϱ' (ϱ' genere delle curve di Φ), così una di dette curve conta $2\varrho' - 2$ volte nel gruppo delle curve di Σ con un punto doppio [19]). Pertanto il numero Δ delle curve di Φ con un punto doppio isolato viene espresso da:

$$\Delta = I + 4 - 4(\rho - 1)(\rho' - 1).$$

§ 3. Deduzione del teorema fondamentale dalla condizione di integrabilità.

10. Il teorema fondamentale dimostrato nel n. 7 può altresì conseguirsi a partire dall' identità

$$A f_x' + B f_y' + C f_z' = N f, \tag{4}$$

che lega una terna A, B, C di aggiunte *associate* di ordine $m - 2$ [20]), relative ad un integrale semplice di 1ª specie

---

[18]) Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche (Annali di Matematica, VI_3, 1900); n. 6.

[19]) Come si riconosce subito considerando la curva dei contatti del fascio con un generico fascio lineare.

[20]) Ved. *Severi*, Sugl'integrali algebrici semplici e doppi (Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei, VII_6, 1º sem. 1928), pagg. 3, 9, 101, 161; Sulla condizione d'integrabilità pei differenziali esatti di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica e sui differenziali semiesatti (Atti del Congresso Internazionale dei Matematici in Bologna, IV, 1928), pag. 69.

$$(5) \qquad u = \int \frac{A\,dy - B\,dx}{f_z'} = \int \frac{B\,dz - C\,dy}{f_x'} = \int \frac{C\,dx - A\,dz}{f_y'}$$

appartenente ad f.

Sieno $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ le curve sezioni di f colle A, B, C fuori della linea doppia; sicchè queste curve appartengono al sistema $|E + E'|$, ove E sia una sezione piana di f ed $|E'|$ il sistema aggiunto ad $|E|$.

Le $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ passan rispettivamente pei punti base dei fasci $x =$ cost., $y =$ cost., $z =$ cost., e segano sulla curva all' infinito di f, comune ai tre fasci, lo stesso gruppo canonico K_1. Le $\overline{A}, \overline{B}$ (che fanno ora le veci delle D, D_1 del n. 6) incontrano la curva J, sezione di f, fuori della linea doppia, con $f_z' = 0$ (curva jacobiana della rete di sezioni piane parallele all' asse z) rispettivamente nel gruppo dei punti doppi staccati (fuori della linea doppia) delle curve $x =$ cost. e nel gruppo dei punti analoghi per le $y =$ cost. Dico che le ulteriori intersezioni di $\overline{A}, \overline{B}$ con J coincidono in un medesimo gruppo Q. Invero, dalla (4) segue che i punti

$$A = f = f_z' = 0, \quad f_y' \neq 0,$$

stanno su $\overline{B}$; e similmente, ruotando le lettere.

Proviamo infine che le $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ si segano, fuori delle jacobiane delle reti di sezioni parallele agli assi x, y, z e del gruppo all' infinito K_1, in un medesimo gruppo Γ di punti. Infatti dalla (4) si trae che i punti

$$A = B = f = 0, \quad f_z' \neq 0$$

stanno su C. E similmente, ruotando le lettere.

Il calcolo del numero Δ dei punti di Γ, qualora questo numero non sia infinito, si può, dopo ciò, condurre come nel n. 6, e si ritrova che $\Delta = I + 4$. Se Γ contiene infiniti punti questi son sopra una curva algebrica (irriducibile o no) comune alle $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$.

Si tratta ora, per concludere col teorema fondamentale, di legare in modo covariante i punti di Γ all' integrale u. Prendendo per u la prima delle espressioni (5), si ha:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{B}{f_z'}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{A}{f_z'},$$

onde in ogni punto di Γ si annullano $\dfrac{du}{dx}, \dfrac{du}{dy}$.

Viceversa, un punto dove si annullino queste due derivate, se non è un punto di Γ, è (eventualmente) un punto della linea doppia di f o un punto della curva all' infinito di f o un punto del gruppo Q sopra definito. Però i punti doppi delle $u = $ cost. non posson che appartenere che a Γ, perchè essi soli son covarianti di u, rispetto alle trasformazioni birazionali senza eccezioni di f; mentre invece i punti delle tre ultime categorie non hanno significato invariante. Ciò è senz' altro chiaro pei punti all' infinito che si posson portare al finito con una trasformazione omografica. E neppure i punti della linea doppia posson essere doppi per curve $u = $ cost. Invero, in ciascuno di essi il rapporto $\frac{A}{B}$ ha un valore determinato, perchè la linea doppia non contiene punti base del fascio $\frac{A}{B} = $ cost., che è individuato dalle $\bar{A}$, $\bar{B}$. In conseguenza l'equazione differenziale

$$A\,dy - B\,dx = 0, \tag{6}$$

considerata su f, fornisce in ognuno dei punti della linea doppia, sopra ciascuna delle due falde, un valore determinato e finito per uno almeno dei rapporti $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dy}$; sicchè il teorema di unicità e di esistenza relativo alla (6) ci assicura che per quel punto, in quanto origine della falda considerata, passa uno ed un sol ramo di una linea integrale dell'equazione (6).

Neppure i punti del gruppo Q possono esser doppi per curve $u = $ cost., perchè in essi è $C \neq 0$, epperò, nell' intorno di ogni punto di Q, la (6) può sostituirsi con l'equazione differenziale equivalente

$$B\,dz - C\,dy = 0,$$

che fornisce in ogni punto di Q un valore determinato e finito pel rapporto $\frac{dy}{dz}$.

Che infine ogni punto di Γ sia doppio per la curva $u = $ cost. che passa per esso, risulta da ciò: che nell' intorno di un punto M di Γ, sopra la riemanniana di f (qualora si scelga in questo intorno tanto l'origine fissa che il cammino variabile di integrazione) u è funzione olomorfa, insieme alle $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$. Onde l'annullarsi in M di queste due derivate esprime appunto la condizione necessaria e sufficiente perchè la predetta $u = $ cost. abbia in M un punto doppio. La conclusione è di nuovo quella enunciata dal teorema fondamentale, che abbiamo creduto opportuno acquisire per questa via, sostanzialmente equivalente alla precedente, soltanto perchè essa potrà riuscire meglio accetta ad un lettore, che abbia minor familiarità coi procedimenti d'indole quasi esclusivamente sintetica.

Di più si vede, per la via ora seguita, che i punti del gruppo jacobiano dell'integrale semplice di 1ª specie (5) son quelli che soddisfanno alle condizioni:

$$A = B = C = f = 0, \quad f_z' \neq 0 \; (f_x' \neq 0, \; f_y' \neq 0).$$

Osservazione. Si noterà che nella deduzione ultimamente svolta del teorema fondamentale non si è usufruito delle due relazioni, che traducono con *Picard*, la condizione di integrabilità per gli integrali semplici di 1ª specie, e cioè della (4) e della

$$N = A_x' + B_y' + C_z',$$

ma soltanto della prima di esse. Ciò è ben d'accordo col fatto da me affermato più volte, fin dal 1908 ed acquisito ormai definitivamente attraverso ad un geniale lavoro di *W. V. D. Hodge* [21]), che la ultima relazione è una conseguenza algebrica della (4).

§ 4. Il gruppo jacobiano di un integrale semplice di Iª specie nel caso che contenga infiniti punti.

11. Dobbiamo ora approfondire il caso, lasciato in disparte, in cui le $u =$ cost. hanno infiniti punti doppi. A questo scopo conviene premettere due lemmi, che risultano in modo più o meno esplicito da precedenti lavori miei, ma che riproduco qui, per comodità del lettore, sotto la forma estesa che ora ci occorre. Il primo è questo:

a) Un integrale semplice di prima specie u della f, il quale sia costante lungo una particolare curva (totale) C_0 di un fascio Φ, razionale o irrazionale, è costante lungo ogni altra curva C del fascio.

Il lemma è senz' altro vero quando l'irregolarità q di f uguaglia il genere ϱ di Φ perchè allora ogni integrale semplice di 1ª specie di f è costante lungo le curve C. Se invece $\varrho < q$, si può costruire, nel modo che ho altrove indicato [22]), la varietà di *Picard* V_q inerente ad f, ottenendosi ivi una superficie f^*, d'irregolarità q, di cui f è trasformata razionale (ed eventualmente birazionale). Poichè C è variabile, come curva totale, in un

---

[21]) On multiple integrals attached to an algebraic variety (Journal of the London math. Society, V, 1930), p. 283. Cfr. pure in proposito una Nota di *G. de Rham* in questi Commentarii, III, 1931, pag. 151 e due Note, una, di *E. Kähler* ed una mia, nei Rend. del Circolo Matematico di Palermo LVI, 1932.

[22]) Relazioni tra gli integrali semplici e gli integrali multipli di 1ª specie di una varietà algebrica (Annali di Matematica, XX_3, 1912), pag. 201.

sistema continuo, la C avrà per immagine su f^* una C^* variabile in un sistema continuo [23]), e sopra una particolare C^*, e sia C_0^*, corrispondente a C_0, sarà costante l'integrale u^*, che, mediante la trasformazione razionale da f^* ad f, si muta in u.

Ora u^* è subordinato su f^* da un integrale semplice di 1ª specie U di V_q il quale risulta così costante lungo C_0^*. Tanto basta [24]) per affermare che, se U non riducesi a costante, le varietà $U = \text{cost.}$ son composte mediante varietà algebriche (di dimensione ≤ 1) di un sistema di indice 1. Ogni curva C^* appartiene ad una di queste varietà. Pertanto u_0^* è costante su tutte le C^*, ed il sistema continuo di queste curve è necessariamente un fascio. In conseguenza u risulta costante sulle C.

Si avvertirà che, *se Φ è lineare, l'integrale u riducesi addirittura ad una costante.* Ciò è evidente, quando Φ ha un punto base. In ogni caso, anche se Φ è privo di punti base, mentre C descrive con continuità il fascio, il valore assunto da u su C non può che restare invariato, se no u darebbe luogo ad un integrale abeliano di 1ª specie non costante sopra un ente razionale.

Il secondo lemma è questo:

b) Un effettivo integrale semplice di 1ª specie u di f non può esser costante lungo una particolare curva C_0, se questa non è isolata o al più capace di variare, come curva totale, in un fascio irrazionale [25]).

Se C_0 è suscettibile di variare, come curva totale connessa (anche riducibile) in un sistema continuo di grado > 0, ogni ciclo lineare di f è riducibile per deformazione continua ad un ciclo di C_0 [26]). Ne deriva che u ha i suoi periodi nulli lungo ogni ciclo lineare di f, il che contrasta coll'ipotesi che si tratti di un effettivo integrale. Dunque C_0 è isolata oppure è curva totale di un fascio di grado zero. Questo fascio, pel lemma *a*), non può esser lineare.

12. Supponiamo ora che esista su f una curva (algebrica irriducibile) D, luogo di punti doppi per le curve $u = \text{cost.}$ L'integrale non potrà che esser costante su D; chè, in caso contrario, le $u = \text{cost.}$ staccherebbero su D un involuzione trascendente γ, la quale possiederebbe infiniti punti doppi;

---

[23]) Che sarà un fascio, nel caso in cui Φ sia composto coll' involuzione esistente su f, come imagine di f^*: il che accade effettivamente, come risulta a posteriori.

[24]) *Castelnuovo,* Sugl'integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare (Rend. della R. Accad. Naz. dei Lincei, XIV_5, 1905, pag. 597).

[25]) Ved. il n. 2 della mia Memoria, Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard (Rend. del Circolo mat. di Palermo, XXI, 1906).

[26]) Come è appunto dimostrato nella mia Memoria ultimamente citata e come ha provato posteriormente il *Lefschetz* con dirette considerazioni topologiche.

mentre sappiamo (n. 2) che i punti doppi di una involuzione come γ son sempre in numero finito. Del resto che u debba esser costante sopra D, risulta anche da ciò: che ogni curva luogo di punti doppi appartiene (n. 10) alle aggiunte A, B e quindi, attesa l'espressione (5) di u, lungo una curva siffatta è $du = 0$.

Applicando il lemma *b*), si conclude che D è isolata o variabile in un fascio irrazionale.

Posson ora presentarsi due casi:

1) Esiste un altro integrale semplice di 1ª specie u_0 di f, funzionalmente dipendente da u.

2) Ogni altro integrale semplice di 1ª specie e sia p. es.

$$u_0 = \int \frac{A_0\,dy - B_0\,dx}{f'_z} \tag{7}$$

è funzionalmente indipendente da u.

Nel caso 1), secondo un noto teorema di *De Franchis* [27]), la superficie possiede un fascio irrazionale Φ di genere $\varrho \leq q$, ove q è l'irregolarità di f. In questo caso vi sono ϱ integrali semplici di 1ª specie indipendenti costanti lungo le curve di Φ; ed ognuno, u, di questi integrali dà luogo ad un integrale abeliano di 1ª specie del fascio, considerato come ente ∞^1. Le curve $u = \text{cost.}$ son composte coi gruppi dell'involuzione γ definita entro al fascio dal detto integrale abeliano e i punti doppi delle $u = \text{cost.}$ — all'infuori dei Δ che cadon nei punti doppi delle curve di Φ — riempiono le $2\varrho - 2$ curve del gruppo jacobiano di γ (che è poi un qualunque gruppo canonico di Φ). Queste $2\varrho - 2$ curve vengono a mancare se $\varrho = 1$, il che accade sempre quando sia $q = 1$. Allora le $u = \text{cost.}$ son le curve algebriche di un fascio ellittico e il gruppo jacobiano di u consta di un numero finito, $I + 4$, di punti, provenienti dalle curve di Φ dotate di punto doppio (n. 9); a meno che — come può benissimo avvenire — non accada che il fascio contenga qualche curva con componenti multiple.

Esaminiamo il caso 2), che si può presentare soltanto quando il genere geometrico p_g di f è > 0. Sussiste su f, fra le A, B, A_0, B_0 inerenti agli integrali u, u_0, l'*identità di Picard:*

$$A B_0 - A_0 B = \varphi f'_z \tag{8}$$

dove φ è una conveniente aggiunta d'ordine $m - 4$.

27) Sulle superficie algebriche, le quali contengono un fascio irrazionale di curve (Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, XX, 1905), pag. 49.

Detti Σ, Σ_0 i fasci $u = \text{cost.}$, $u_0 = \text{cost.}$, la curva K luogo dei contatti delle loro curve soddisfa all'equazione

$$\frac{d(u, u_0)}{d(x, y)} \equiv \frac{du}{dx}\frac{du_0}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{du_0}{dx} = \frac{\varphi}{f_z'} = 0.$$

Ora la curva K è un ente covariante simultaneo dei due integrali, e quindi, essa non può, attesa la generica scelta degli assi, nè contenere la curva all'infinito di f, nè la linea doppia, nè la sezione di f con $f_z' = 0$, fuori della linea doppia, perchè nessuna di queste curve ha significato invariante rispetto ai due integrali. Pertanto K *non è che la curva canonica (eventualmente impura, cioè contenente, come componenti, le eventuali curve eccezionali, di* 1ª *specie, della* f*) staccata su* f*, fuori della linea doppia, dalla* φ.

Ne deriva che il luogo dei punti doppi delle curve $u = \text{cost.}$ si distribuisce in una o più componenti della K, tra le quali vi può essere qualcuna delle eventuali componenti eccezionali di K, perchè abbiamo già visto (n. 8) che una curva eccezionale può effettivamente esser luogo di punti doppi per le $u = \text{cost.}$ Riassumendo:

Se il gruppo jacobiano Γ *d'un integrale semplice di* 1ª *specie d'una superficie* f *d'irregolarità* $q > 0$ *consta d'infiniti punti, o questi, a prescinder da un numero finito di punti isolati, son distribuiti sopra* $2\varrho - 2$ *curve di un fascio irrazionale di genere* ϱ $(1 \leq \varrho \leq q)$ *formanti entro al fascio, per* $\varrho > 1$ *un gruppo canonico o costituenti, per* $\varrho = 1$*, le eventuali componenti multiple di curve del fascio; oppure i punti di* Γ *riempiono una o più curve isolate, che sono eccezionali o son parti di una curva canonica di* f.

Resterebbe da accertare se effettivamente, all'infuori del caso ovvio di componenti eccezionali, le componenti del luogo dei punti doppi delle $u = \text{cost.}$ possano esser curve isolate (cioè non variabili in sistemi continui). Lasciamo in disparte la questione, non essenziale pel nostro scopo immediato.

§ 5. Individuazione di un integrale semplice di Iª specie mediante il proprio gruppo jacobiano.

13. Il gruppo jacobiano d'un integrale semplice di 1ª specie u della f, è analogo al gruppo jacobiano d'un integrale abeliano di 1ª specie sopra una curva. E siccome un tale integrale è individuato (nel senso solito) dal proprio gruppo jacobiano, nasce il problema se di una simile proprietà goda il gruppo jacobiano di u.

Sieno u, u_0, due integrali semplici di 1ª specie (5), (7), i quali abbiano lo stesso gruppo jacobiano Γ.

Il caso in cui u, u_0, son funzionalmente dipendenti si esaurisce facilmente. Invero, allora u, u_0 son costanti lungo le curve di uno stesso fascio irrazionale Φ. Se questo è di genere 1, u, u_0, risultano senz'altro linearmente dipendenti; se è di genere $\varrho > 1$, si hanno su Φ, come ente ∞^1, due integrali abeliani di 1ª specie collo stesso gruppo jacobiano. Epperò (n. 3) u, u_0 son linearmente dipendenti come integrali abeliani e quindi anche come integrali di *Picard*.

Supponiamo dunque che u, u_0 sieno funzionalmente indipendenti. In tal caso (n. 12) la curva K luogo dei contatti delle $u = \text{cost.}$, $u_0 = \text{cost.}$, può essere irriducibile o no. Se f è priva di curve eccezionali (come si può sempre supporre senza restrizione, trattandosi di una superficie che possiede integrali funzionalmente indipendenti e che non è perciò equivalente ad una rigata), in generale accadrà che K sia irriducibile e variabile in un sistema continuo di grado > 0. Basta anzi, per l'argomentazione successiva, supporre che fra le componenti di K ve ne sia una almeno, H, variabile in un sistema continuo di grado > 0.

Sulla H nessuno degli integrali u, u_0 può esser costante, in virtù del lemma *b*) del n. 11. Perciò i fasci $u = \text{cost.}$, $u_0 = \text{cost.}$ segano su H due involuzioni γ, γ_0, i cui gruppi, come subito si riconosce, son formati dai punti (necessariamente in numero finito; ved. il principio del n. 12) che il gruppo Γ possiede sopra H [28]) e dai punti di H dove si osculano le $u = \text{cost.}$, $u_0 = \text{cost.}$ Pertanto i gruppi jacobiani di γ, γ_0 coincidono e quindi (n. 3) sopra H risulta $u = \lambda u_0 + \mu$ (λ, μ costanti). Ciò significa che l'integrale $u - \lambda u_0$ è costante su H e perciò dovunque (n. 11). Resta così dimostrato, nel caso generale, che gl' integrali u, u_0 aventi lo stesso gruppo jacobiano, son linearmente dipendenti.

Rimane da esaminare l'ipotesi che ogni componente di K sia isolata o appartenga ad un fascio irrazionale. Quest' esame verrà esposto nei nn. successivi.

14. Se l'irregolarità q di f vale 1, il teorema che abbiamo in vista è evidente, perchè f possiede un solo integrale semplice di 1ª specie, determinato a meno di una costante moltiplicativa e di una additiva.

Se $q \geq 2$, potremo supporre che f non sia birazionalmente equivalente ad una rigata, giacchè gl' integrali sarebbero a due a due funzionalmente

---

[28]) Però, mentre per due integrali u, u_0 generici, non aventi lo stesso gruppo jacobiano, i punti dei loro gruppi jacobiani son semplici per K, nel caso in cui i due gruppi jacobiani abbiano un punto comune, questo risulta doppio per K.

dipendenti e questo caso è esaurito [n. 12, 1)]. Pertanto f potrà supporsi liberata dalle curve eccezionali e di genere $p_g \geq 1$.

Per $q = 2$, $p_g = 1$ può darsi che la curva canonica di f sia d'ordine zero. Allora [29]) f è una superficie di *Picard*, per la quale $I = -4$. Le $u =$ cost. non hanno punti doppi, come risulta subito dal fatto che la superficie è iperellittica, e, nell' attuale ordine d'idee, dal fatto $I + 4 = 0$. Pertanto, nel caso di una superficie di *Picard*, il teorema che abbiamo in vista non ha ragione di esser considerato.

Se $q = 2, p_g \geq 1$ e la curva canonica, per $p_g = 1$, è d'ordine > 0, la f, qualora non contenga un fascio di genere 2 [caso già esaurito; n. 12, 1)] può rappresentarsi sopra una superficie di *Picard* multipla f^* [30]), sicchè i due integrali u, u_0 di f sono i trasformati degl' integrali u^*, $u_0{}^*$ di f^*, mediante la sostituzione razionale da f^* a f. Le $u =$ cost., $u_0 =$ cost. son le trasformate delle $u^* =$ cost., $u_0{}^* =$ cost., e siccome le curve delle due ultime famiglie non hanno punti doppi, i punti doppi delle $u =$ cost., $u_0 =$ cost. provengono dai contatti rispettivi delle $u^* =$ cost., $u_0 =$ cost. colla curva di diramazione K^*, esistente su f^*. Pertanto, se u, u_0 hanno lo stesso gruppo jacobiano, di un numero finito o infinito di punti, le $u^* =$ cost., $u_0{}^* =$ cost. toccano K^*, negli stessi punti. Ma sopra una superficie di *Picard*, come la f^*, le $u^* =$ cost., $u_0{}^* =$ cost. non posson toccarsi, perchè un loro punto di contatto apparterrebbe alla curva canonica di f^*, che è invece di ordine zero, dunque o le curve $u =$ cost, $u_0 =$ cost. non hanno punti doppi (caso in cui manca K ed f è essa medesima una superficie di *Picard*), oppure si cade in un assurdo. Dunque i due integrali indipendenti u, u_0 non possono avere lo stesso gruppo jacobiano e il teorema è, nel caso in esame, dimostrato.

15. In forza di quanto precede, potremo ora supporre $q \geq 3, p_g \geq 2$. Se, invero, fosse $p_g < 2$, il genere aritmetico p_a di f risulterebbe minore di -1 e quindi, per un teorema di *Castelnuovo* [31]), f sarebbe riferibile ad una rigata.

Essendo $p_g \geq 2$, il sistema canonico di f (che si può sempre supporre liberata dalle curve eccezionali) è almeno ∞^1 e quindi la curva canonica K luogo dei contatti delle curve dei fasci Σ ($u =$ cost.), Σ_0 ($u_0 =$ cost.), relativi a due integrali semplici u, u_0, funzionalmente indipendenti, è

---

29) Cfr. *Severi*, Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo permutabile a due parametri di trasformazioni birazionali (Atti del R. Ist. Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. LXVII, 1907), p. 409.

30) Ved. la mia Nota ultimamente citata e quella citata in 22).

31) Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo (Rend. del Circolo Matematico di Palermo, XX, 1905), p. 55.

suscettibile di variare per lo meno in un fascio lineare. Epperò vi è in essa una sola componente capace di variare in un sistema lineare infinito irriducibile, oppure la parte variabile consta di una o più componenti mobili in un medesimo fascio.

Sia K_1 una parte (connessa) di K, suscettibile di variare con continuità, e suppongasi, se è possibile, che gl' integrali u, u_0 abbian lo stesso gruppo jacobiano Γ. Se K_1 appartiene a Γ, su essa son costanti u, u_0 (principio del n. 12) epperò (n. 11) K_1 non può che variare in un fascio irrazionale. Ma neppur questo è possibile, perchè (nn. 11, 12) u, u_0 risulterebbero funzionalmente dipendenti, contro il supposto.

Se K_1 non appartiene a Γ, ma sovr' essa è costante u, vi è costante anche u_0, perchè le curve $u_0 = \text{cost.}$ non hanno inviluppo. E si ricade di nuovo nella precedente conclusione assurda. Perciò K_1 non fa parte di Γ, nè u, u_0 son costanti su K_1.

In conseguenza le $u = \text{cost.}$, $u_0 = \text{cost.}$ determinano su K_1 due involuzioni γ, γ_0 aventi lo stesso gruppo jacobiano (n. 13). Ne deriva che una combinazione lineare $u - \lambda u_0$ di u, u_0 è costante su K_1; e siccome u, u_0 son funzionalmente, e quindi linearmente, indipendenti, K_1 non può che variare in un fascio irrazionale. Se, dunque, il sistema canonico di f non è composto con un fascio irrazionale, si cade in un assurdo.

Rimarrebbe da mostrare che l'ipotesi dell'indipendenza degl'integrali u, u_0, aventi lo stesso gruppo jacobiano, è assurda, anche se il sistema canonico di f è composto con un fascio irrazionale. Non avendo potuto evitare, per giungere a questa conclusione, un'ulteriore analisi, lunga e fastidiosa, arresto qui l'esame, già abbastanza minuto, della questione. Le argomentazioni finora svolte parmi invero possano indurre ad accettare in ogni caso la conclusione che:

Un integrale semplice di 1ª specie u, appartenente ad una superficie è individuato dal proprio gruppo jacobiano, sia esso formato da un numero finito o infinito di punti; individuato nel senso che ogni altro integrale collo stesso gruppo jacobiano è linearmente dipendente da u.

Resta eventualmente escluso — lo ripetiamo — il caso in cui, essendo $q \geq 3, p_g \geq 2$, il sistema canonico (o meglio la parte mobile della sua curva generica) sia composto con un fascio irrazionale; nel qual caso abbiamo soltanto dimostrato che, dati due integrali u, u_0, aventi lo stesso gruppo jacobiano, una loro combinazione lineare conveniente è costante lungo le curve del fascio.

§ 6. Individuazione di un integrale semplice di 2ª specie mediante il gruppo jacobiano ed il gruppo d'indeterminazione.

16. Il teorema precedente può estendersi agl'integrali semplici di 2ª specie della superficie f: in particolare alle funzioni razionali. La precisazione di tutte le circostanze, che si possono anche qui presentare, ci condurrebbe ad un esame dettagliato, che, nelle presenti circostanze, escludiamo dal nostro quadro, limitandoci a risolvere la questione sotto ipotesi verificate, sopra ogni superficie, da un generico integrale semplice di 2ª specie.

Cominciamo da una funzione razionale φ del punto della superficie. È interessante ed opportuno premettere *la determinazione degli zeri e dei poli della funzione razionale* $\frac{d\varphi}{dx}$.

Effettuando il calcolo, o, più rapidamente, ricorrendo alla caratterizzazione (ricordata nel n. 1) della $\frac{d\varphi}{dx}$, considerata sopra una curva della superficie, tenuto conto del più elementare de'miei criteri di equivalenza [32]), si trova agevolmente che la curva zero di $\frac{d\varphi}{dx}$ consta della curva D dei contatti delle $\varphi = \text{cost.}$ colle $y = \text{cost.}$ e della curva all' infinito M di f, ambedue luoghi di zeri di 1º ordine; e che la curva polare consta della jacobiana J della rete delle sezioni piane parallele all'asse z e della curva polare di φ: quest'ultima luogo di poli di 2º ordine, mentre J è luogo di poli di 1º ordine.

La ragione per la quale sulla curva sezione di un piano $y = \text{cost.}$ la $\frac{d\varphi}{dx}$ ha uno zero di 2º ordine in ogni punto all'infinito, invece di uno zero semplice, è che per quel punto passano le curve D, M dove si annulla $\frac{d\varphi}{dx}$.

Sia ψ un'altra funzione razionale del punto di f. Sulla curva T dei contatti delle curve A, B dei fasci $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}$, il gruppo jacobiano della serie lineare g staccata dalle A, fuori dei punti base (per cui T passa) consta del gruppo jacobiano di φ e del gruppo O dei punti dove si osculano le curve dei due fasci; gruppo che resta immutato, se ci si riferisce invece alla serie g' staccata su T dalle B. Pertanto, se le φ, ψ hanno lo stesso gruppo jacobiano (che risulta in tal caso formato da punti doppi di T), anche le serie g, g' hanno lo stesso gruppo jacobiano, epperò coincidono o i loro doppi son costituiti da gruppi equivalenti (n. 1).

[32]) Ved. la citazione [16]).

Aggiungiamo ora l'ipotesi che coincidano anche i gruppi base dei due fasci, cioè i punti d'indeterminazione delle φ, ψ (sicchè T passa doppiamente anche per questi punti base). In tale ipotesi le curve $2A$, $2B$ staccano complessivamente su T gruppi equivalenti, formati dal gruppo base comune, considerato sopra T, e da gruppi equivalenti al doppio di quelli delle serie g, g'.

E siccome [33])

$$T \equiv A + A' + 2B,$$

ove $|A'|$ è il sistema aggiunto ad $|A|$, qualora il fascio $\varphi = \text{cost.}$ non coincida col fascio $\psi = \text{cost.}$, la T è di certo suscettibile di variare in un sistema lineare almeno ∞^2 (e quindi di grado >0); onde si conclude, pel più volte ricordato criterio di equivalenza, che

$$2A \equiv 2B.$$

Ma da questa relazione segue alla sua volta che i gradi di A, B son ambedue uguali al numero $[A, B]$ dei punti comuni alle A, B; sicchè le A, B non s'incontrano fuori del gruppo base comune, epperò i fasci $\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}$ coincidono, contro l'ipotesi. Si conclude (ved. n. 1) che:

Una funzione razionale qualunque del punto di una superficie è individuata, a meno di una sostituzione lineare fratta non degenere, a coefficienti costanti, dal gruppo jacobiano e dal gruppo d'indeterminazione.

17. Passiamo ad un integrale semplice di 2ª specie u. Convien premettere il richiamo del concetto di *funzione razionale residua* θ[34]), determinata da un integrale semplice di 2ª specie u sopra la propria curva polare. Ci riferiremo al caso generale in cui la curva polare C è irriducibile, priva di punti multipli e variabile in un sistema lineare infinito regolare $|C|$, e l'integrale u diviene, lungo essa, infinito di 1º ordine. A questo caso ci si può sempre ridurre, sopra ogni superficie, sottraendo dall'integrale una conveniente funzione razionale[35]).

Sulla C il gruppo dei poli della funzione residua θ dipende dalla C e dalla scelta delle variabili, ma non dall'integrale; e il gruppo degli zeri dipende in parte dalla sola scelta di C e delle variabili e non dell'integrale, e nella parte restante dall'integrale e non dalla scelta delle variabili. I

---

[33]) *Severi,* Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà (Atti del R. Ist. Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, LXV, 1906) p. 629.

[34]) *Severi,* Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2ª specie (Rend. della R. Acc. dei Lincei XIII_5, 1904, pag. 253; Mathematische Annalen, Bd. LXI, 1905, p. 20, § 1).

[35]) Ved. la mia Memoria ultimamente citata, n. 12. Ved. pure in proposito una Memoria di *H. W. E. Jung,* nel J. für Math. 1931, ove il teorema cui si allude vien ritrovato dal punto di vista della teoria aritmetica degl'ideali.

punti di quest'ultimo gruppo G di zeri di θ son caratterizzati dalla proprietà che, sopra una curva generica E di f, uscente da uno di essi, l'integrale abeliano di 2ª specie subordinato da u non è più infinito, ma ha ivi un punto di olomorfismo. Insomma G è costituito dai *punti d'indeterminazione dell'integrale semplice di 2ª specie u*, cioè dai punti base del fascio $u = \text{cost.}$

Nella mia ricordata Memoria del 1905 dimostrai che G è un *gruppo caratteristico* di C, segato su C da una curva conveniente infinitamente vicina entro il sistema continuo $\{C\}$, cui C appartiene come curva totale. E se G è segato da una curva del sistema lineare $|C|$ individuato da C, allora e soltanto allora, u riducesi ad un integrale semplice di 1ª specie (in particolare ad una costante) a meno di una funzione razionale additiva, che ha C come curva polare di 1º ordine.

Il gruppo jacobiano Γ di u è ancora il gruppo di quelli fra i punti di f dove si annullano simultaneamente le funzioni razionali $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$, i quali hanno significato invariante di fronte alla trasformazioni birazionali. La parte ulteriore del gruppo degli zeri simultanei di queste funzioni, dipende soltanto dalla scelta delle variabili e non dell'integrale. Lo si dimostra facilmente, mercè la considerazione delle curve (algebriche) dei contatti delle $u = \text{cost.}$ colle $x = \text{cost.}$ e colle $y = \text{cost.}$ atteso che il gruppo di tutti gli zeri simultanei è definito come gruppo comune alle due curve, fuori del gruppo d'indeterminazione di u.

Sia u_0 un altro integrale semplice di 2ª specie di f, con una curva polare C_0 soddisfacente alle ipotesi stesse che si sono ammesse per C. L'ipotesi che u, u_0 sieno funzionalmente dipendenti, si esclude subito, perchè allora u, u_0 sarebber costanti lungo le curve di un fascio irrazionale Φ, e le loro curve polari sarebbero composte mediante curve di Φ; onde risulterebbero di grado zero e non soddisfarebbero alle condizioni supposte per C, C_0. Gl'integrali u, u_0 son dunque funzionalmente indipendenti. Sulla curva (algebrica) T dei contatti delle $u = \text{cost.}$, $u_0 = \text{cost.}$, la quale contiene i punti d'indeterminazione di u, u_0, le involuzioni $u = \text{cost.}$, $u_0 = \text{cost.}$ hanno come gruppi jacobiani i gruppi jacobiani rispettivi di u, u_0, cui si aggiunga il gruppo O dei punti dove si osculano le curve dei due fasci.

Si può altresì caratterizzare funzionalmente la curva T, per mezzo delle curve polari C, C_0 dei due integrali u, u_0 e del sistema canonico di f. Infatti, T sega C nel gruppo G e ulteriormente nei punti del gruppo jacobiano dell'involuzione segnata su C dalle $u_0 = \text{cost.}$; e questo gruppo equivale (n. 4) al doppio del gruppo (C, C_0) dei poli dell'integrale abeliano di 2^a specie subordinato da u_0 su C, aumentato di un gruppo canonico di C. Ne deriva, pel solito mio criterio di equivalenza, che:

$$T \equiv 2\,C_0 + C + C'$$

essendo C' una curva aggiunta a C. Si può manifestamente scrivere pure

$$T \equiv 2\,C + C_0 + C_0',$$

in virtù di quanto precede o del teorema fondamentale dell'aggiunzione (che alla sua volta deriva da quanto precede).

Siccome per ipotesi C, C_0 variano in sistemi lineari infiniti, la T è suscettibile di variare in un sistema continuo di grado > 0.

Supponiamo ora che u, u_0 abbian lo stesso gruppo jacobiano (per cui T passa doppiamente). I due integrali abeliani di 2^a specie u, u_0 considerati sopra T, hanno in conseguenza lo stesso gruppo jacobiano, epperò i doppi dei gruppi dei loro poli sono equivalenti (n. 4), cioè le curve $2\,C$, $2\,C_0$ staccano gruppi equivalenti su T, fuori dei gruppi d'indeterminazione G, G_0 per u, u_0.

Se, dunque, coincidono anche i gruppi G, G_0, o le C, C_0 coincidono (e si distaccano come parte da T) oppure le $2\,C$, $2\,C_0$ segan su T, fra punti base e punti non base, due gruppi equivalenti; onde

$$2\,C \equiv 2\,C_0.$$

Si conclude allora (come nel n. 16) che le C, C_0 appartengono ad un medesimo fascio lineare, col gruppo base G.

Ciò posto, se l'integrale u è *algebricamente distinto* dagl' integrali di 1^a specie, cioè s'esso non è combinazione lineare di una funzione razionale e di un integrale semplice di 1^a specie, le curve C, C_0 non potranno esser distinte. Infatti, qualora le C, C_0 fossero distinte, il gruppo G d'indeterminazione per u, apparterrebbe alla serie caratteristica del sistema lineare $|C|$ e quindi u differirebbe per una funzione razionale additiva da un integrale di 1^a specie.

Ora, se C coincide con C_0, i due integrali u, u_0 hanno la stessa curva polare (di 1^o ordine) collo stesso gruppo G d'indeterminazione, e le loro funzioni residue θ, θ_0, hanno in comune zeri e poli, eppertanto differiscono per una costante moltiplicativa. Sia p. es. $\theta = \lambda\,\theta_0$, con λ costante. L'integrale $u - \lambda u_0$ subordina su C una funzione razionale residua nulla e quindi C cessa di esser curva polare pel detto integrale; cioè u risulta uguale a $\lambda\,u_0$ aumentato di un integrale semplice di 1^a specie v. Dimostriamo che v riducesi ad una costante.

Fatta l'ipotesi contraria, consideriamo la curva S di contatto dei fasci $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ Poichè fra i determinanti funzionali delle coppie di funzioni u, v; u, u_0 passa la relazione:

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = -\lambda \frac{d(u, u_0)}{d(x, y)},$$

le curve S, T che sono le sole parti invarianti di livello zero dei due determinanti, coincidono. E siccome C, in quanto curva di livello infinito per u, u_0, si stacca come parte da T, ogni curva $v = \text{cost.}$ passante per un generico punto di C, dovrà toccare ivi la curva C, epperò sopra C risulterà $d\,v = 0$, cioè $v = \text{cost.}$ Ma allora (n. 11) v risulta costante su f.

In conclusione $u = \lambda\, u_0 + \mu$, con λ, μ costanti.

Ci resta da esaminare l'ipotesi in cui le C, C_0 son distinte e quindi esiste una funzione razionale φ, avente C come curva polare di 1° ordine e G come gruppo d'indeterminazione, tale che $u - \varphi$ è un integrale di 1ª specie. La cosa analoga si verificherà per u_0, il cui gruppo d'indeterminazione G, appartiene alla serie caratteristica di $|C|$ sopra C_0. Vi sarà cioè una funzione razionale φ_0, infinita di 1° ordine lungo C_0, tale che $u_0 - \varphi_0$ sarà di 1ª specie.

Pertanto potremo scrivere

$$u = u_0 + \psi + v,$$

ove $\psi = \varphi - \varphi_0$ è una conveniente funzione razionale, avente le C, C_0 come curve polari di 1° ordine e v è un integrale di 1ª specie. Siccome le funzioni razionali φ, φ_0 hanno come curve di livello costante quelle del fascio H individuato da C, C_0, le curve di livello costante di ψ son composte mediante coppie di curve di H (costituenti entro H, considerato come ente razionale ∞^1, una certa g^1_2).

Suppongasi, se è possibile, che v non si riduca ad una costante su f, epperò (n. 11) neppure su C_0. Poichè in una direzione qualunque spiccata da un punto del gruppo G, sulla superficie f, è sempre $d\,u = 0$, $d\,u_0 = 0$, $d\psi = 0$, nei punti di G sarà $d\,v = 0$. Tenuto conto che questi punti hanno significato invariante, ne segue che essi fanno parte del gruppo jacobiano di v (non potendo essere d'indeterminazione, n. 5), e quindi sulla C il gruppo canonico M, individuato da v, passa per G. Ma, essendo $|C|$ regolare, il sistema canonico di f sega su C la serie lineare *completa* residua del gruppo G rispetto alla serie canonica di C; onde esiste qualche curva canonica K, tale che $C_0 + K$ stacca su C il gruppo M, cioè qualche curva C' $(\equiv C_0 + K)$ aggiunta a C e passante pel gruppo M. Questo è assurdo, perchè, come si sa [36]), i gruppi canonici staccati sopra una curva C dagl' integrali semplici di 1ª specie, non appartengono mai a curve aggiunte. È dunque assurdo ammettere che v non sia costante.

Giungiamo così al teorema:

Un integrale semplice di 2ª specie di una superficie è individuato dal gruppo jacobiano e dal gruppo d'indeterminazione (almeno quando l'integrale possegga una sola curva polare di 1º ordine irriducibile e priva di punti multipli, variabile in un sistema lineare regolare infinito, il che può sempre ottenersi per sottrazione dall' integrale di una funzione razionale).

Omettiamo per brevità, la trattazione, in certa misura analoga, degli integrali semplici di 3ª specie.

§ 7. Il gruppo jacobiano di un integrale di Iª specie generico.

18. Sia $q > 0$ l'irregolarità di f ed $u_1, \ldots, u_q$ i q integrali semplici di 1ª specie, linearmente indipendenti, della superficie. Può darsi che il gruppo jacobiano del generico integrale

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_q u_q ,$$

colle λ parametri variabili, possegga sempre infiniti punti doppi?

Ciò accade di certo quando f contiene un fascio irrazionale di genere q (> 1) (n. 9). Ma, all' infuori di questo caso, si può affermare che il gruppo jacobiano di u consta di un numero finito, $I + 4$, di punti?

La risposta è affermativa. Per dimostrarlo, supponiamo che il gruppo jacobiano Γ di u consti di infiniti punti, e che esista perciò qualche componente (irriducibile) C doppia per una curva di livello dell' integrale u (n. 12). Variando i parametri λ, la curva C varia con continuità o resta fissa. Nel primo caso, il sistema continuo descritto da C è necessariamente un fascio irrazionale (nn. 12, 11), lungo le cui curve son costanti tutti gl' integrali di f. Epperò il fascio è di genere q, e si ricade nell' esempio considerato.

Esaminiamo il secondo caso. All' uopo, escluso che f contenga un fascio di genere q, si costruisca la varietà di *Picard* V_q annessa ad f e su questa (secondo il teorema ricordato nel n. 11) la superficie f^*, d'irregolarità q, in corrispondenza $(1, \mu)$ con f $(\mu \geq 1)$. Gl' integrali u_1, $u_2, \ldots, u_q$ di f, sono i trasformati degli integrali $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_q^*$ di f^*, mediante la sostituzione razionale da f^* ad f; e le curve del fascio Σ

36) *Severi,* Di alcuni recenti risultati nella teoria delle superficie algebriche e sopra qualche problema ad essi collegato. (Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici, Roma, 1908, vol. II), pag. 241.

($u =$ cost.) son composte con l'involuzione i cui gruppi corrispondono su f ai punti di f^*.

I punti doppi delle curve di Σ provengono dai punti doppi delle curve di Σ^* ($u^* =$ cost.) o dai punti di contatto di queste curve colla (eventuale) curva di diramazione esistente su f^*. Pertanto un punto di f, che appartenga al gruppo jacobiano di u, qualunque sieno i λ, o dà luogo ad un punto di f^* doppio per una curva di Σ^*, qualunque sieno i λ, o ad un punto di contatto fisso delle curve di Σ^*, che passan per esso al variare dei λ, o infine ad una curva fondamentale per la corrispondenza, la quale curva risulta componente doppia per una curva di Σ^*, qualunque sieno i λ. Ad ogni modo, dunque nell' ipotesi che stiamo esaminando, vi è almeno un punto P^* di f^*, che è doppio o di contatto per le ∞^{q-1} curve dei sistemi Σ^* che passan per esso, al variare dei parametri λ.

Gl' integrali $u_1^*, u_2^*, \dots, u_q^*$ son subordinati su f^* da altrettanti integrali semplici di 1ª specie $U_1, U_2, \dots, U_q$ di V_q. Ebbene, la conclusione cui siam giunti significa che le varietà $U_1 =$ cost., $U_2 =$ cost. . . ., $U_q =$ cost. passanti per P^* hanno ivi almeno una tangente comune. Ciò posto sia

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{q+1}) = 0$$

l'equazione di un modello proiettivo di V_q in uno spazio S_{q+1}, e sieno

$$U_h = \int \sum_{i=1}^{q} A_{hi}\, dx_i \qquad (h = 1, \dots, q)$$

le espressioni dei suoi integrali semplici.

L'unico integrale q-plo di 1ª specie appartenente a V_q, è [37])

$$\int dU_1\, dU_2 \dots dU_q = \int \begin{vmatrix} A_{11}\, A_{12} \dots A_{1q} \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{q1}\, A_{q2} \dots A_{qq} \end{vmatrix} dx_1\, dx_2 \dots dx_q$$

e siccome sopra V_q, che è di genere q-dimensionale 1, il sistema canonico ê di ordine zero [38]), il determinante delle A si annulla soltanto all' infinito, cioè in punti che non son invarianti e che mutano anzi con una semplice trasformazione omografica del modello. D'altronde, secondo la conclusione precedente, il determinante delle A, come determinante funzionale delle funzioni $U_1, U_2, \dots, U_q$ rispetto alle variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_q$, dovrebbe annullarsi nel punto *invariante* P^*, in cui gli S_{q-1} tangenti alle varietà $U_1 =$ cost., . . ., $U_q =$ cost. son linearmente dipendenti. Il punto P^* non può dunque esistere e si conclude col teorema:

37) Ved. il n. 11 della mia Memoria citata in 22).

38) Questa nota proprietà consegue senz' altro dall' esistenza su V_q di un gruppo continuo abeliano ∞^q di trasformazioni birazionali, che si comporta transitivamente rispetto a tutti i punti di V_q.

Il gruppo jacobiano di un generico integrale semplice di 1ª specie d'una superficie d'irregolarità q consta sempre di un numero finito di punti. Va eccettuato soltanto il caso in cui la superficie contiene un fascio irrazionale di genere q, uguale all' irregolarità, nel qual caso (sempre, se $q > 1$; non sempre, se $q = 1$) il gruppo jacobiano consta di infiniti punti.

Inoltre:

Nel primo caso non esiste alcun punto della superficie comune ai gruppi jacobiani di tutti gli integrali semplici di 1ª specie; nel secondo caso i soli punti fissi pei gruppi jacobiani di tutti gli integrali semplici della superficie sono i punti doppi delle curve del fascio di genere q.

L'ultima affermazione di questo enunciato deriva (tenuto conto del n. 9) dal fatto che la g^{q-1}_{2q-2} canonica sopra un ente ∞^1 di genere q, non ha elementi fissi.

§ 8. La serie canonica sopra una superficie irregolare.

19. Volgiamoci ora a considerare con qualche maggiore attenzione la serie W dei gruppi jacobiani degli integrali semplici di 1ª specie di una superficie f d'irregolarità $q > 2$; serie che ha l'ordine *virtuale* $I + 4$.

Liberiamo, in primo luogo, il terreno dal caso in cui f contiene un fascio irrazionale Φ di genere q. Allora, se $q > 1$, i gruppi della serie W contengono, come si è ormai più volte detto, infiniti punti. Ciascuno di tali gruppi consta di $2q—2$ curve, formanti entro Φ un gruppo canonico, ed un gruppo di Δ punti fissi (n. 9). Ognuna delle curve irriducibili luoghi di punti doppi, ha entro al gruppo virtuale di W, una equivalenza di $2 (\varrho'—1)$ unità, ϱ' essendo il genere delle curve di Φ. Se poi $q = 1$, W riducesi ad un sol gruppo (d'ordine ≥ 0) di punti, che può contenere un numero finito o infinito di punti, a seconda che il fascio ellittico Φ non contiene o contiene componenti multiple delle sue curve. E non c'è altro da dire.

Bene altrimenti interessante è il caso generale, in cui il generico integrale semplice di 1ª specie di f, ha il proprio gruppo jacobiano costituito da $I + 4$ punti (così che l'ordine effettivo di W eguaglia, almeno pel gruppo generico, l'ordine virtuale).

Poichè la serie W presentasi come l'analoga della serie canonica sopra una curva (in quanto tal serie si definisca come l'insieme dei gruppi jacobiani degl'integrali abeliani di 1ª specie), chiameremo W la *serie canonica di gruppi di punti sulla superficie f d'irregolarità $q > 0$.*

Come ho già detto nella introduzione, per la prima volta ci si trova così di fronte, in una questione concreta, importante e naturale, alla necessità di costruire, sopra una superficie, una teoria delle serie di gruppi di punti, la quale estenda la teoria delle serie lineari di gruppi di punti sopra una curva, in un senso diverso dal consueto (che considera i sistemi lineari di curve come gli enti analoghi delle serie lineari).

Di ciò la opportunità di analizzare le proprietà della serie W, onde trarre norma da esse per giungere alla definizione più opportuna dei nuovi enti da considerare sopra una superficie.

20. Cominciamo col porre in rilievo che:

La serie canonica W della superficie f, d'irregolarità q, è una serie razionale, priva di punti fissi, di dimensione $q-1$.

Invero, il gruppo generico Γ, di W, resta algebricamente coordinato (n. 15) ad uno e ad un solo gruppo di valori dei parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ considerati nel n. 18, intendendosi questi parametri dati a meno di un fattore di proporzionalità. In altri termini, gli elementi (gruppi) di W sono in corrispondenza biunivoca algebrica, cioè birazionale, coi punti dello S_{q-1} (proiettivo) nel quale $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ son coordinate omogenee di punto. Onde W è un ente razionale. Che poi W non abbia punti fissi, è già stato dimostrato alla fine del n. 18. E questa proprietà di W è identica a quella che spetta alla serie canonica sopra una curva.

Ho detto che W è una serie razionale di gruppi di punti e non già che è una serie lineare.

Giova, a questo punto, di richiamare il concetto di *ordine invariantivo* (relativo) di una varietà algebrica, che ho altrove introdotto[39]), e che chiarisce perfettamente la distinzione, che ha qui un carattere essenziale. L'ordine invariantivo di una varietà algebrica è l'ordine (proiettivo) minimo delle varietà che sono con essa in corrispondenza birazionale *senza eccezioni*. Da questo punto di vista *le varietà lineari son quelle il cui ordine invariantivo è 1*. Ed è perciò ben giusto di chiamare lineari le serie che si considerano, con questa denominazione, sopra una curva, perchè esse son proprio d'ordine invariantivo 1. Si osserverà che, se il modello d'ordine minimo della varietà, risulta privo di punti singolari, la varietà può considerarsi priva di singolarità, nel senso invariantivo espresso. Ciò accade sempre per le varietà lineari. In caso diverso, la varietà può avere singolarità invarianti (di fronte alle trasformazioni birazionali senza eccezione). P. es. la varietà delle coppie di punti di un piano ha l'ordine invariantivo 3 e possiede ∞^2 elementi doppi invariantivi.

Ebbene, nulla ci autorizza a ritenere che la serie W sia lineare. Si po-

---

[39]) *Severi*, Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare. (Annali di Matematica, $XXIV_3$, 1915, pag. 89.). Ved. pure le mie Conferenze di geometria algebrica (raccolte da B. Segre) (Bologna, Zanichelli 1927—30), pag. 63.

trebbe affermare la linearità della serie canonica, quando tutti i suoi gruppi, e non soltanto il generico, contenessero un numero finito di punti, perchè allora la corrispondenza birazionale fra W e lo S_{q-1} sarebbe biunivoca senza eccezioni e W risulterebbe priva di elementi multipli e del tutto omogenea, giacchè conterrebbe un gruppo continuo di trasformazioni birazionali senza eccezioni in sè, rispetto al quale tutti suoi elementi sarebbero equivalenti fra loro. Quando invece esistano curve riempite da punti doppi per curve di livello di un medesimo integrale eccezionale, l'affermazione analoga non è possibile, perchè non si può escludere che l'elemento di W che corrisponde a quell' integrale, cioè a un certo punto di S_{q-1}, sia multiplo per W.

21. Un' altra riflessione cade qui in acconcio. Le serie lineari di gruppi di punti sopra una curva son *caratterizzate* dal fatto di essere *razionali* e *involutorie* (cioè di *indice* 1). Le serie razionali involutorie sopra una superficie son esse necessariamente lineari? E la serie canonica è involutoria?

Il concetto di serie involutoria di gruppi di punti si pone agevolmente sulle superficie, qualunque sia la dimensione r della serie. Se $r = 0$, la serie si dirà involutoria, quando consta di un sol gruppo di punti; se $r = 1$, sicchè i suoi gruppi riempiono una curva algebrica A irriducibile o riducibile [40]), la serie si dirà involutoria quando per un punto qualunque della A passa un sol gruppo della serie, o vi passano tutti; se r è qualunque, la serie si dirà involutoria (o d'indice 1) quando i gruppi della serie passanti per un punto qualunque di f, formano una serie involutoria di dimensione $< r$ o son tutti quanti i gruppi della serie data. La definizione è ricorrente; e siccome ne è conosciuto il significato per $r = 0, 1$, essa ha un significato preciso per qualunque r.

Si può dire più brevemente che *la serie è involutoria quando, dati su f tanti punti ed in tal posizione che per essi passi un gruppo isolato della serie (cioè un gruppo che non appartenga ad un sistema continuo di gruppi della serie, contenenti quei punti) pei punti medesimi non passa che quel gruppo.*

Ebbene, *sopra una superficie esistono serie razionali involutorie, che non sono lineari.* Un esempio è fornito dalla serie razionale involutoria generata dai gruppi di intersezione delle curve di due sistemi lineari di dimensioni r, s, privi di punti base e di curve (totali o parziali) comuni. L'ordine invariantivo di questa serie è $\frac{(r+s)!}{r!\,s!}$. Un altro esempio è fornito dalla serie delle coppie di punti di un piano; ecc. ecc.

[40]) Particolari attenzioni si debbono usare quando la A è riducibile (ved. più innanzi).

22. Dimostriamo che:

La serie canonica di una superficie irregolare è involutoria.

Cerchiamo, a questo scopo di determinare i gruppi di W passanti per un punto generico P della f, essendo:

$$u_h = \int \frac{A_h\, dy - B_h\, dx}{f_z'} \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ q)$$

gl' integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad f. L'integrale

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_q u_q$$

avrà in P un punto del proprio gruppo jacobiano, se in P si annullano

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{f_z'} \sum \lambda_h B_h \quad , \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{f_z'} \sum \lambda_h A_h\,,$$

e viceversa. Invero, P, come punto generico di f, è al finito e fuori delle linee $f = f_z' = 0$. E si noti che, con una conveniente trasformazione birazionale di f, si può porre ogni suo punto nelle condizioni di genericità di P. Cosicchè la conclusione che stiamo per stabilire nei riguardi di P, vale per qualunque punto di f. Si scrivon pertanto fra le λ le due equazioni lineari

$$(9) \qquad \sum \lambda_h A_h = 0 \quad , \quad \sum \lambda_h B_h = 0,$$

che son generalmente indipendenti e divengono dipendenti soltanto (al più) per un numero finito di posizioni di P o per P variabile sopra una curva della superficie, giacchè, per la dipendenza di queste due equazioni, P deve annullare la matrice

$$\left| \begin{matrix} A_1\, A_2 \ldots A_q \\ B_1\, B_2 \ldots B_q \end{matrix} \right|,$$

e questa matrice è identicamente nulla su f soltanto quando la superficie contiene un fascio di genere q, caso che abbiamo escluso.

I gruppi di W passanti per P son dunque rappresentati nello S_{q-1} dai punti di due certi iperpiani, distinti o coincidenti; in ogni caso da uno spazio lineare (di dimensione q—3 o q—2).

Similmente, fissati più punti qualunque di f (che si posson sempre supporre generici rispetto alla curva all'infinito di f e alle linee $f = f_z' = 0$) in corrispondenza al passaggio di un gruppo di W, per ciascuno di essi, si scrivon fra le λ due equazioni lineari; onde o le equazioni son più di q—1 indipendenti, e non v'è nessun gruppo di W passante per quei punti, o esse riduconsi a $\mu \leq q$—1 indipendenti, e i gruppi di W passanti per quei punti son rappresentati in S_{q-1} da uno spazio lineare di dimensione

$q-1-\mu$:in particolare da un punto, per $\mu=q-1$. Pertanto W è involutoria.

Rimane pure stabilito che:

I gruppi della serie canonica passanti per più punti di f formano sempre una serie razionale involutoria.

23. Si deve avvertire che il gruppo generico di W non risulta affatto dal gruppo completo delle intersezioni (variabili) delle curve mobili nei sistemi lineari (9), perchè (n. 10) due curve di quei sistemi lineari provenienti dai medesimi valori delle λ, s'intersecano, oltre che nel gruppo jacobiano dell'integrale ad esse corrispondente, in un gruppo (canonico) K_1 all' infinito ed in un gruppo Q situato sulla sezione J di f con $f_z'=0$, fuori della linea doppia. Variando le coppie di curve corrispondenti dei due sistemi, cioè l'integrale considerato, anche i gruppi K_1 e Q variano.

La serie W è dunque *parzialmente* contenuta nella serie W',∞^{q-1}, generata dalle coppie di curve corrispondenti dei sistemi lineari (9); curve corrispondenti in un'omografia fra i due sistemi, considerati come spazi lineari a $q-1$ dimensioni.

L'ultima serie non è completa, in quanto serie razionale involutoria, giacchè essa è contenuta nella serie razionale involutoria dello stesso ordine e di dimensione $2(q-1)$, generata dai gruppi di intersezione di due curve qualunque (9).

Questo però non significa che la serie W non possa essere completa, come serie razionale involutoria. La natura della questione può far anzi supporre la completezza di W; ma, pel momento, dobbiamo lasciare la questione insoluta.

Se si introduce per ogni integrale u_h l'aggiunta di ordine $m-2$, C_h, associata alle A_h, B_h, si riconosce subito (n. 10) che *la serie canonica può pure definirsi come la serie dei gruppi comuni alle terne di curve corrispondenti dei tre sistemi lineari:*

$$\sum \lambda_h A_h = 0\,, \quad \sum \lambda_h B_h = 0\,, \quad \sum \lambda_h C_h = 0.$$

Osservazione. Dall'equivalenza

$$(J, D) \equiv G + Q$$

del n. 6, tenuto conto che J, G sono indipendenti dall' integrale considerato, risulta che il gruppo Q, variando l'integrale, varia su J in una serie lineare; e così pure K_1 varia in una serie lineare (canonica) sulla curva all'infinito C_1 di f. Onde *la serie canonica W è la serie che si ottiene da quella generata dai gruppi (9), togliendo da ciascuno di questi gruppi due gruppi variabili in serie lineari sopra due curve fisse della superficie.*

24. Un'altra notevole proprietà di W è la seguente:

Due gruppi qualunque della serie canonica son equivalenti sopra qualche curva della superficie.

Sieno, invero, Γ_1, Γ_2 due gruppi di W, jacobiani per gl'integrali u_1, u_2. Questi integrali son linearmente indipendenti (perchè Γ_1, Γ_2 son distinti) e sono altresì funzionalmente indipendenti, perchè, in caso contrario, essi sarebbero costanti lungo le curve di un fascio irrazionale Φ, di genere > 1, e quindi i gruppi Γ_1, Γ_2 conterrebbero infiniti punti; ciò che escludiamo [41]).

Sulla curva canonica K, di contatto pei fasci Σ_1 ($u_1 =$ cost.), Σ_2 ($u_2 =$ cost.), i gruppi jacobiani degli integrali subordinati da u_1, u_2 son costituiti, ricordiamolo (n. 13), dal gruppo O dei punti di K dove si osculano le curve di Σ_1, Σ_2, cui si aggiungano, rispettivamente, i gruppi Γ_1, Γ_2. E siccome i gruppi jacobiani degli integrali abeliani u_1, u_2 sono equivalenti su K (n. 2), così risultano ivi equivalenti i gruppi Γ_1, Γ_2. Questa equivalenza va intesa in un senso opportunamente esteso, se la curva K è riducibile (cfr. col. successivo n. 31).

25. Una digressione interessante val la pena di fare a proposito del gruppo O considerato nel n. prec.; ed è che *questo gruppo di punti è un covariante funzionale simultaneo dei due integrali semplici di 1ª specie u_1, u_2 funzionalmente indipendenti, ed è razionalmente definito dai due integrali.*

Designato con $p^{(1)}$ il genere lineare della superficie f (priva di curve eccezionali) il numero $[O]$ dei punti di O risulta espresso dalla formula

$$[O] = 2p^{(1)} - 6 - I,$$

cioè, tenuto conto della *relazione di Noether:*

$$p^{(1)} + I = 12p_a + 9,$$

ove p_a è il genere aritmetico di f, dalla formula

$$[O] = 3p^{(1)} - 15 - 12p_a,$$

donde si trae *la disuguaglianza*

(10) $$p^{(1)} \geq 4p_a + 5$$

fra i generi $p^{(1)}$, p_a di una superficie d'irregolarità $q > 0$, non contenente un fascio irrazionale di genere q.

41) Veramente questa esclusione non è strettamente necessaria. Occorrerebbe però aver premesso considerazioni, che verranno in appresso, sul senso da darsi all' equivalenza di due gruppi, non ambedue costituiti da un numero finito di punti, sopra una curva riducibile della superficie.

Questa disuguaglianza va ravvicinata ad una di *Rosenblatt* [42]) valida per ogni superficie

$$p^{(1)} \leqq 16 p_a + 27.$$

Le due disuguaglianze foniscono l'una un limite inferiore e l'altra un limite superiore per $p^{(1)}$.

Una disuguaglianza ancor più espressiva, valevole pure per ogni superficie, e che fornisce un limite superiore per $p^{(1)}$, ottenni recentemente [43]).

Essa è:

$$p^{(1)} \leqq 2 p_g + 8 p_a + 11 - \varrho \,, \tag{11}$$

p_g, ϱ, essendo il genere geometrico e il numero-base di f.

Confrontando questa disuguaglianza con la disuguaglianza di *Noether* [44]):

$$p^{(1)} \geqq 2 p_g - 3 \,,$$

valevole per le superficie prive di curve eccezionali e con curva canonica irriducibile, ne trassi [45]) *la limitazione*

$$\varrho \leqq 8 p_a + 14 \,,$$

pel numero-base ϱ di una superficie di genere aritmetico p_a, priva di curve eccezionali e a sistema canonico irriducibile.

Confrontando invece la (10) con la (11), si trova *la limitazione più espressiva*

$$\varrho \leqq 2 (p_g + 2 p_a + 3)$$

pel numero-base di una superficie d'irregolarità $q = p_g - p_a > 0$, non contenente un fascio irrazionale di genere q.

Che le disuguaglianze trovate sieno molto più espressive di quelle finora conosciute, lo prova p. es. il fatto che il limite inferiore di $p^{(1)}$ fornito dalla (10) è raggiunto per le superficie iperellittiche di rango 1, mentre non lo è quello dato dalla disuguaglianza di *Noether;* e che il limite superiore di ϱ, ultimamente ottenuto, è raggiunto per le dette superficie iperellittiche (triplamente singolari), mentre non lo è il limite fornito dalla $\varrho \leqq 8 p_a + 14$.

26. Torniamo alla serie W e aggiungiamo la indicazione di qualche altra sua proprietà.

42) Sur quelques inégalités dans la théorie des surfaccs algébriques (Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, t. 254, 1912) p. 1494.

43) Osservazioni a proposito della Nota di E. Kähler «Sui periodi degli integrali multipli sopra una varietà algebrica» (Rend. del Circolo Matematico di Palermo, seduta del 24 gennaio 1932).

44) Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde (Math. Annalen, IIX, 1875), p. 495.

45) Loc. citato in 43).

Sulla curva canonica K, di cui al n. 24, oltre ai gruppi Γ_1, Γ_2, vi sono ∞^1 gruppi di W, costituenti un g^1_{I+4}: e sono i gruppi jacobiani degli integrali del fascio $u_1 + \lambda u_2$. Le curve di livello di uno qualunque di questi integrali, toccano nei punti di K, le curve di livello di u_1 o di u_2, passanti pei punti stessi; epperò il gruppo jacobiano Γ di $u_1 + \lambda u_2$ sta su K per ogni λ. E siccome Γ è la parte variabile del gruppo jacobiano dell' integrale abeliano subordinato da $u_1 + \lambda u_2$ su K, così esso descrive ivi una serie lineare ∞^1.

Pertanto *due gruppi della serie canonica son congiunti da una* g^1_{I+4} *costituita tutta da gruppi della serie.*

Due gruppi di W (riferiamoci pure a quelli costituiti da un numero finito di punti, per quanto non sia strettamente necessario) son congiunti da una sola delle predette g^1_{I+4}, che si chiameranno *le serie lineari canoniche della superficie irregolare.* Si chiameranno inoltre per brevità *curve canoniche principali* quelle che contengon le predette serie lineari, cioè le curve di contatto per le coppie di curve di livello di due integrali semplici di 1ª specie, funzionalmente indipendenti.

Se, conservando le notazioni del n. 22,

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_q u_q \ , \quad v = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_q u_q$$

son due integrali funzionalmente indipendenti di f, la curva canonica principale K, cui essi danno luogo, a meno del fattore f_z', è fornita dalla equazione (n. 12):

$$\sum (\lambda_i \mu_h - \lambda_h \mu_i)(A_i B_h - A_h B_i) = 0$$

ove i, h è una combinazione binaria semplice degli indici 1, 2, ..., q.

Nello spazio S_{q-1} gl'integrali del fascio $u + \varepsilon v$ son rappresentati dai punti della retta di coordinate grassmanniane:

$$v_{ih} = \lambda_i \mu_h - \lambda_h \mu_i \ ,$$

onde le serie lineari canoniche son rappresentate dalle rette di W, e son perciò $\infty^{2(q-2)}$.

Ora suppongasi che altri due integrali funzionalmente indipendenti

$$u' = \lambda_1' u_1 + \ldots + \lambda_q' u_q \ , \quad v' = \mu_1' u_1 + \ldots + \mu_q' u_q \ ,$$

dieno luogo alla stessa K, pur determinando su questa una g^1_{I+4} diversa da quella determinata dalla coppia u, v. In tal ipotesi le $\lambda_i' \mu_h' - \lambda_h' \mu_i'$ non potranno risultare proporzionali alle v_{ih} e siccome, per un conveniente $\sigma \neq 0$, sussiste l'identità:

$$\sum (\lambda_i \mu_h - \lambda_h \mu_i)(A_i B_h - A_h B_i) = \sigma \sum (\lambda_i' \mu_h' - \lambda_h' \mu_i')(A_i B_h - A_h B_i)$$

così i $\frac{q(q-1)}{2}$ polinomi $A_i B_h - A_h B_i$ saranno linearmente dipendenti.

Poichè generalmente, almeno quando p_g sia abbastanza grande rispetto a una data q, non vi saranno legami lineari fra i polinomi suddetti, così K non potrà contenere due distinte g^1_{I+4}. Dunque *in generale una curva canonica principale non contiene che una sola serie lineare canonica di f e le serie lineari canoniche dipendono da $2(q-2)$ parametri.*

Si può di più dimostrare che:

Quando una curva canonica principale contiene più g^1_{I+4} canoniche, queste non hanno a due a due alcun gruppo (totale) comune, di un numero finito di punti.

Se, infatti, vi fossero in K due g^1_{I+4} col gruppo Γ_1, comune, presi in queste due serie altri due gruppi Γ_2, Γ_3, diversi da Γ_1, e denotati con u_1, u_2, u_3 gl' integrali corrispondenti a Γ_1, Γ_2, Γ_3, la curva K, risulterebbe di contatto per ambedue le coppie di fasci $u_1 = \text{cost.}$, $u_2 = \text{cost.}$ e $u_1 = \text{cost.}$, $u_3 = \text{cost.}$, e si avrebbe perciò:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = \lambda (A_1 B_3 - A_3 B_1),$$

con $\lambda \neq 0$ costante. Pertanto il determinante funzionale di u_1, $u_2 - \lambda u_3$ sarebbe nullo, epperò gl' integrali stessi sarebbero costanti lungo le curve di un fascio irrazionale Φ, il cui genere sarebbe > 1, perchè Φ, come ente ∞^1, possiederebbe i due integrali di 1ª specie indipendenti linearmente u_1, $u_2 - \lambda u_3$. Ma allora (n. 9) il gruppo jacobiano di u_1 consterebbe di infiniti punti, mentre lo abbiamo supposto di $I + 4$ punti.

Osservazione. La indagine sui legami lineari che possono intercedere fra i polinomi $A_i B_h - A_h B_i$ si può spingere più innanzi, e dedurne altre proprietà della serie W, usufruendo dell' accennata rappresentazione iperspaziale, che ha già condotto da tempo il *Castelnuovo* [46]), il *Comessatti* [47]) ed il *Rosenblatt* [48]) a interessanti conseguenze, proprio in questa direzione. Non ci indugiamo ulteriormente su ciò, per quanto l'argomento sia degno della maggiore attenzione.

27. Dimostriamo infine che:

La serie canonica può generarsi come il luogo dei gruppi di una g^1_{I+4} canonica razionalmente determinata sopra una curva canonica principale, variabile in un sistema lineare ∞^{q-2}; o come il luogo di un gruppo razionalmente dato sopra una curva $C + C'$, passante pel gruppo jacobiano e pel gruppo base di un fascio lineare $|C|$.

Fissato un gruppo jacobiano Γ_1, relative all' integrale u_1, generico nel sistema degli integrali semplici di 1ª specie di f (che supponiamo non

46) L o c. c i t. in 31)

47) Rend. del Circolo Matem. di Palermo, XXXI, 1911, pag. 369.

48) Rend. del Circolo Matem. di Palermo, XXXV, 1913, pag. 237.

contenere un fascio irrazionale di genere q), la curva canonica principale K, individuata da u_1 e dall' integrale

$$v = \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_q u_q ,$$

passa sempre pel gruppo fisso Γ_1, e varia insieme ai parametri λ. Poichè due integrali v, corrispondenti a valori non proporzionali dei λ, non posson dar luogo alla stessa K (se no si avrebbero su tale K due g^1_{I+4} distinte col gruppo Γ_1 comune), il sistema delle K, rappresentato (all' infuori del fattore f'_z) dall' equazione

$$\sum_{i=2}^{q} \lambda_i (A_1 B_i - A_i B_1) = 0 ,$$

è un sistema lineare, S, ∞^{q-2}. Resta così dimostrata la prima parte del teorema. *Il sistema S non ha punti base fuori di Γ_1 (n. 18).*

Quanto alla seconda parte, si osserverà che, una volta dato l'integrale generico u e determinata la curva D ($\equiv C + C'$), di cui al n. 6, essa contiene il gruppo jacobiano di u, e, al variare di u, la D varia nel sistema lineare ∞^{q-1} [49]) delle curve $C + C'$, che passano pei punti base e pel gruppo jacobiano del fascio H. Due diversi integrali u non posson dar luogo alla medesima D, perchè [50]) una delle predette curve $C + C'$ individua l'integrale (a meno di una costante moltiplicativa e di una additiva). Perciò il gruppo jacobiano contenuto nella D è razionalmente dato da u.

Osservazione. Se la generica curva canonica principale K contiene ∞^r gruppi jacobiani di integrali u, in forza della prima delle due generazioni indicate, per due gruppi jacobiani generici passano ∞^{r-1} curve canoniche principali. È possibile che sia $r > 1$?

28. Un' altra ricerca interessante, che ci limitiamo a segnalare, è *la determinazione delle superficie irregolari, non riferibili a rigate, per cui si annulli l'invariante $I + 4$.* Tali superficie hanno la *serie canonica d'ordine zero* e son perciò analoghe, nel presente ordine di idee, alle curve ellittiche.

Rientrano p. es. in questa classe:

a) Le superficie iperellittiche di *Picard* (superficie con un gruppo continuo abeliano ∞^2 di trasformazioni birazionali in sè).

b) Le superficie con un fascio di genere 1 di curve C di genere $\varrho' > 0$, senza punti doppi. Tali superficie possono studiarsi rappresentandole sulla rigata ellittica imagine dei gruppi dell' involuzione I_n ottenuta intersecando le C colle curve di un fascio lineare H; involuzione che ha come curva di coincidenza D la curva di contatto dei due fasci.

---

49) Ved. la mia Nota citata in [43]).

50) Ved. ancora la mia Nota ultimamente ricordata.

Se ν è il numero dei punti base di H, si trova, pel genere π di D, la formula $2\pi - 2 = \nu + \tau$, ove τ denota il numero dei punti tripli di I_n; e ciò agevola l'applicazione delle formule che legano i caratteri invarianti delle due superficie in corrispondenza [51]).

c) Le superficie con un fascio di genere qualunque $\varrho > 0$ di curve ellittiche, senza punti doppi.

Le superficie delle coppie di punti di una curva ellittica e di una curva di genere qualunque > 0, appartengono alla classe b) ed alla classe c).

29. Terminiamo questo § con l'indicazione di alcune disuguaglianze ancor più espressive di quelle del n. 25, fra i caratteri di una superficie f d'irregolarità $q > 0$, non possedente un fascio di genere q.

L'esistenza del sistema S (di cui al n. 27), il quale ha $I + 4$ punti base e la dimensione $q - 2$, implica che il numero $p^{(1)} - I - 5$ delle intersezioni *variabili* di due curve di questo sistema, sia non minore della dimensione $q - 3$ della sua serie caratteristica. Sicchè per $q \geqq 3$ sussiste la disuguaglianza

$$p^{(1)} \geqq I + q + 2, \quad \text{cioè:} \quad (12) \quad 2\,p^{(1)} \geqq 11\,(p_a + 1) + p_g,$$

la quale confrontata colla (11) del n. 25, porge

$$(13) \qquad 2\varrho \leqq 3p_g + 5p_a + 11.$$

Si conclude che:

Fra i generi $p^{(1)}$, p_a, p_g ed il numero-base ϱ di una superficie d'irregolarità $q \geqq 3$, priva di curve eccezionali, e non possedente un fascio irrazionale di genere q, intercedono le disuguaglianze (12), (13). Per $q > 3$ nelle dette disuguaglianze non può valere il segno $=$.

L'ultima asserzione deriva da ciò: che, se $q > 3$, è $p_g \geqq 3$ (chè altrimenti sarebbe $p_a < -1$ e la superficie risulterebbe riferibile a rigata) e l'ordine della serie caratteristica (almeno ∞^1) di S non può eguagliare la dimensione, se no le curve di S sarebbero razionali e risulterebbe razionale la superficie.

§ 9. Le serie di gruppi di punti sopra una superficie algebrica.

30. Volendo ora giungere alla definizione più naturale delle serie di gruppi di punti, da assumersi, sopra una superficie, come le analoghe delle serie lineari sopra una curva, occorre che indaghiamo i legami fra le varie proprietà di cui gode la serie canonica W, per avere un orien-

[51]) *Severi,* Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica (Rend. del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, XXXVI$_2$, 1903), pag. 495.

tamento su quella o su quelle di tali proprietà, che conviene porre a base di una definizione generale.

Teniamo presenti soltanto le proprietà seguenti della serie W, perchè le altre hanno un evidente carattere specifico della serie stessa: è una serie razionale involutoria; due suoi gruppi generici sono equivalenti su qualche curva della superficie e congiunti da una g^1_{l+4} appartenente a W; essa è generabile mediante una serie lineare razionalmente data sopra una curva variabile in un sistema lineare.

31. Facciamo anzitutto talune considerazioni sulla *equivalenza di gruppi di punti sopra una curva algebrica riducibile*, che giova porre in piena luce, onde conferire alle osservazioni ulteriori quella larga portata, necessaria per eliminare ogni incertezza nella introduzione del concetto generale, che abbiamo in vista.

La teoria delle serie lineari di gruppi di punti sopra una curva riducibile è stata fino ad ora trascurata, dopo un lavoro in cui *Noether* [52]) ne gittò i fondamenti. Ma i risultati di *Noether* sono per noi insufficienti, ed il suo punto di vista (essenzialmente ispirato al metodo da lui e dal *Brill* usato per la geometria sopra una curva irriducibile) ha carattere troppo proiettivo, in quanto non viene in esso svincolato il concetto di serie lineare sopra una curva riducibile, dal sistema lineare di forme che, nello spazio cui la curva appartiene, sega su essa la data serie.

Il punto di vista dal quale invece noi ci poniamo, nel costruire la teoria delle serie lineari di gruppi di punti sopra una curva riducibile, è ispirato al nostro „metodo rapido" per sviluppare la teoria analoga sopra una curva irriducibile [53]), ed esso conduce alle proprietà centrali, in modo non difficilmente estendibile alle serie di gruppi di punti sopra una superficie; mentre la via di *Brill-Noether* sarebbe meno facilmente praticabile. Di più il concetto si consegue così, come è necessario per i nostri scopi, sotto l'aspetto invariante, in tutti i suoi attributi.

Non intendo di sviluppare qui con ogni dettaglio la teoria, perchè ciò allungherebbe di troppo la presente Memoria. Mi riservo di esporre in altro luogo la trattazione della teoria, colla diffusione, che è necessaria e che merita; qui mi limiterò a porre soltanto i caposaldi essenziali per quanto seguirà poi.

Una serie lineare di gruppi di punti sopra una curva riducibile C — è quasi superfluo il dirlo — è l'insieme dei gruppi di punti staccati su C da

---

[52]) Ueber die reduktiblen algebraischen Kurven (Acta math. IIX, 1886), p. 161.

[53]) Ved. il mio Trattato citato, pag. 145, ove trovasi riprodotto il metodo che io avevo sviluppato fino dal 1920 (Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, LXXIX, 1920) pag. 929.

un sistema lineare di forme dello spazio ambiente di C. Ma, mentre quando C è irriducibile, niuna incertezza può esservi nella *interpretazione della frase „gruppo di punti“* di C, ivi *staccato* da una forma del sistema segante, lo stesso non può dirsi quando C è riducibile. Giacchè, limitarsi a considerare (come fa *Noether* a pag. 173 della Memoria citata) i gruppi di punti segnati du C dalle forme che non contengono alcuna parte di C, vuol dire precludersi a priori la via verso un concetto invariante. Noi consideriamo come gruppi della serie anche quelli staccati dalle forme del sistema che contengano una o più (ma non tutte) delle parti di C: sono *gruppi eccezionali* costituiti (almeno a prima giunta) da *infiniti* punti, che riempiono una o più curve algebriche. In ognuno di questi gruppi vi sono poi generalmente dei punti isolati, situati su quelle componenti di C, che non appartengono alla forma segante su C il gruppo considerato [54]).

La considerazione della serie canonica W sopra una superficie f, che è stata la nostra bussola d'orientamento nella costruzione di cui ora ci occupiamo, suggerisce senz'altro di ampliare così sopra una superficie (e dunque anche sopra una curva, se ciò che facciamo deve servire per le superficie!), il concetto di gruppo di punti, includendovi gruppi di infiniti punti.

Invero, al variare dell' integrale u, il gruppo jacobiano di u, che generalmente consta di un numero finito di punti, può venire a contenerne infiniti.

Se il gruppo staccato sulla data curva riducibile C, dalla generica forma del sistema lineare segante [55]), consta di un numero finito di punti, ogni parte infinita di un gruppo della serie stessa, ha una certa equivalenza numerica, rispetto al numero dei punti del gruppo generico: cosicchè, tenuto conto di tali equivalenze, il numero *virtuale* dei punti del gruppo rimane immutato: è l'*ordine* della serie (*ordine virtuale* pei gruppi eccezionali; *effettivo* pei gruppi generici).

Intesa una serie lineare su C in questo senso convenzionale, essa diviene un ente irriducibile, in corrispondenza algebrica biunivoca colle forme di un sistema lineare Σ, che stacchi la serie stessa, in guisa che per un gruppo generico della serie passi una sola forma di Σ [56]). Un tal sistema

[54]) È appena necessario avvertire che punti fissi si possono a volontà includere o escludere dai gruppi di una serie lineare sopra una curva riducibile (come sopra una curva irriducibile) senza contraddire alla definizione generale. Nel caso di una curva riducibile questi punti potranno essere in numero finito o riempire una o più curve algebriche.

[55]) Lo diremo, per brevità, un gruppo generico, ma in un senso puramente convenzionale.

[56]) Nelle considerazioni del testo, C si considera come totalmente sconnessa, senza cioè fissare come punti di connessione alcuni o tutti i punti comuni alle sue parti a due a due (cfr. *Severi-Löffler,* Vorlesungen über algebraische Geometrie, Leipzig, Teubner, 1921, Anhang F). La teoria si estende però — come mostrerò altrove — anche alle curve riducibili connesse. Quest' estensione non ha importanza, nel caso presente.

si ottiene da un qualunque sistema segante la serie, con qualche maggior cura che nel caso delle curve irriducibili [57]).

La *dimensione* r di Σ diviene la dimensione r della serie: ed r eguaglia altresì il minimo numero di punti che posson essere fissati su C — alcuni, zero incluso, su alcune parti di C, altri sopra altre parti — per individuare un gruppo della serie.

È poi manifesto che i gruppi della serie data, passanti per punti fissati sulla curva, formano una serie lineare.

Il concetto posto è assolutamente invariante nelle trasformazioni birazionali di C [58]); ma, naturalmente, punti comuni alle parti di C potranno scomparire od apparire ex novo nelle trasformazioni birazionali.

Ciò non produce inconvenienti, appunto perchè C si considera totalmente sconnessa (cfr. colla nota [56]).

Questo mostra soltanto — e la cosa era chiara anche dal punto di vista proiettivo — che ogni punto comune a due parti di C va considerato come sovrapposizione di più (due almeno) punti distinti: il che è consueto anche nella geometria sulle curve irriducibili, ove ciò che è invariante è più il ramo che il punto [59]). Insomma, ogni incertezza nella interpretazione delle proprietà della serie e dei suoi gruppi, si dirime riferendosi ad un modello proiettivo di C, in uno spazio conveniente, dove le singole componenti della curva non abbiano punti multipli e sieno prive a due a due di punti comuni.

32. Il fondamento della nostra trattazione della teoria delle serie lineari sopra una curva riducibile, è il teorema che *ogni serie razionale di gruppi di punti sopra una curva, anche riducibile, sta in una serie lineare dello stesso ordine.*

Questa proprietà, contenuta per ciò che concerne le curve irriducibili, nel teorema di *Abel* per gli integrali abeliani di 1ª specie, è stata posta in esplicito ed opportuno rilievo da *Enriques* [60]), che ne ha dato la prima

---

[57]) Non è però detto che ogni gruppo della serie considerata su C abbia come imagine un gruppo effettivo di punti sulla curva. Così p. es. sopra una C costituita da due parti ognuna delle quali sia fondamentale pel sistema lineare Σ, ∞^r, senza che, tuttavia, esista in Σ qualche forma contenente C, le forme di Σ segano una g_0^r, nella quale non esistono che gruppi eccezionali (di infiniti punti). Sopra ogni trasformata birazionale di C si ha una g_0^r trasformata birazionale della precedente.

[58]) Una curva C' si dirà una trasformata birazionale di C, quando esiste una trasformazione razionale T, che muta una varietà algebrica irriducibile M, contenente C, in una varietà algebrica irriducibile M', contenente C', in modo che ad un punto generico di ogni parte irriducibile di C corrisponda in T un sol punto di C'; e viceversa. In particolare, a noi interessa il caso in cui M è una superficie irriducibile, contenente C.

[59]) Cfr. il mio Trattato citato, pag. 80. Se la curva C fosse parzialmente connessa, la invarianza del concetto di serie lineare varrebbe soltanto nei riguardi delle trasformazioni birazionali che non hanno punti fondamentali nei punti di connessione.

[60]) Rendic. del Circolo Matematico di Palermo, X 1895; pag. 30.

dimostrazione algebrico-geometrica. Essa consegue altresì dal teorema che una corrispondenza algebrica fra due curve algebriche, distinte o sovrapposte, che sia a valenza zero in un senso, lo è anche nel senso opposto [61]); e siccome questa proprietà, come si riconosce, vale a prescindere dalla irriducibilità delle curve considerate (purchè il concetto di serie lineare si ponga sopra una curva spezzata nel modo sopra indicato), così ne segue la proposizione affermata.

Essa permette, mercè l'identico concetto, che verrà seguito nel n. 44 per le serie di gruppi di punti sopra una superficie, di dimostrare che, se due serie lineari hanno in comune un gruppo totale, esse son contenute in una serie più ampia dello stesso ordine, donde poi segue *la unicità della serie lineare completa, che, sopra una curva riducibile, contiene un gruppo dato di punti, sia esso costituito da un numero finito o infinito di punti;* e quindi la transitività della relazione di equivalenza fra gruppi di punti di una curva riducibile, chiamandosi, al solito, *equivalenti* due gruppi di una medesima serie lineare (di cui uno od entrambi possono essere costituiti da infiniti punti).

Del resto, ai teoremi cui facciamo allusione, si può pure pervenire sul fondamento delle osservazioni che seguono.

Quando sopra una curva riducibile C, composta dalle parti irriducibili $C_1, C_2, \ldots, C_t$, si considera una serie lineare di ordine $n > 0$, in cui vi sieno gruppi generici (n. 31), cioè gruppi *variabili* di un numero *finito* di punti, ed è G_n uno di questi, G_n si decompone in un gruppo G_{n_1} $(n_1 \geq 0)$ su C_1, in un gruppo G_{n_2} $(n_2 \geq 0)$ su $C_2, \ldots$, in un gruppo G_{n_t} $(n_t \geq 0)$ su C_t; ed è chiaro (basta considerare un sistema lineare di forme segante la data serie) che $G_{n_1}, G_{n_2}, \ldots, G_{n_t}$ variano, sulle componenti rispettive, descrivendo serie lineari. Sicchè due gruppi equivalenti sopra C si decompongono in coppie di gruppi equivalenti sopra le componenti di C.

Viceversa, se due gruppi

$$G_n = G_{n_1} + \ldots + G_{n_t}\ , \quad G'_n = G'_{n_1} + \ldots + G'_{n_t}$$

si compongono con gruppi a due a due equivalenti sulle $C_1, \ldots, C_t$, cioè

$$G_{n_1} \equiv G'_{n_1}\ , \quad G_{n_2} \equiv G'_{n_2}, + \ldots, \ G_{n_t} \equiv G'_{n_t}\ ,$$

G_n e G'_n risultano equivalenti su C. Invero, considerate sulle $C_1, \ldots, C_t$ le serie lineari complete $g_{n_1}, \ldots, g_{n_t}$, che contengon le coppie di gruppi $G_{n_1}, G'_{n_1}; \ldots; G_{n_t}, G'_{n_t}$, la varietà delle t-ple di gruppi di queste t serie,

[61]) *Severi*, Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie (Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino LIV_2, 1903); n. 6. Ved. pure il mio citato Trattato, pagg. 200, 205.

è razionale, epperò G_n, G'_n, che appartengono a questa varietà, son congiungibili mediante una ∞^1 razionale di gruppi analoghi e son pertanto equivalenti su C, a norma del teorema premesso. Riassumendo:

Condizione necessaria e sufficiente perchè due gruppi di un numero finito di punti sieno equivalenti sulla curva riducibile C, è che si deconpongano in coppie di gruppi equivalenti sulle singole componenti irriducibili di C.

33. Premesso tutto ciò, occupiamoci dei mutui rapporti fra le proprietà della serie W, ricordate nel n. 30. E facciamo in proposito le seguenti osservazioni:

a) Due gruppi di una serie razionale γ di ordine virtuale n, sopra una superficie, son sempre equivalenti sopra qualche curva (irriducibile o riducibile) della superficie.

Invero, nello spazio lineare coi punti del quale si posson rappresentare i gruppi di γ, due punti son sempre congiunti da una retta. Onde sulla superficie f due gruppi di γ (costituiti da un numero finito o infinito di punti) appartengono sempre ad una serie razionale ∞^1, e sulla curva C (irriducibile o no), riempita dai punti dei gruppi di questa serie, i gruppi stessi sono equivalenti (n. 32).

Due gruppi (di un numero finito o infinito di punti) si diranno linearmente equivalenti sopra una superficie, quando sono equivalenti sopra una qualche curva (irriducibile o riducibile) della medesima.

b) Se due gruppi A, B di punti di f son linearmente equivalenti, esiste su f un fascio lineare $|D|$ di curve, che stacca, fuori dei punti base, sopra una curva C di f, sulla quale A, B sieno equivalenti, la serie lineare g^1_n (n ordine virtuale dei due gruppi) individuata su C da A, B. Un tal fascio vien segato su f da un fascio di forme, che segni su C la detta g^1_n; e si può sempre supporre che $|D|$ abbia qualche punto base P.

Ciò posto, se sulla generica D il gruppo della g^1_n (che essa determina su C) individua una serie lineare infinita, vi sarà un solo gruppo di questa serie distinto dal precedente e avente in P una molteplicità convenientemente fissata; onde i due gruppi individueranno su D una g^1_n razionalmente variabile con D. Il luogo di questa g^1_n è una involuzione razionale ∞^2 di gruppi di n punti su f; sicchè i suoi gruppi, pel teorema a), sono a due linearmente equivalenti.

Nelle ipotesi poste, i due gruppi hanno dunque una relazione di equivalenza più ampia di quella che risultava sopra le curve di f; e si potranno chiamare *superficialmente equivalenti.*

34. Le osservazioni precedenti, tenuto conto delle proprietà della serie W, c'inducono a porre la seguente definizione generale:

Si chiama *serie di equivalenza di gruppi virtuali di n punti sopra una superficie f* (ed n si chiama l'*ordine virtuale* della serie) una serie soddisfacente alle condizioni:

1) Due gruppi qualunque della serie son sempre linearmente equivalenti.

2) Dati due gruppi qualunque della serie, esiste sempre sopra qualche curva riducibile o irriducibile di f, una g_n^1 contenente i due gruppi e costituita tutta da gruppi della serie.

P. es. se f è razionale, la serie dei suoi punti è una serie di equivalenza (e viceversa); e, più in generale, è una serie di equivalenza di ordine n e di dimensione $2n$, la serie dei gruppi di n punti di f. Per $n = 2$ è noto (come ho detto nell' introduzione), che, viceversa, se la detta serie è razionale, lo è la superficie. Per n qualunque lo stesso fatto è stabilito nel successivo n. 46.

La serie canonica di una superficie irregolare è una serie di equivalenza.

Nella definizione non abbiamo posto nè la condizione della involutorietà (di cui gode W), nè la condizione della razionalità della serie (di cui pur gode W). Vedremo che la prima condizione in generale è conseguenza delle 1), 2); mentre resta incerto, come ho detto nella introduzione, se la seconda consegua pure necessariamente dalle 1), 2).

35. *Una serie di equivalenza è irriducibile.*

Invero, attesa l'algebricità delle condizioni che la definiscono, una serie di equivalenza V è costituita da un numero finito (≥ 1) di serie algebriche irriducibili di gruppi virtuali di n punti di f. Se vi fossero due componenti V', V'' della serie, e fosse Z l'eventuale loro intersezione (comprendente tutti i gruppi di n punti comuni alle due serie), presi rispettivamente in V', V'' due gruppi G', G'', fuori di Z, una qualunque g_n^1 congiungente entro V, i gruppi G', G'', non potrebbe stare in V', perchè se no G'' starebbe in Z; nè, similmente, potrebbe stare in V''. Cioè la g_n^1 non starebbe in V, contrariamente al supposto.

36. Diremo che una serie di equivalenza è *completa,* quando non è contenuta in una serie di equivalenza di maggior dimensione e dello stesso ordine (contenuta cioè *totalmente*).

È facile dimostrare che:

Ogni serie di equivalenza parziale è contenuta in (almeno) una serie di equivalenza completa.

Invero, se V non è completa, esisterà una serie di equivalenza più ampia V', che contiene totalmente V; se neppure V' è completa, esisterà una serie di equivalenza V'', che contiene totalmente V' (e V) ed è più ampia di V'; e così proseguendo, ma non indefinitamente, perchè la dimensione di una serie di equivalenza di dato ordine n, non può superare $2n$, dimensione della varietà di tutti i gruppi di n punti di f.

37. I gruppi di una serie di equivalenza possono invadere tutta la superficie f, oppure riempire soltanto una curva C (irriducibile o no) della f.

In questo ultimo caso i gruppi della serie di equivalenza formano su C una serie di gruppi equivalenti a due a due, e tale che la g_n^1 (n ordine della serie) congiungente, sopra C, due di essi, appartiene alla serie. Perciò la serie non è che una serie lineare g_n^r su C.

Viceversa, è chiaro che *ogni g_n^r sopra una curva C (riducibile o irriducibile) della superficie, è una serie di equivalenza.*

A norma dell'osservazione b) del numero 33, se una g_n^r di una curva C di f, è, sulla superficie, una serie completa di equivalenza, sopra le curve di un sistema lineare ∞^r che segni la serie, i gruppi della g_n^r sono linearmente isolati.

Diremo *serie lineare sopra una superficie* una serie di equivalenza, che non invada la superficie; mentre chiameremo *serie superficiale di equivalenza,* una serie di equivalenza, che invada la superficie.

Una serie superficiale di equivalenza, che sia *razionale,* si chiamerà una *serie principale sulla superficie.* Una serie principale d'ordine n e di dimensione r, si indicherà col simbolo I_n^r.

38. *Una serie di equivalenza è generalmente involutoria.*

Per la definizione di involutorietà di una serie di gruppi di punti di f, ci atteniamo a quanto già esponemmo nel n. 21.

Il teorema è evidente, se la serie è lineare. La data serie di equivalenza sia dunque una serie di equivalenza superficiale V. Dimostriamo prima il teorema per $r = 2$. Per un punto P di f o passan tutti i gruppi di V (nel qual caso P è fisso per la serie) o ve ne passano ∞^1 o un numero finito $\nu \geq 1$ (il che accade sempre, quando P è generico su f). Bisogna dimostrare che, nel secondo caso, quegli ∞^1 gruppi formano una serie lineare semplicemente infinita *sopra la superficie*; e, nel terzo caso, che $\nu = 1$.

Invero, nel secondo caso, sia C la curva riempita dagli ∞^1 gruppi. Considerati due gruppi distinti qualunque di V, passanti per P, esiste qualche g_n^1 che li congiunge entro V; e tale g_n^1, essendo costituita da gruppi aventi il punto *fisso* P, sta sulla curva C. Dunque due qualsiasi gruppi per P sono equivalenti sulla C, e inoltre ogni g_n^1, che li congiunga entro V, non esorbita da C: perciò su C i gruppi uscenti da P formano una g_n^1, che, sopra la superficie, è una serie di equivalenza. Se poi per P passa un numero finito ν die gruppi di V, dovrà essere $\nu = 1$, perchè se per P passassero due distinti gruppi, ogni g_n^1, che li congiungesse entro V, consterebbe di gruppi passanti per P, e si ricadrebbe nel caso precedente. Ciò premesso, supponiamo il teorema dimostrato per le serie di equivalenza di dimensione $> r$, e stabiliamolo per le serie di equivalenza di dimensione r (che sieno serie superficiali). I gruppi di una serie di equivalenza superficiale V, ∞^r, per un punto P di f, o sono tutti i gruppi della V o ∞^{r-1} o ∞^{r-2} (l'ultimo caso si verifica, se P è generico su f). In ogni caso la varietà V' di questi gruppi è tale che una g_n^1, che congiunga, entro V', due di essi, consta di gruppi aventi il punto fisso P, epperò appartiene a V'. Dunque V' è una serie di equivalenza, coincidente con V nel primo caso e di dimensione $< r$, nel secondo e nel terzo caso. Pertanto, il teorema è dimostrato. Il ragionamento non vale se *ogni* g_n^1 congiungente due gruppi di V riempie una curva, per cui son multipli gli eventuali punti comuni ai due gruppi. Cosa improbabile, che non ha nel seguito riflessi.

Dal ragionamento esposto segue che:

I gruppi di una serie di equivalenza passanti per più punti dati su f, formano generalmente una serie di equivalenza.

39. *Una serie razionale involutoria, di dimensione 2, è sempre una serie di equivalenza.*

La cosa è evidente, se la serie riempie soltanto una curva di f. Si tratti dunque di una serie V, che invada la superficie e sia n il numero dei punti *variabili*, nel suo gruppo generico.

Si può porre una corrispondenza birazionale tra i punti di un piano f^* e i gruppi di V. Ne risulta così una corrispondenza razionale $(1, n)$ tra f^* e f, in cui ad un punto A^* di f^* risponde un gruppo A di V. Sieno A, B due gruppi generici di V, ai quali corrisponderanno dunque due punti non fondamentali A^*, B^* di f^*. Alla retta $A^* B^*$ risponde su f una curva C, irriducibile o no, sulla quale i gruppi omologhi dei punti della retta costituiscono una serie razionale involutoria, cioè una g_n^1 contenente totalmente A, B. Pertanto A, B son congiunti, *entro* V, da qualche g_n^1. La conclusione si estende a due gruppi qualunque considerati come limiti di due gruppi generici e si estende altresì ad una serie V con punti fissi, in base all' osservazione fatta nella nota [54]).

Osservazione. Vale anche la reciproca del teorema precedente, cioè: *Ogni serie di equivalenza ∞^2 è razionale.*

La cosa è evidente per una serie che riempia una curva. Se la serie V invade f, sopra una superficie, che rappresenti birazionalmente i gruppi di V, le coppie di punti son congiunte da curve razionali della superficie, e però la superficie è razionale.

40. *Una serie involutoria generata dai gruppi d'intersezione delle curve di due sistemi lineari distinti, è una serie (razionale) di equivalenza.*

Sieno $|C|$, $|D|$ i due sistemi; V la serie dei gruppi (C, D), fuori di alcuni o di tutti i punti fissi per questi gruppi. Se uno dei sistemi è ∞^0, il teorema è evidente, perchè V riducesi ad una serie lineare sopra una curva. I due sistemi sieno dunque almeno ∞^1, così che V è una serie manifestamente involutoria e razionale, di dimensione almeno uguale a 2, che invade tutta la superficie. Sieno

$$A = (C_1, D_1), \; B = (C_2, D_2)$$

due gruppi di V, dati dalle coppie di curve C_1, D_1 e C_2, D_2 dei due sistemi. Se $C_1 = C_2$ o $D_1 = D_2$ è chiaro che A, B son congiunti da una g^1_n entro V. Sia dunque $C_1 \neq C_2$, $D_1 \neq D_2$. Consideriamo il fascio Σ_1, individuato entro $|C|$ delle C_1, C_2 ed il fascio Σ_2, individuato entro $|D|$ dalle D_1, D_2. I gruppi di intersezione delle curve dei due fasci (dai quali si escludan le eventuali intersezioni fisse, che sieno state escluse nel definire V), generano una serie razionale involutoria V', ∞^2, che contiene totalmente A, B. Perciò (n. 39) A, B son congiunti entro V', e dunque entro V, da una serie lineare, che li contiene totalmente.

41. Una serie di equivalenza superficiale può avere punti fissi, dai quali si può astrarre; e, viceversa, punti fissi si posson manifestamente aggiungere ai suoi gruppi, senza venir meno alle condizioni che defiscono la serie.

Invero, se si considera una g^1_n, che congiunga due gruppi *entro* una serie di equivalenza V, aggiungere a tutti i gruppi della serie un punto fisso P, significa aggiungere come componente, alla curva D riempita dai gruppi di quella g^1_n, il punto (curva eccezionale) P. E i gruppi della serie $g^1_n + P$ continuano ad essere equivalenti sulla curva $D + P$.

Ma può darsi pure che il gruppo generico G_n di una serie di equivalenza V, di ordine n, possegga un gruppo Γ_ν, di ν punti variabili sopra una curva fissa C di f, e costituenti ivi una serie di gruppi equivalenti. È questo p. es. il caso della serie W' considerata nel n. 23 e della serie canonica W di una superficie irregolare f, quando si esegue una trasformazione birazionale della f, che muta un punto in una curva eccezionale. Un punto del gruppo generico della serie canonica trasformata, varia allora sulla curva eccezionale.

Chiameremo *resto di una serie lineare, data sopra una curva C della superficie, rispetto ad una serie di equivalenza,* il cui gruppo generico G_n contenga parzialmente un gruppo Γ_ν, variabile in quella serie lineare, la serie ottenuta sopprimendo in ogni G_n i punti del gruppo Γ_ν, in quello contenuto. Vale il teorema:

Il resto di una serie lineare rispetto ad una serie di equivalenza, è ancora una serie di equivalenza.

Sia V la data serie di equivalenza, il cui G_n generico abbia Γ_ν variabile sulla curva fissa C. Presi due gruppi generici G_n, G'_n di V, essi son congiunti da (almeno) una g_n^1 formata da gruppi di V. I gruppi di questa g_n^1 riempiono una curva D, della quale fa parte, come componente, la C. Ma i gruppi Γ_ν, contenuti negli ∞^1 gruppi della g_n^1 sono equivalenti su C, epperò sono equivalenti, sulla curva riducibile D, i resti di questi gruppi rispetto alla g_n^1. Ciò significa che i gruppi $G_{n-\nu}$, $G'_{n-\nu}$ ottenuti da G_n, G'_n, astraendo dai relativi gruppi Γ_ν, Γ'_ν, son congiunti da una $g_{n-\nu}^1$ formata da gruppi della serie V', ottenuta da V astraendo, in ogni suo G_n, dal relativo Γ_ν. Dunque V' è una serie di equivalenza.

Poichè i gruppi di V, V' sono in corrispondenza birazionale, *se V è una serie principale, è una serie principale anche il resto di una serie lineare rispetto a V.*

42. Una serie, come quella del n. 41, generata dai gruppi di intersezione delle curve di due sistemi lineari, che è poi *l'insieme dei gruppi di dati livelli costanti di due funzioni razionali del punto della superficie,* si chiamerà una *serie principale intersezione completa.*

Oltre le serie principali intersezioni complete, vi sono (n. 41) *le serie principali resti di serie lineari rispetto alle intersezioni complete.*

Una serie di equivalenza ha carattere invariante relativo nelle trasformazioni birazionali di f; *se però la serie di equivalenza si intende sempre liberata dagli eventuali suoi punti fissi o dalle eventuali serie lineari, che sieno in essa parzialmente contenute, la serie medesima acquista carattere invariante assoluto nelle trasformazioni birazionali di f; e così il suo ordine.*

43. *Una serie razionale ∞^r di gruppi di n punti di una superficie, è sempre contenuta in una serie lineare o in una serie principale.*

Se la serie riempie soltanto una curva, il teorema è noto (n. 32). La serie V riempia dunque la superficie f. Astrarremo, senza ledere la generalità, dai punti fissi eventuali di V.

Cominciamo dal caso $r = 2$. Sia f^* un piano, i cui punti rappresentino birazionalmente i gruppi di V. Ai ν gruppi di V passanti pel generico punto P (x, y, z) dai f [62]), rispondono ν punti di f^*, variabili con P. Vice-

[62]) Per $\nu = 1$, il teorema è già stato dimostrato (n. 39).

versa, ad un generico punto di f^*, rispondono su f, n punti, variabili con quello e formanti un gruppo di V.

Ora la totalità dei gruppi di ν punti di un piano costituisce una serie principale; e questa serie è di più intersezione completa. Invero, il sistema lineare $\infty^{\nu+1}$ di grado ν, costituito dalle curve d'ordine ν del piano, che hanno un punto base $(\nu - 1)$ -plo e $\nu - 1$ punti base semplici generici, genera, con le intersezioni variabili delle sue curve a due a due, la $I^{2\nu}_{\nu}$ di tutti i gruppi di ν punti del piano, sicchè questa medesima serie può ottenersi dalle intersezioni variabili delle curve E_1, E_2 di due distinti sistemi lineari ∞^{ν}, contenuti nel sistema $\infty^{\nu+1}$. Le equazioni delle curve E_1, E_2, che si intersecano nei gruppi di ν punti, omologhi dei punti di f, in quanto le curve stesse dipendon razionalmente da P, sono della forma:

$$(14) \qquad E_1(x, y, z;\ \xi, \eta) = 0, \qquad E_2(x, y, z;\ \xi, \eta) = 0,$$

ove ξ, η son le coordinate di un punto mobile nel piano f^* ed E_1, E_2 son polinomi nelle 5 variabili.

Le (14) rappresentan *completamente* la corrispondenza $(\nu\ ,\ n)$ tra f ed f^*, nel senso che i punti di f^* omologhi del generico P son dati da *tutte* le soluzioni delle (14), *variabili* al variare di P. Pertanto i punti di f, che corrispondono al generico P^* di f^*, son dati da *tutte* le n soluzioni comuni alla $f = 0$ e alle (14), fuori delle intersezioni fisse.

Ora le (14) si possono scrivere sotto la forma

$$(15) \qquad \sum a_{ij}(x, y, z)\, \xi^i \eta^j = 0, \qquad \sum b_{ij}(x, y, z)\, \xi^i \eta^j = 0,$$

in cui a, b sono i polinomi in x, y, z, coefficienti delle due equazioni, considerate come polinomi in ξ, η. Il gruppo base (eventuale) costituito da punti e linee algebriche, comuni alle superficie, che si ottengono dalla prima delle (15), al variare dei parametri ξ, η, definisce un sistema lineare di superficie dello stesso ordine, in cui esse son contenute. E similmente dicasi del sistema di superficie rappresentato dalla seconda delle (15).

I due sistemi lineari staccati su f, fuori delle linee fisse, dai predetti sistemi lineari di superficie, son tali che due loro curve generiche si segano in n punti variabili e fra i gruppi di intersezione ci sono i punti V. Onde (n. 40) V è contenuta in una serie di equivalenza dello stesso ordine, che è razionale, perchè intersezione completa, ed è principale, perchè invade tutta la f, come V.

Passiamo al caso di una V razionale, costituita da ∞^3 gruppi di n punti.

Rappresentati birazionalmente i gruppi di V coi punti di uno spazio S_3, V^*, ai gruppi di V passanti per un generico punto P di f, rispondono in V^* punti di una curva D_P, di un certo ordine γ. Sia a una retta generica di V^*. Un piano generico α, per a, è segato dalle D_P in una serie ∞^2 di gruppi di ν punti; e si ha una corrispondenza (ν, n) fra α ed f. Il gruppo base di un sistema lineare $\infty^{\nu+1}$ generatore della $I^{2\nu}_{\nu}$ di α, può, su ogni a, esser razionalmente determinato mediante le intersezioni di α con certe rette genericamente *fissate* in V^*; cosicchè su ogni α rimane razionalmente determinato quel sistema generatore. Scegliamo ancora in V^* altre due rette generiche b_1, b_2. Per ogni gruppo G_ν di α, omologo di un P generico di f, vi è *una* curva E_1, del sistema generatore, passante per G_ν e pel punto $b_1 \alpha$; e *una* curva E_2, dello stesso sistema, passante per G_ν e pel punto $b_2 \alpha$. Variando α, le E_1, E_2 descrivon due superficie F_1, F_2, le quali si segano nelle rette fisse prescelte ed eventualmente nella retta base a. Ulteriormente, esse s'incontrano in D_P ed in una curva H_P, che, non avendo intersezioni variabili con a, consta di parti situate in piani per a. Sieno

$$(16) \qquad F_1(x, y, z;\ \xi, \eta, \zeta) = 0, \quad F_2(x, y, z;\ \xi, \eta, \zeta) = 0,$$

le equazioni delle superficie F_1, F_2, ciascuna delle quali dipende razionalmente da P; cosicche i primi membri delle (16) son polinomi nelle 6 variabili e ξ, η, ξ son le coordinate di un punto di V^*.

Le (16) rappresentano una corrispondenza algebrica T fra V^* ed f, nella quale è contenuta, come parte, la corrispondenza algebrica S, generata fra V^* ed f dalla corrispondenza birazionale tra V^* e V. Le S, T coinciderebbero soltanto se mancasse la curva H_P, di cui sopra; ma ciò non accadrà, in generale.

Il ragionamento sulle S, T acquista maggior chiarezza e più potente concisione, se ci riferiamo alla varietà M, ∞^5, delle coppie di punti di V^* e di f. Su questa, T ed S son rappresentate da due varietà a tre dimensioni, che denoteremo con le stesse lettere T, S. La corrispondenza T è la somma [63]) della S e di un'altra corrispondenza S_0, cioè T si scinde su M, in due varietà S, S_0.

Le varietà ∞^4 — diciamole N_α — ciascuna delle quali rappresenta su M le coppie di punti di un piano a e della superficie f, costituiscono su M un sistema lineare ∞^3 (sistema razionale d'indice 1); in particolare le N_α

[63]) Ved. pei concetti generali sulle corrispondenze, che qui si usano, il mio Trattato citato, pag. 191 e segg.

corrispondenti ai piani α per a, costituiscon su M un fascio lineare, la cui varietà base, ∞^3, Q, rappresenta le coppie di punti di a, f.

Ora, siccome la corrispondenza subordinata dalla T fra f ed un generico piano α per a, è tale che ad un generico P di f, rispondono ν punti variabili, omologhi di P nella S, e un certo numero di punti omologhi di P nella S_0, i quali sono intersezioni di α con H_P, così questi ultimi punti stanno tutti su a. Ciò significa che la varietà S_0 di M non è tagliata, fuori di Q, dalle N_α; epperò o essa sta su Q (o coincide con Q), oppure ogni sua parte irriducibile, non contenuta in Q, sta in *una* N_α.

L'ipotesi che S_0 coincida con Q si esclude subito, perchè in tal caso la curva H_P si riduce alla retta a, per ogni P, cioè la parte variabile dell'intersezione delle F_1, F_2 corrispondenti a P, è soltanto la curva D_P; onde, fatta astrazione dalla corrispondenza degenere S_0, che proviene da una retta base comune alle F_1, F_2, la S risulta *compiutamente* rappresentata dalle (16), fuori delle intersezioni fisse.

Se S_0 è subordinata a Q (ed è ivi un gruppo di un numero finito di punti, di linee, di superficie), i punti di f appartenenti ad S_0 posson invadere f, oppure no. Nel primo caso, gli omologhi in S_0 di un punto generico di f, son necessariamente fissi su a, onde (fatta astrazione dalla corrispondenza degenere S_0), le (16) rappresentan compiutamente S, fuori delle intersezioni fisse.

Nel secondo caso, i punti di f appartenenti ad S_0 posson riempire una curva (irriducibile o riducibile) C di f, o rimaner fissi. I punti che riempiono C, costituiscono ivi gruppi di una serie razionale (corrispondente ai punti di a) e son perciò equivalenti. La S è in tal caso il resto dei gruppi suddetti rispetto a T. Quanto ai punti fissi, se ne può astrarre.

Se infine le parti di S_0 son distribuite sopra un numero finito di varietà N_α, le curve H_P hanno le loro parti sopra un numero finito di piani fissi α, sicchè per un punto generico P^* di V^* non passano che n curve D_P e nessuna H_P; e siccome le H_P incontran gli α soltanto in punti di a, così i punti (variabili) del gruppo omologo di P^* nella T, son gli omologhi di P^* nella S ed eventualmente altri punti, corrispondenti a punti di a, e mobili sopra una curva (irriducibile o riducibile) di f.

Pertanto, gli n punti di f corrispondenti in S a P^* son tutte e sole le intersezioni *variabili* delle (16) e della $f = 0$, oppure essi provengono da queste intersezioni, astraendo da un gruppo mobile in una serie lineare.

In conclusione: o la S è rappresentata compiutamente dalle (16) od essa è resto di una serie lineare rispetto ad una T rappresentata compiutamente dalle (16). Nel primo caso ci conclude, come per $r = 2$, che V è contenuta totalmente in una serie intersezione completa, epperò principale; nel secondo caso, che è contenuta totalmente nel resto di una serie lineare rispetto ad una serie intersezione completa, ossia ancora (n. 41) in una serie principale.

Il teorema è così dimostrato per $r=3$. Per $r>3$ la dimostrazione non offre che complicazioni formali. Il concetto resta immutato. Si tratta sempre, nello S_r rappresentativo, di muovere dalla considerazione dei piani passanti per una retta.

Osservazione. Se la data serie razionale è una serie principale completa, il ragionamento precedente serve a provare ch'essa è una serie principale intersezione completa o il resto di una serie lineare rispetto ad una serie siffatta.

Da ciò deriva un'importante conseguenza. Consideriamo i gruppi di una serie principale completa I, che passano per più punti della superficie. Essi formano una serie di equivalenza V, che è intersezione completa o che è resto di una serie lineare rispetto ad un'intersezione completa, secondo che I gode della prima o della seconda proprietà. In ogni caso V è (n. 41) una serie di equivalenza razionale, cioè una serie principale o lineare. Dunque:

I gruppi di una serie principale completa, che passano per più punti della superficie, formano una serie principale o lineare.

Se la serie principale data non è completa, non si può andare al di là della conclusione che i gruppi della serie, passanti per più punti della superficie, formano generalmente una serie di equivalenza. Non si sa cioè se questa sia razionale.

44. Due gruppi virtuali A, B di n punti di f, si chiameranno *superficialmente equivalenti*, quando appartengono come gruppi totali ad una medesima serie principale.

Vale il *teorema fondamentale*:

Due gruppi A, B superficialmente equivalenti ad un terzo C, sono superficialmente equivalenti fra loro.

Sieno I, I' le serie principali di ordine n, contenenti per ipotesi le coppie A, C e B, C. La varietà V delle coppie di elementi (gruppi) di I, I' è una serie superficiale razionale di gruppi di $2n$ punti, epperò è contenuta in una serie principale completa I'' di ordine $2n$. Ora, se I, I' coincidono, A, B, C son senz'altro superficialmente equivalenti; se I, I' non coincidono, la I'' è di certo più ampia di V, perchè i gruppi di V per un generico punto P di f formano una varietà spezzata in due parti, costituite l'una dai gruppi di I per P, cui si associno tutti i gruppi di I'; l'altra dai gruppi di I'

per P (certamente non coincidenti tutti con quelli di I per P) cui si associno i gruppi di I. Mentre sappiamo che i gruppi di I'' per P formano una serie di equivalenza (n. 43), cioè (n. 35) una serie irriducibile.

I gruppi di I'' passanti per C (e ve ne sono certamente: p. es. quelli formati da C e dai gruppi di I o di I'), costituiscono una serie di equivalenza (n. 43) I''' che contiene I, I' ed è quindi una serie di equivalenza superficiale. Ad essa appartengono, come gruppi totali, i gruppi A, B. Che poi I''' sia razionale, e perciò che A, B sieno superficialmente equivalenti, segue da questo: che I'' o è una serie intersezione completa o si può considerare come resto di una serie lineare rispetto ad una serie principale intersezione completa (n. 43), e, manifestamente, i gruppi di una serie principale intersezione completa, passanti per più punti di f, formano una serie principale intersezione completa, sicchè anche I'' risulta intersezione completa o resto di una serie principale intersezione completa ed è perciò razionale (n. 41).

Il teorema dimostrato dà il modo di trasportare alle serie principali, almeno in una certa misura, il „metodo rapido" già ricordato, poichè da esso deriva *la unicità della serie lineare o principale cui appartiene un dato gruppo (che non sia isolato);* i concetti di somma e di differenza fra serie principali; ecc.

Si giunge in tal modo anche al nuovo invariante (se è finito) cui ho accennato nella introduzione; ma di tutto ciò mi occuperò altrove.

45. Voglio piuttosto osservare qui che la transitività della relazione di equivalenza non può riferirsi, senza opportune convenzioni, all'equivalenza lineare fra gruppi di punti di una superficie.

Se si sa soltanto che A, B son linearmente equivalenti a C, si conoscono in conseguenza due curve E_1, E_2 di f, le quali contengono rispettivamente una serie lineare, cui appartengono A, C come gruppi totali, ed una serie lineare cui appartengono B, C. Ma la varietà razionale delle coppie di elementi di queste due serie, può non essere ulteriormente ampliabile su f, ed allora manca la possibilità di ragionare come nel n. 44.

Un esempio di ciò vien offerto da una superficie non riferibile a rigata, che contenga due rette E_1, E_2 incidenti in un punto C. Due punti A, B, presi rispettivamente su E_1, E_2 son equivalenti a C, ma la serie delle coppie di punti di E_1, E_2 è una g_2^2 su $E_1 + E_2$, non ulteriormente ampliabile su f. Onde A, B non sono in generale equivalenti fra loro.

Però, anche questo caso non è in fondo eccezionale, perchè, volendo attribuire carattere invariante rispetto alle trasformazioni birazionali *della superficie,* alla nozione di equivalenza lineare, un gruppo non si può intendere linearmente *dato,* finchè non sia assegnata una curva su cui lo si vuol considerare. I punti A, B dell' esempio, sotto quest' aspetto, non sono equivalenti linearmente al medesimo punto C, ma a due punti accidentalmente coincidenti, dato l'uno su E_1 e l'altro su E_2. I due punti C posson difatti esser disgiunti con una trasformazione birazionale della f, che muti C in una curva eccezionale.

Se le cose s'intendono in tal modo, il teorema della transitività dell'equivalenza si estende anche all'equivalenza lineare.

46. Chiuderò dimostrando, come applicazione del concetto di serie di equivalenza e delle ***primissime*** proprietà da esso derivanti, che:

Una superficie f è razionale, se tale è la V_{2n} dei suoi gruppi di n punti.

Invero, la V_{2n} è una serie principale, perchè, attesa la sua razionalità, due gruppi qualunque di V_{2n} son congiunti da una g_n^1 appartenente alla varietà [n. 33, a)]. Pertanto i gruppi di V_{2n} passanti per $n-1$ punti di f formano una serie principale di primo ordine (n. 43), che invade tutta la f. Ciò significa che due punti qualunque di f son congiunti da qualche curva, la quale, contenendo una g_1^1, è razionale. Dunque f contiene infinite curve razionali segantisi a due a due, epperò è razionale.

Osservazione. Il risultato non si estende — almeno in questo modo — ad una varietà a più di due dimensioni, perchè la proprietà che due punti della varietà sien sempre linearmente equivalenti, non basta (ved. Introduzione) a caratterizzare le varietà razionali a più di due dimensioni.

(Ricevuto il 7 marzo 1932)