Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1932)

Artikel: Ueber die normalen Scharen meromorpher Funktionen mehrerer Variablen.
Autor: Saxer, Walter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5624

Ueber die normalen Scharen meromorpher Funktionen mehrerer Variablen

Von Walter Saxer, Zürich

Seit den bekannten Untersuchungen von *F. Hartogs* [1]) weiß man, daß die Existenzbereiche holomorpher Funktionen mehrerer Variablen nicht beliebig gewählt werden können, sondern gewissen Bedingungen genügen müssen. Dieser Umstand rührt davon her, daß die Punktmengen, in denen sich eine analytische Funktion mehrerer Variablen singulär verhält, nicht willkürlich sind, sondern gewisse Struktur-Eigenschaften zu erfüllen haben. *E. E. Levi* [2]) hat in zwei Abhandlungen bewiesen, daß analoge Sätze auch noch für meromorphe Funktionen gültig sind, daß also die Existenz von Polen und außerwesentlich singulärer Stellen nicht stört. Endlich zeigte *G. Julia* [3]) in einer bekannten Abhandlung, daß jene Punktmengen, in denen bestimmte, in gewissen Bereichen normale Scharen holomorpher Funktionen sich nicht mehr normal verhalten, ganz analogen Sätzen wie die von singulären Stellen holomorpher Funktionen gebildeten Punktmengen genügen müssen. Singuläre Punkte holomorpher Funktionen und irreguläre Punkte holomorpher Funktionenscharen weisen demnach auch in der mehrdimensionalen Funktionentheorie bemerkenswerte Analogien auf.

Es war das Ziel der vorliegenden Untersuchung, die Resultate von G. Julia auf *normale Scharen meromorpher Funktionen* zu übertragen. Es zeigte sich, daß dieselben erhalten bleiben, wenn man von außerwesentlich irregulären Stellen absieht, die von außerwesentlich singulären Punkten der meromorphen Funktionen herrühren. Als Grundlage der Untersuchungen von Hartogs, E. E. Levi und Julia diente ein Hauptsatz, der in allen 3 Fällen analog lautet. Sobald einmal dieser Hauptsatz gewonnen ist, können in allen 3 Fällen nach der gleichen Methode be-

[1]) Vergl. insbes.: Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, Mathem. Annalen, Bd. 62 (1905), S. 1—88 und Einige Folgerungen aus der Cauchy'schen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen, Münchener Sitzungs-Ber. 36 (1906), S. 223 ff.

[2]) a) Studii sui punti singulari essenziali delle funzione di una o più variabili complesse, Annali di Matematica, 3e serie, 17 (1909), p. 61—87; b) Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse, Annali di Matematica, 3e serie, 18 (1910), p. 69—79.

[3]) Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables, Acta matematica, 47 (1925), p. 53—115.

merkenswerte Folgerungen daraus gezogen werden. Infolge dieser Sachlage habe ich auf die Publikation der Beweise dieser Folgerungen verzichtet und lediglich den Hauptsatz ausführlich dargestellt.

Bekanntlich sind in den letzten Jahren in der Theorie der holomorphen Funktionen mehrerer Variablen wesentliche Fortschritte von *Carathéodory*, *Bergmann*, *H. Cartan*, *Behnke*, *Thullen*, *Welke* und andern erreicht worden, so daß gehofft werden darf, auch in der Theorie meromorpher Funktionen mit neuen Hilfsmitteln weiter zu kommen.

Schließlich füge ich noch bei, daß ich den Hauptsatz samt Beweis-Skizze in einer Note der C. R. der Akademie von Paris publizierte[4]).

§ 1

Im Folgenden werden wir uns auf meromorphe Funktionen mit zwei Variablen x, y beschränken, unsere Sätze lassen sich jedoch ohne weiteres auf meromorphe Funktionen von n Variablen übertragen, wobei n eine beliebige positive ganze Zahl $\geqq 2$ bedeutet.

Ein beliebiger, zusammenhängender Bereich B im x, y-Raum sei gegeben. Wir sagen, eine meromorphe Funktion $f(x, y)$ verhalte sich in diesem Bereiche regulär, wenn sie in keinem innern Punkte von B eine außerwesentliche oder wesentliche singuläre Stelle besitzt, hingegen darf sie Pole besitzen. Es sei nun eine Folge meromorpher Funktionen $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, ... gegeben. Wir treffen die folgende

Definition I: *Eine Folge in B regulärer meromorpher Funktionen $w_1 = f_1(x, y)$, $w_2 = f_2(x, y)$, ... konvergiert gleichmäßig in B, wenn die Bildpunkte w_1, w_2, ... auf der Riemann'schen Zahlenkugel für jeden innern Bereich von B gleichmäßig konvergieren.*

Bekanntlich ist dann die Grenzfunktion $f(x, y)$ ebenfalls eine in B meromorphe Funktion, die speziell ∞ betragen kann. Die obige Definition ist wie für meromorphe Funktionen von einer Variablen deshalb bequem, weil bei ihr die Pole genau gleich behandelt werden wie andere reguläre Punkte der Funktion. Für solche konvergente Folgen beweisen wir nun zwei Hilfssätze.

Um den 1. Hilfssatz möglichst einfach formulieren zu können, führen wir die folgende Bezeichnung ein: Die meromorphe Funktion $f(x, y) \not\equiv 0$ verhalte sich in der Umgebung des Nullpunktes regulär und es sei

$$f(0, 0) = 0.$$

[4]) *W. Saxer*, Sur les familles de fonctions méromorphes de plusieurs variables, C. R. de l'Académie des Sciences 193 (1931), p. 479—480.

D. h. $f(x,y)$ verhält sich dann in der Umgebung des Nullpunktes überhaupt holomorph. Nach dem klassischen Weierstraß'schen Vorbereitungssatz läßt sich $f(x,y)$ in der Umgebung des Nullpunktes in der folgenden Weise darstellen:

$$\text{Entweder gilt} \quad f(x,y) = x^p \, e^{\Phi(x,y)}$$
$$\text{oder} \quad f(x,y) = x^p \, (y^m + \varphi_1(x)\, y^{m-1} + \ldots + \varphi_m(x)\, e^{\Phi(xy)},$$

wobei p eine ganze, pos. Zahl bedeutet, die im 2. Fall Null sein kann. $\varphi_1(x), \ldots \varphi_m(x)$ sind analytische Funktionen einer Variablen, die sich in der Umgebung des Nullpunktes holomorph verhalten und wobei $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \ldots \varphi_m(0) = 0$. $\Phi(x,y)$ ist eine in der Umgebung des Nullpunktes holomorphe Funktion. Im 1. Fall werden die Nullstellen von $f(x,y)$ in der Umgebung des Nullpunktes durch die p-fach zu zählende Ebene $x = 0$ dargestellt. Im 2. Fall kommen zu diesem eventuell vorhandenen Null-Gebilde m andere Gebilde hinzu, die in der Umgebung des Nullpunktes folgende Darstellung besitzen:

$$y = c_1^{(i)} \, x^{\frac{1}{k_j}} + c_2^{(i)} \, x^{\frac{2}{k_j}} \ldots \ldots \quad 1 \leqq i \leqq m$$

kj bedeutet eine positive ganze Zahl, wobei $\Sigma k_j = m$. Wir bezeichnen diese Gebilde als die 0-Gebilde der Funktion $f(x,y)$ in der Umgebung des Nullpunktes. Nun gilt der

Hilfssatz (1): *Eine in der Kugel $|x|^2 + |y|^2 < \varepsilon$ gleichmäßig konvergente Folge regulärer, meromorpher Funktionen $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, ... mit $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x,y) = f(x,y) \not\equiv 0$ sei gegeben. Es sei $f(0,0) = 0$ und $f(x,y)$ besitze k Null-Gebilde, die sich im Nullpunkte schneiden. Dann besitzen die Funktionen $f(x,y)$ von einem gewissen Index an in genügend kleiner Umgebung des Nullpunktes ebenfalls k-Null-Gebilde, die sich so numerieren lassen, daß die Gebilde mit gleichem Index mit wachsendem n in dieser Umgebung gleichmäßig gegen ein wohlbestimmtes Nullgebilde von $f(x,y)$ konvergieren*[5]).

Beweis: Wir unterscheiden 2 Fälle je nach der Darstellung von $f(x,y)$ in der Umgebung des Nullpunktes.

1. Fall: Es sei

$$f(x,y) = x^k \, e^{\Phi(x,y)} .$$

[5]) Ein Teil der Aussagen dieses Hilfssatzes wurde für holomorphe Funktionen schon von *G. Julia* bewiesen. Vergl. loc. cit. 3), p. 62.

Für $y = y_0$ und $|x| < \varepsilon$, wobei $|y_0| < \eta$ und η, ε genügend klein, besitzt $f(x, y)$ nur die k-Nullstellen $x = 0$. Nun gilt für $|x| < \varepsilon$ gleichmäßig

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x, y_0) = f(x, y_0) \neq 0.$$

Nach einem bekannten Hurwitz'schen Satze besitzen dann die Funktionen $f_n(x, y_0)$ von einem bestimmten Index $N(y_0)$ an im Kreise $|x| < \varepsilon$ ebenfalls k-Nullstellen, die gegen $x = 0$ konvergieren müssen. Diese Schranke kann unabhängig von y_0 gewählt worden, wenn η genügend klein. Denn im andern Fall gäbe es 2 Folgen von Zahlen $y_0^{(n_1)}$, $y_0^{(n_2)}$, ... mit $\lim\limits_{n_k \to \infty} y_0^{n_k} = 0$ und $N(y_0^{(n_1)})$, $N(y_0^{(n_2)})$, ... $\lim\limits_{n_k \to \infty} N(y_0^{(n_k)}) = \infty$, so daß $f_{N_k}(x, y_0^{(n_k)})$ im Kreise $|x| < \varepsilon$ entweder mehr oder weniger als k-Nullstellen besäße. Diese Folge strebt aber gleichmäßig gegen $f(x, 0)$ und damit ist der Widerspruch hergestellt. Wir sind demnach sicher, daß die Funktionen $f_n(x, y)$ von einem wohlbestimmten Index N an im Dizylinder $|x| < \varepsilon$, $|y| < \eta$ genau k-Null-Gebilde besitzen. Daß diese k-Null-Gebilde in diesem Dizylinder gleichmäßig gegen $x = 0$ konvergieren müssen, kann man auf die gleiche indirekte Weise schliessen.

2. *Fall:* Es sei

$$f(x, y) = (y^k + \varphi_1(x) y^{k-1} + \dots + \varphi_k(x))\, e^{\Phi(x)}.$$

Wenn $|x_0| < \varepsilon$ und ε und η genügend klein, besitzt $f(x_0, y)$ im Kreise $|y| < \eta$ genau k Nullstellen. Nun kann man genau wie im 1. Fall schließen, daß sich im Dizylinder $|x| < \varepsilon$, $|y| < \eta$ von einem bestimmten Index an k-Nullgebilde von $f_n(x, y)$ befinden müssen. Ebenso müssen sich die Nullstellen von $f_n(x, y)$ von einem bestimmten Index $n > N$ an in beliebig kleiner Entfernung von Nullstellen von $f(x, y)$ befinden und umgekehrt muß es zu jeder solchen Nullstelle von $f(x, y)$ im Dizylinder ε, η in beliebig kleiner Umgebung Nullstellen von $f_n(x, y)$ für $n > N$ geben. Die Taylor-Entwicklungen, welche die Nullgebilde von $f_n(x, y)$ darstellen, bilden im Kreis $|x| < \varepsilon$ eine normale Funktionsschar. Dieselbe besitzt genau die k-Nullgebilde von $f(x, y)$ als Grenzfunktionen, da man im andern Fall sofort in Widerspruch mit den obigen Ausführungen käme. Damit ist aber der Hilfssatz in diesem Fall bewiesen.

Ist $\quad f(x, y) = x^p (y^m + \dots + \varphi_m(x))\, e^{\Phi(x)} \quad$ wobei $\; p + m = k$

so bringt man diesen Fall durch eine Koordinatentransformation auf den obigen Fall zurück.

Selbstverständlich gilt der Hilfssatz (1) nicht nur für die Nullgebilde, sondern für beliebige a-Gebilde, wie man durch die Bildung der Folge $f_n(x,y) - a$ resp. $\frac{1}{f_n(x,y)}$ im Falle von Polen sich überzeugen kann.

Hilfssatz (2): *Eine in einer Kugel, abgesehen von einer beliebig kleinen Umgebung des Zentrums x_0, y_0 gleichmäßig konvergente Folge regulärer meromorpher Funktionen $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ .... mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$ sei gegeben. Besitzt $f(x,y)$ im Punkte x_0, y_0 eine außerwesentlich singuläre Stelle, so muß dasselbe auch für die Funktionen $f_n(x,y)$ von einem gewissen Index $n > N$ an in beliebig kleiner Umgebung von x_0, y_0 der Fall sein.*

Beweis: Wir können $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ setzen. Wegen der Regularität der Funktionen $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, ... (abgesehen von der Umgebuug des Zentrums) und der gleichmäßigen Konvergenz verhält sich $f(x,y)$ in unserer Kugel, abgesehen vom Zentrum, regulär. Nach Voraussetzung besitzt sie im Nullpunkte die folgende Darstellung

$$f(x,y) = x^p \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} e^{\Phi(x,y)} .$$

Dabei bedeuten p eine ganze Zahl, $\Phi(x,y)$ eine in der Umgebung des Nullpunktes reguläre Funktion und $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 2 teilerfremde Algebroiden, d. h.

$$\begin{aligned} P(x,y) &= y^{m_1} + \varphi_1(x)\, y^{m_1-1} + \dots + \varphi_{m_1}(x) \\ Q(x,y) &= y^{m_2} + \psi_1(x)\, y^{m_2-1} + \dots + \psi_{m_2}(x) \quad , \end{aligned}$$

wobei die Funktionen $\varphi_i(x)$ $(i = 1, \dots m_1)$ und $\psi_k(x)$ $(k = 1, \dots m_2)$ sich in der Umgebung des Nullpunktes regulär verhalten. Die Resultante von $P(x,y)$ und $Q(x,y)$ ist eine in der Umgebung des Nullpunktes reguläre Funktion $R(x)$ mit $R(0) = 0$ und $R(x) \not\equiv 0$. Nach Voraussetzung schneiden sich 2 Gebilde $f(x,y) = 0$ und $f(x,y) = \infty$ im Nullpunkt, daher rührt die außerwesentlich singuläre Stelle. Unser Hilfssatz sagt aus, daß dasselbe mit 2 Gebilden $f_n(x,y) = 0$ und $f_n(x,y) = \infty$ in beliebig kleiner Umgebung des Nullpunktes der Fall sein muß, wenn der Index n genügend groß gewählt wird. Betrachten wir z. B. die Nullgebilde $P(x,y) = 0$ von $f(x,y)$. Zu jedem beliebig kleinen η gibt es sicher ein solches ε_2, daß für $|x| < \varepsilon_2$ die Nullstellen von $P(x,y)$ in den Kreis $|y| < \eta$ fallen. Es sei x^* ein solcher Wert, dann gehören dazu m y^*-Werte, so daß $P(x^*, y^*) = 0$. Wir betrachten eines der analytischen o-Gebilde, das zu x^* gehört. Dasselbe verhält sich im Kreis $|x| < \varepsilon_2$ regulär, abgesehen vom Nullpunkt, wo es eventuell eine Verzweigungsstelle von bestimmter Ordnung $\leqq m$ besitzen kann. Nach dem Hilfssatz (1) besitzt dann $f_n(x, y)$ von einem bestimmten Index an für $\varepsilon_1 < |x| < \varepsilon_2$ ein zu diesem Gebilde beliebig benachbartes o-Gebilde, das zum o-Punkt beliebig benachbarte Punkte eventuell zu singulären Punkten besitzen kann. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn der o-Punkt für das betrachtete o-Gebilde von $f(x,y)$ eine Verzweigungsstelle darstellt und das entsprechende o-Gebilde von $f_n(x,y)$ muß dann als einzige singuläre Stelle in der Umgebung des o-Punktes ebenfalls eine Verzweigungsstelle besitzen. Denn im andern Fall hätte $f_n(x,y)$ eine Nullstelle mit $|x| < \varepsilon_2$ und $|y| = \eta$. Dies kann jedoch nicht zutreffen, da dann auch $f(x,y)$ eine solche Nullstelle haben müßte. Ebenso ist klar, daß die Verzweigungsstellen von $f(x, y)$ und $f_n(x, y)$ die gleiche Ordnung besitzen müssen, da man sonst auf einen Widerspruch käme. Nach einem bekannten Konvergenzsatz von Weierstraß schließen wir nun, daß die Nullgebilde von $f_n(x, y)$ überhaupt für $|x| < \varepsilon_2$ gleichmäßig gegen die Nullgebilde von $f(x, y)$ konvergieren müssen. D. h. sie werden dargestellt durch die Gl.

$$P_n(x,y) = y^{m_1} + \varphi_1^{(n)}(x)\, y^{m_1-1} + \ldots\ldots \varphi_{m_1}^{(n)}(x) = 0,$$

wobei gleichmäßig für $|x| < \varepsilon_2 \quad \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_k^{(n)}(x) = \varphi_k(x).$

Dabei sind diese Funktionen im Kreis $|x| < \varepsilon_2$ regulär.

Ganz analog werden die Pole von $f_n(x, y)$ dargestellt durch

$$Q_n(x,y) = y^{m_2} + \psi_1^{(n)}(x)\, y^{m_2-1} + \ldots + \psi_{m_2}^{(n)}(x) = 0\ ,$$

mit entsprechenden Eigenschaften. Die Resultante dieser beiden Polynome sei $R_n(x)$, es gilt gleichmäßig in der Umgebung des Nullpunktes

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = R(x)\,.$$

Nach einem bekannten Satz von Hurwitz muß $R_n(x)$ in beliebiger Nähe des Nullpunktes eine Nullstelle besitzen, da $R(0) = 0$ und $R(x) \not\equiv 0$. Gerade diese Eigenschaft haben wir jedoch im 2. Hilfssatz behauptet.

Wir bezeichnen in Zukunft einen wie im Hilfssatz (2) betrachteten Punkt einen *außerwesentlich irregulären Punkt* der konvergenten Folge $f_1(x, y),\ f_2(x,y),\ \ldots.$

Definition II: *Eine Schar in einem zusammenhängenden Bereiche regulärer, meromorpher Funktionen sei gegeben. Sie wird als eine normale Schar in B bezeichnet, wenn man aus jeder Folge eine in einem beliebigen Teilbereiche von B gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen kann. Punkte, in denen sich die Schar nicht mehr normal verhält, werden als irregulär bezeichnet.* Eine Schar verhält sich normal in einem Punkte, wenn sie normal ist in einer gewissen Umgebung desselben. Zudem bezeichnen wir einen Punkt dann als *wesentlich irregulär,* wenn er nicht die im Hilfssatz (2) formulierten Eigenschaften besitzt, d. h. es soll nicht möglich sein, aus jeder Folge von Funktionen unserer Schar eine Teilfolge so auszuwählen, daß sie in der Umgebung dieser Punkte gleichmäßig konvergiert und diesen Punkt höchstens als außerwesentlich irregulären Punkt zuläßt.

Jetzt sind wir in der Lage, den in der Einleitung erwähnten Hauptsatz zu formulieren.

Hauptsatz: *Eine Schar meromorpher Funktionen verhalte sich normal in jedem Punkte $x = 0$, $0 < |y| < r$, jedoch sei $0, 0$ ein wesentlich irregulärer Punkt dieser Schar. Unter diesen Voraussetzungen kann man zu jeder beliebigeu kleinen Zahl η eine solche positive Zahl ε finden, daß zu jedem $|x_0| < \varepsilon$ mindestens ein $|y_0| < \eta$ gehört, so daß x_0, y_0 ein wesent lich irregulärer Punkt unserer Schar darstellt.*

D. h.: Die Punktmengen wesentlich irregulärer Punkte einer normalen Schar meromorpher Funktionen sind genau den gleichen Gesetzen unterworfen wie die wesentlich singulären Stellen meromorpher Funktionen, insbesondere können sie nicht isoliert vorkommen.

Beweis: Laut Voraussetzung gibt es eine im Bereiche $|x| < \varepsilon, \eta_1 < |y| < \eta_2$ gleichmäßig konvergente Folge $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, ... , die $0, 0$ als wesentlich irregulären Punkt besitzt. $f(x, y)$ sei die Grenzfunktion dieser Folge. Wir unterscheiden 3 Fälle je nach dem Verhalten der Grenzfunktion in Punkt $0, 0$.

1. $f(x, y)$ sei wesentlich singulär im Nullpunkt. Nach dem Hauptsatz von E. E. Levi[6]) besitzt dann die Punktmenge der wesentlich singulären Stellen von $f(x, y)$ in der Umgebung des Nullpunktes genau die für die wesentlich irregulären Punkte unserer Schar behauptete Struktur. Es ist aber klar, daß jeder dieser wesentlich singulären Punkte von $f(x, y)$ eine wesentlich irreguläre Stelle unserer Schar repräsentiert.

---

[6]) Vergl. loc. cit. 2a, S. 66.
Ein direkter Beweis, ohne die Resultate von *E. E. Levi* zu verwenden, ist mir leider nicht gelungen.

2. $f(x, y)$ sei regulär im Nullpunkt, $f(0, 0)$ werde mit a_0 bezeichnet. Der Nullpunkt werde als Zentrum einer Kugel K gewählt, so daß die Funktionswerte, welche von $f(x, y)$ in dieser Kugel angenommen werden, in einen beliebig kleinen Kreis mit a_0 als Zentrum fallen. Das Aeußere dieses Kreises ist dann nach einer bekannten Terminologie für $f(x, y)$ Ausnahmebereich, sofern die Punkte x, y nur in unserer Kugel K liegen dürfen. Betrachten wir nun die Folge

$$f_1(0, y),\ f_2(0, y),\ \ldots .$$

Nach Voraussetzung konvergiert sie gleichmäßig im Kreisring $\eta_1 < (y) < \eta_2$, der in unserer Kugel K liegen soll und besitzt den Nullpunkt als irregulären Punkt. Nach einem bekannten Satze nehmen dann die Funktionen in beliebiger Nähe dieses Punktes alle Funktionswerte an bis auf höchstens 2. Wir wählen insbesondere einen Funktionswert, der nicht zu diesen Ausnahmewerten gehört und im oben erwähnten Ausnahmebereich liegt. Diejenigen Funktionen, welche diesen Funktionswert a in beliebig kleiner Umgebung des 0-Punktes, also insbesondere im Kreis $|y| < \eta_2$ annehmen, seien mit f_1, f_2 .... bezeichnet. Zunächst liegen die Häufungspunkte dieser a-Stellen sicher im Kreise $|y| \leqq \eta_2$. Wir behaupten, daß sie mit dem Nullpunkt zusammenfallen müssen. Wäre dies nicht der Fall, so müßte $f(x, y)$ in diesem Kreis $|y| < \eta_2$ ebenfalls eine a-Stelle besitzen, was dank unserer Voraussetzungen über a ausgeschlossen ist. Bezeichnen wir nun eine solche a-Stelle im Kreise $|y| < \eta_2$ von $f_n(x, y)$ mit y_n. $y_n(x)$ ist nach dem Weierstraß'schen Vorbereitungssatz eine algebroide Funktion, die sich in einem genügend kleinen Kreise C: $|x| < \varepsilon$ mit dem Nullpunkt als Zentrum in folgender Weise verhalten muß:

1. Entweder man kann $y_n(x)$ für jede Funktion $f_n(x, y)$ im Kreise C fortsetzen, ohne mit y über den Kreisrand $|y| = \eta_2$ hinaus zu gelangen, oder

2. wie klein man auch diesen Radius wählt, immer fällt y_n außerhalb dieses Kreises.

Der 2. Fall ist ausgeschlossen. Dann müßte $f_n(x, y)$ eine a-Stelle mit $|x| < \varepsilon$, $y = |\eta_2|$ besitzen und dies wäre wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge in diesen Punkten auch für $f(x, y)$ der Fall.

Im 1. Fall spielt der Kreis C die gewünschte Rolle. Denn zu einem beliebigen x^*-Wert gehört dann für jede Funktion $f_n(x^*, y)$ ein y-Wert mit $|y_n| < \eta_2$, so daß $f_n(x^*, y) = a$. Diese Punkte besitzen einen Häufungswert y im Kreise η_2 und der Punkt kann unmöglich regulär sein für unsere Folge. Denn $f(x,y)$ müßte in diesem Punkt den Wert a annehmen. Ebenso ist gemäß unseren Bezeichnungen klar, daß dieser Punkt eine wesentlich irreguläre Stelle für unsere Folge darstellt.

3. $f(x,y)$ besitze im Nullpunkt eine außerwesentlich singuläre Stelle. Da der Nullpunkt keine außerwesentlich irreguläre Stelle für unsere Folge sein darf, kann nach unserem Hilfssatz (2) der Nullpunkt kein isolierter irregulärer Punkt für unsere Folge sein. Es gibt also sicher eine Punktfolge

$$x_1 y_1, \; x_2 y_2, \; \ldots\ldots, \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = 0$$
$$\lim_{n \to \infty} y_n = 0$$

in der sich unsere Funktionsfolge irregulär verhält. Betrachten wir nun an Stelle der Folge $f_1, f_2, \ldots\ldots$ die Folge $f_1 - f, f_2 - f, \ldots\ldots$ f darf in $x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots\ldots$ regulär angenommen werden, da ja der Nullpunkt nur eine außerwesentlich singuläre Stelle für $f(x,y)$ sein soll. Diese Punkte sind demnach immer noch irreguläre Punkte für unsere Folge, deshalb auch der Nullpunkt als Häufungspunkt dieser Folge. Die Grenzfunktion dieser 2. Folge ist 0, man kann deshalb den 2. Fall anwenden und schließen, daß zum mindesten die Punktmenge der irregulären Punkte dieser 2. Folge die behauptete Struktur besitzt. Nun verhält sich $f(x,y)$ in diesen Punkten regulär, deshalb müssen sie auch irreguläre Punkte der ursprünglichen Folge $f_1, f_2, \ldots\ldots$ darstellen. Ebenso ist klar, daß es sich nicht um außerwesentlich irreguläre Punkte handelt, da sie ja nicht isoliert liegen.

Damit ist der Beweis in allen drei Fällen geleistet.

§ 2

Wie wir schon in der Einleitung bemerkten, kann man aus diesem Hauptsatz eine Reihe von Konsequenzen ziehen, deren Beweise genau gleich geführt werden können wie bei den entsprechenden Aussagen von Hartogs, E. E. Levi und Julia. Wir beschränken uns deshalb darauf, diese Sätze zusammenzustellen.

1. Es sei E die Menge der wesentlich irregulären Punkte einer normalen Schar meromorpher Funktionen und 0 ein beliebiger Punkt. Es existiert kein Punkt P der Menge E so, daß die Distanz OP in diesem Punkte ein relatives Maximum aufweist.

2. Die Menge E der wesentlich irregulären Punkte einer normalen Schar meromorpher Funktionen kann keine perfekte, isolierte, vollständig im Endlichen gelegene Teilmenge enthalten.

3. Wenn eine Schar meromorpher Funktionen sich normal oder außerwesentlich irregulär in allen Punkten einer geschlossenen Hyperfläche des 4 dim. Raumes verhält, so sind die innern Punkte dieser Fläche entweder regulär oder außerwesentlich irreguläre Punkte der betreffenden Schar.

4. Ein beliebiger, auf einen Kreis konform abbildbarer Bereich $\varDelta$ in der x-Ebene, ebenso $\varDelta'$ mit dem Rande C' in der y-Ebene und eine Schar meromorpher Funktionen im abgeschlossenen 4 dim. Bereich $\varDelta$, $\varDelta'$ seien gegeben. Die Schar verhalte sich normal oder außerwesentlich irregulär in folgenden Punkten:

a) in jedem Punkt x, y, wobei x im Innern von $\varDelta$ und y auf C'.

b) in jedem Punkt a, y, wobei a ein gewisser Punkt von $\varDelta$ und y in $\varDelta'$ oder auf C'.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Schar normal oder außerwesentlich irregulär in jedem Punkt x, y, wobei x ein innerer Punkt von $\varDelta$ und y in $\varDelta'$ oder auf C' liegt.

Eine Schar meromorpher Funktionen verhalte sich normal oder außerwesentlich irregulär im Bereich 0, y, wobei y einen innern Punkt eines beschränkten Bereiches $\varDelta'$ der y-Ebene mit dem Rande C' darstellt. Zu jedem Punkt y_0 dieses abgeschlossenen Bereiches $\varDelta'$ gehört dann ein wohlbestimmter größter R_{y_0}, so daß die gegebene Schar sich noch normal oder außerwesentlich irregulär im Bereich $|x| < R_{y_0}$, y_0 verhält. Für $|x| = R_{y_0}$, y_0 existiert mindestens ein wesentlich irregulärer Punkt dieser Schar. Die Funktion R_y erfüllt eine Reihe von Eigenschaften, die wir im Folgenden zusammenstellen wollen.

5. R_y ist halbstetig nach unten. D. h. zu jeder beliebig kleinen Zahl ε existiert ein solches δ, daß für $|y - y| < \delta$, $R_y \geqq R_{y_0} - \varepsilon$.

Wenn eine reelle Funktion p_y der Variablen y_1, y_2 $(y = y_1 + iy_2)$ existiert, die folgende Bedingungen erfüllt:

a) auf C'

$$0 < p_y \leqq R_y$$

b) im Innern von $\varDelta'$

$$\frac{\partial^2 \log p_y}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \log p_y}{\partial y_2^2} = 0.$$

Dann gilt für den abgeschlossenen Bereich $\varDelta'$

$$p_y \leqq R_y.$$

Wenn in einem einzigen Punkte von Δ' in der letzten Ungl. das Gleichheitszeichen richtig ist, so gilt dies für jeden Punkt von Δ'.

Wenn R_y partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung nach y_1 und y_2 zuläßt, genügen dieselben der folgenden Ungleichung

$$\frac{\partial^2 \log R_y}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \log R_y}{\partial y_2^2} \leqq 0.$$

6. Es sei 0, 0 ein Punkt der Menge E der wesentlich irregulären Punkte einer normalen Schar meromorpher Funktionen. Es existiere eine solche Umgebung $|x| < r$, $y < r'$ des Nullpunktes, daß in jeder Ebene $x = \xi$, wobei $|\xi| < r$, höchstens ein Punkt ξ, η mit $|\eta| < r'$ der Menge E sich befindet. In diesem Fall existiert zu jedem genügend kleinen Wert $x = \xi$ genau ein Wert $y = \varphi(\xi)$, sodaß der Punkt ξ, η zur Menge E gehört. Die Funktion $\varphi(\xi)$ verhält sich regulär in der Umgebung des Nullpunktes.

Wenn unter sonst gleichen Voraussetzungen in jeder Ebene ξ, wobei $|\xi| < r$ n wesentlich irreguläre Punkte ξ, η_1 $\xi, \eta_2 \ldots \xi, \eta_n$ mit $|\eta_i| < r'$ liegen, dann sind die elementar symmetrischen Funktionen von $\eta_1, \ldots \eta_n$ reguläre Funktionen von ξ in der Umgebung des 0-Punktes. D. h. die Funktionen $\eta_i(\xi)$ verhalten sich regulär in der Umgebung des Nullpunktes und besitzen denselben eventuell als Verzweigungspunkt.

7. Damit im Bereiche $\varphi < 0$ oder $\varphi > 0$, wobei $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ eine Hyperfläche im 4 dim. Raume darstellt, eine Schar meromorpher Punkte existiere, die sich in diesem Punkte normal oder außerwesentlich irregulär verhalte, ist notwendig, daß der untenstehende Ausdruck $C[\varphi]$ auf der ganzen Hyperfläche ein konstantes Vorzeichen besitze. Wenn $C[\varphi] < 0$, dann kann die Schar sich höchstens in $\varphi > 0$ normal oder außerwesentlich irregulär verhalten. Ist $C[\varphi] > 0$, so liegen die betreffenden Punkte in $\varphi < 0$.

$$C[\varphi] = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right]$$

$$- 2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_2}\right) + \right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial y_1}\right)\right].$$

Damit in jedem Bereiche $\varphi < 0$ und $\varphi > 0$ eine Schar meromorpher Funktionen existiere, normal oder außerwesentlich irregulär in jedem Punkt dieser Bereiche, muß $C[\varphi] = 0$ sein.

Auf Umkehrungen dieser Sätze hoffen wir bei späterer Gelegenheit zurückkommen zu können.

(Eingegangen den 29. Februar 1932)