Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 4 (1932)

Artikel: Quelques remarques sur le problème des comètes.

Autor: Tiercy, Georges

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5620

Quelques remarques sur le problème des comètes

par GEORGES TIERCY, Genève.

I. Introduction

1. Il s'agit ici d'un problème ancien: celui des fréquences relatives des orbites cométaires elliptiques et hyperboliques. Il est évidemment étroitement lié à cet autre problème, qui consiste à se demander si les comètes doivent être considérées comme appartenant depuis toujours au système solaire, ou comme provenant des espaces interstellaires.

On connaît les solutions de Laplace [1]), Kant [2]), Faye [3]), Davis [4]), Schiaparelli [5]), Fabry [6]), Fayet [7]), etc. Les avis sont divergents, quoique on semble tendre actuellement à rattacher les comètes au système solaire. Mais la question est loin d'être épuisée; et il est permis d'y apporter quelques remarques nouvelles.

II. Hypothèses, et condition de visibilité

2. *Hypothèse fondamentale de ce travail.*

Il s'agit de se rendre compte s'il existe des raisons qui rendent très rares les comètes hyperboliques, et parmi celles-ci celles dont l'excentricité n'est pas très voisine de l'unité.

Le point de départ consiste à supposer que les comètes « naissent » à une très grande distance du Soleil, par exemple à une distance égale à 40.000 ou 50.000 fois celle qui sépare la Terre du Soleil. Ce nombre, très grand, est pris arbitrairement; en réalité, cette distance initiale est choisie très grande par rapport aux dimensions du système solaire, mais

---

[1]) Connaissance des Temps 1816: Sur les Comètes.
[2]) Voir les Hypothèses cosmogoniques, de *M. C. Wolf.*
[3]) Voir les Hypothèses cosmogoniques, de *M. C. Wolf.*
[4]) Philosophical Magazine, sept. 1870 et janvier 1871: On the probable character of Cometary orbits.
[5]) Bulletin astronomique, tome VII, p. 285.
[6]) Annales de la Faculté des Sciences de Marseille, tome IV, 1895: Etude sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes.
[7]) Thèse, Paris 1906: Recherches concernant les excentricités des comètes.

cependant assez faible pour que l'action attractive du Soleil l'emporte de beaucoup sur l'action des étoiles[8]).

L'hypothèse fondamentale de tout le raisonnement est donc que les comètes sont des corps étrangers au système solaire, qui n'y font apparition que par suite de circonstances fortuites; par exemple, dans sa trajectoire, la comète s'approche assez du Soleil pour que l'action de ce corps devienne prédominante; la comète est alors captée temporairement ou définitivement par le Soleil; elle est incorporée au système solaire[9]).

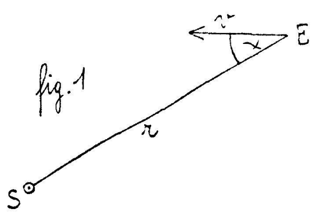
3. *Condition de visibilité.*

En outre, toutes les comètes connues n'ont qu'une faible clarté; elles ne deviennent visibles qu'au voisinage de leur périhélie, *à condition* que la distance périhélie ϱ soit de l'ordre de grandeur de la distance Terre-Soleil. Si donc on désigne par r la distance qui sépare le Soleil du point d'émergence de la Comète, et si on considère le rapport $a = \frac{r}{\varrho}$ de r à la distance périhélie, il faut, pour que la comète soit observable, que ce rapport soit plus grand qu'une certaine limite inférieure; en faisant par exemple $r = 40.000$ et $\varrho < 4$, cette limite serait égale à $n = 10.000$ unités. C'est là ce qu'on peut appeler la *condition de visibilité;* elle sera en général nécessaire, mais pas forcément suffisante; car il faudrait tenir compte encore de la luminosité du corps.

Ne sont pas reconnus comme comètes les corps qui donneraient une distance périhélie ϱ plus grande que 4; ils existent aussi bien que ceux pour lesquels $\varrho < 4$ et qui seront dénommés comètes; mais ils restent invisibles, et on les ignore.

4. *Hypothèses supplémentaires sur α et v.*

Soit toujours r la distance du Soleil au point d'émergence E de la comète (fig. 1);



r est supposée donnée, 40.000 par exemple. Les comètes qui naissent en E auront une vitesse relative v (relative au Soleil), et dont la direction fait un angle α avec le rayon vecteur $S\,E$.

Tous les angles α *aigus* sont possibles; on les suppose également vraisemblables, ou aussi fré-

[8]) Il convient alors de ne pas dépasser 100.000 unités, puisque α Centaure est à 4 années-lumière, et qu'un parsec (206.265 unités astronomiques) vaut $3^1/_4$ années-lumière. On pourra choisir par exemple, 40.000 ou 50.000.

[9]) C'était l'idée de Davis.

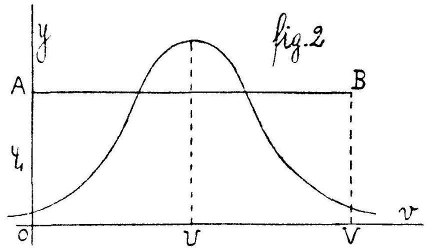
quents les uns que les autres; nous verrons plus loin dans quelle mesure cette hypothèse sera restreinte par le jeu même des données du problème.

Toutes les valeurs de v seront également probables, sans pouvoir cependant dépasser un certain maximum V, dont l'ordre de grandeur est comparable à la vitesse propre de la Terre sur son orbite; par exemple, on pourrait faire $V = 60$ km par sec. Cette hypothèse de l'égale fréquence de toutes les vitesses relatives est très arbitraire; il serait peut-être plus naturel d'admettre une certaine vitesse, normale pour ainsi dire, dont la fréquence serait maximum; une autre vitesse aurait alors d'autant moins de probabilité qu'elle s'écarterait davantage de cette vitesse « normale ».

Par exemple, la loi de probabilité d'une vitesse v pourrait être représentée par la formule:

$$\varphi(v)\, dv = e^{-g(v-U)^2}\, dv$$

où g serait une constante; la courbe de probabilité $y = \varphi(v)$ de v serait la cloche de la figure 2.



Alors que si on fait $\varphi(v) = \text{const.} = \varphi_1$ pour v comprise entre zéro et V, la courbe est remplacée par le segment de droite AB.

L'hypothèse $\varphi(v) = \text{const.}$ est celle qui a déjà été utilisée par Laplace; elle est évidemment criticable. Mais, quoi qu'il en soit, en l'absence de toute estimation sur la vitesse «normale» U, nous en resterons pour l'instant à l'hypothèse arbitraire de l'égale vraisemblance des vitesses v au-dessous d'un certain maximum V, après lequel elles deviennent impossibles. Nous désignerons le problème ainsi présenté par « le problème V »; et nous lui consacrerons les parties III, IV et V du travail.

III. Le problème V

5. D'après les données initiales (r, α, v), il faut déterminer les éléments de l'orbite cométaire, en particulier la distance périhélie ϱ et l'excentricité e.

Le problème a été posé, à peu près sous cette forme, par M. W. Trabert, dans son ouvrage *Lehrbuch der kosmischen Physik* [10]). L'auteur

[10]) Berlin, Teubner 1911.

se donne la distance ϱ ou le rapport $a = \frac{r}{\varrho}$ (ce qui revient au même); puis il regarde les directions α qui assurent cette valeur de ϱ comme également probables; et il arrive à l'équation

$$\sin \alpha = \frac{\varrho}{r} \sqrt{\frac{e + 1}{e - 1}},$$

qui n'est qu'approchée. Mais une telle analyse semble bien insuffisante.

On montre immédiatement (voir N° 6) que l'équation rigoureuse qui lie entre eux les éléments (a, α, e) est:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{e + 1}{e\,(a^2 - 1) - (a - 1)^2} = \text{fonction décroissante de } e,$$

et que les angles α ne sont pas tous possibles ; certaines valeurs de α sont exclues, ϱ étant donnée.

Il faut alors voir si les combinaisons (v, α) admissibles, qui vérifient *la condition de visibilité* du N° 3, et qui sont par supposition également possibles (hypothèses du N° 4), donnent beaucoup plus souvent des comètes à orbites elliptiques que des comètes à orbites hyperboliques, et si les excentricités sont beaucoup plus souvent très voisines de l'unité que sensiblement différentes de 1.

Tel est le problème.

6. *Restriction sur* α. *Séparation des orbites elliptiques et hyperboliques.* Prenons l'équation de la trajectoire sous la forme:

$$r = \frac{\varrho\,(1 + e)}{1 + e \cos \theta}, \tag{1}$$

dans laquelle e doit être positif, de manière que le rayon vecteur passe par son minimum ϱ au moment où l'angle θ est nul. On a:

$$\operatorname{tg} \alpha = r \frac{d\theta}{dr}, \text{ comme on sait; donc:}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta},$$

ou bien, en remplaçant θ par sa valeur tirée de (1) en fonction de $\frac{r}{\rho} = a$:

$$(2) \quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{e + 1}{e\,(a^2 - 1) - (a - 1)^2} = \text{fonction décroissante de } e, \\ \text{ou bien} \\ \sin^2 \alpha = \dfrac{e + 1}{(e - 1)\, a^2 + 2\, a}\,. \end{cases}$$

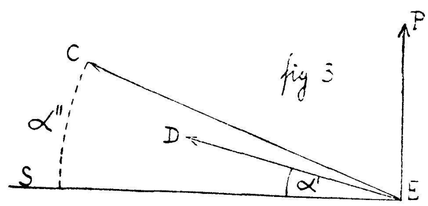
Ainsi e ne peut varier (ρ ou a étant connu) que de

$$e = \frac{(a - 1)^2}{a^2 - 1} \quad \text{à} \quad e = \infty;$$

l'angle α suivant, en décroissant, de $\alpha = 90^0$ à $\alpha = \alpha'$ tel que

$$\operatorname{tg}^2 \alpha' = \frac{1}{a^2 - 1}\,.$$

En considérant la figure (3), on voit que *toutes les directions comprises dans l'angle* $\widehat{SED}$ *sont impossibles*, c'est-à-dire qu'aucune d'entre elles ne peut donner un ρ égal à la valeur choisie. On constate ainsi tout de suite que l'hypothèse de la vraisemblance égale des directions donnant une certaine valeur de ρ est absurde.



Le domaine des valeurs possibles de α est donc quelque peu restreint par l'effet de la condition de visibilité, ρ étant donnée.

Nous admettrons (mais c'est encore bien arbitraire) cette égale vraisemblance pour les directions restantes, remplissant l'angle $\widehat{DEP} = 90^0 - \alpha'$; et soient $\widehat{CEP} = 90^0 - \alpha''$ le secteur relatif aux orbites elliptiques ($e < 1$), et $\widehat{CED} = \alpha'' - \alpha'$ le secteur relatif aux trajectoires hyperboliques ($e > 1$); la direction $\overline{EC}$ ($\alpha = \alpha''$) correspond à $e = 1$. On a, d'après l'équation (2):

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{1}{\sqrt{a - 1}}, \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}\,.$$

Ces valeurs sont très petites, a étant un grand nombre; avec $a = 10.000$ par exemple, α'' vaut à peu près $0^0, 58$ ou moins de 35 minutes d'angle.

Il s'ensuit que *le secteur utile* $\widehat{PED}$ *est presque uniquement relatif aux trajectoires elliptiques;* et les excentricités de celles-ci varient entre les limites $e = \frac{(a - 1)^2}{a^2 - 1}$ et 1; soit, dans le cas de $a = 10.000$, entre 0,9998 et 1; ces limites sont donc très rapprochées.

Rappelons que, si on donne a, cela veut dire qu'on suppose ϱ connu; si ϱ tend vers zéro, a augmente indéfiniment et α' tend vers zéro.

Les trajectoires hyperboliques ont à leur disposition le secteur $\widehat{CED} = \alpha'' - \alpha'$, très petit; mais leurs excentricités peuvent théoriquement varier de 1 à $+\infty$.

Nous reviendrons sur cette séparation des deux secteurs à orbites elliptiques ou hyperboliques. Faisons cependant tout de suite la remarque suivante: les directions au-dessous de $\overline{ED}$ (fig. 3) étant impossibles, il semble probable qu'une direction α *donnant la valeur voulue de* ϱ *est d'autant moins vraisemblable* qu'elle est plus proche de $\overline{ED_\varrho}$; ceci accroîtrait la probabilité des orbites d'excentricité voisine de 1.

Il est bien entendu qu'il n'est pas question ici des perturbations planétaires ultérieures.

7. *Les équations du problème dans son ensemble.*

Reprenons le problème dans son ensemble. Nous avons établi l'équation (2); c'est une des équations nécessaires; nous emprunterons l'autre au théorème des forces vives. D'après celui-ci, si K désigne la constante keplérienne, la différence $\left(\frac{v^2}{K_2} - \frac{2}{R}\right)$ est constante.

En outre, si c est la constante des aires et p le paramètre de l'orbite, on a:

$$p = \varrho\ (1 + e),$$
$$K^2 = \frac{c^2}{p} = \frac{u^2 \varrho^2}{\varrho (1 + e)} = \frac{u^2 \varrho}{1 + e},$$

formule dans laquelle u est la vitesse avec laquelle le corps passe à son périhélie. On tire de là:

$$\frac{u^2}{K^2} = \frac{1 + e}{\varrho};$$

par conséquent, la constante des forces vives $\left(\frac{v^2}{K^2} - \frac{2}{R}\right)$, estimée d'après la valeur qu'elle prend au périhélie, est égale à

$$\frac{1+e}{\varrho} - \frac{2}{\varrho} = \frac{e-1}{\varrho}.$$

En résumé, en posant toujours $\frac{r}{\varrho} = a$, l'équation des forces vives s'écrit :

$$\frac{v^2}{K^2} - \frac{2}{R} = \frac{e-1}{\varrho}; \quad \frac{v^2}{K^2} r - \frac{2r}{R} = a(e-1);$$

et comme, au point d'émergence, $R = r$, il vient :

$$\frac{v^2}{K^2} r - 2 = a(e-1). \tag{3}$$

Dans cette égalité, remplaçons la quantité K^2 par sa valeur connue $v_0^2 r_0$, où v_0 et r_0 désignent la vitesse moyenne de la Terre et sa distance moyenne au Soleil. Alors, en posant :

$$A = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{r}{r_0} - 2, \tag{4}$$

où v est alors la vitesse au point d'émergence, A est une donnée du problème, puisque r est la distance, supposée connue et égale à 40.000 par exemple, qui sépare le Soleil du point d'émergence.

Suivant les grandeurs des quantités $\frac{r}{r_0}$ et $\frac{v}{v_0}$, cette donnée A pourra varier entre -2, sa limite inférieure, et un très gros nombre N, 40.000 ou 80.000 par exemple.

Pour trouver nos inconnues, e et a, nous aurons donc à notre disposition la formule (2) et la formule (3); écrivons cette dernière sous la forme :

$$a(e-1) = A. \tag{5}$$

Eliminons, entre ces deux relations, l'inconnue a; il vient immédiatement, pour déterminer l'excentricité, l'équation:

$$(6) \qquad e^2 = 1 + A(A+2)\sin^2\alpha;$$

après quoi la distance périhélie ϱ sera déterminée par (5):

$$(7) \qquad \frac{r}{\varrho} = a = \frac{A}{e-1}.$$

Rappelons que la donnée α exprime un angle *aigu* quelconque, pourvu qu'il soit compris entre 90^0 et α' tel que $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$, comme on l'a vu au N° 6; tandis que A est soumis aux restrictions:

$$-2 \lesssim A \lesssim N.$$

Pour réaliser la condition de visibilité du N° 3, il faut que la quantité a dégagée de (6) et (7) soit supérieure à une certaine limite inférieure, d'ailleurs très grande, que nous avons désignée par la lettre n (par exemple $n = 10.000$); on doit donc avoir:

$$a > n.$$

8. *Cas de l'ellipse.*

Supposons d'abord la donnée A négative; cela arrivera lorsqu'au point d'émergence E la comète est animée d'une très faible vitesse. Remplaçons A par $-B$, et écrivons:

$$B = 2 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{r}{r_0};$$

cette valeur B ne peut dépasser 2. Les équations (6) et (7) s'érivent maintenant:

$$\left\{ \begin{aligned} e^2 &= 1 - B(2-B)\sin^2\alpha; \\ a &= \frac{B}{1-e}; \end{aligned} \right.$$

la première montre que e est inférieure à l'unité; la trajectoire sera donc *elliptique.*

La condition de visibilité exige que $a = \dfrac{B}{1-e}$ dépasse n, c'est-à-dire que e dépasse $\left(1 - \dfrac{B}{n}\right)$. Il faut donc, pour que la comète soit visible à son passage au périhélie, que:

$$\left(1 - \frac{B}{n}\right)^2 < 1 - B\,(2 - B)\,\sin^2\alpha\,;$$

ou bien

$$\text{(8)} \qquad \text{Sin}^2\,\alpha < \frac{\dfrac{2}{u} - \dfrac{B}{n^2}}{2 - B}\,,$$

B ne pouvant dépasser 2. C'est là la condition de visibilité dans le cas des orbites elliptiques.

La fonction de B qui figure au second membre de (8) est croissante si $\dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n^2} > 0$, ou $n > 1$, condition certainement satisfaite dans notre problème. Ainsi, quand B varie de zéro à 2, le quotient $\left(\dfrac{\dfrac{2}{n} - \dfrac{B}{n^2}}{2 - B}\right)$ augmente de $\dfrac{1}{n}$ jusqu'à l'infini; il devient égal à l'unité pour la valeur suivante de B:

$$B = \frac{2\,n}{n + 1}\,.$$

Voici donc les distinctions qui s'offrent à nous:

1° Si B est compris entre sa valeur extrême 2 et la valeur très peu différente $\dfrac{2\,n}{n+1}$, l'angle α n'est pas limité par la condition (8), puisque le second membre est alors supérieur à l'unité. C'est dire que toutes les comètes issues de E avec une vitesse suffisamment faible seront visibles à leur passage au périhélie, quelle que soit la direction initiale de leur vitesse, de $\alpha = \alpha'$ à $\alpha = 90^0$.

2° Si B est plus petit que $\dfrac{2\,n}{n+1}$, ce qui correspond à une vitesse un peu plus grande en E, l'angle α est limité par la condition de visibilité (8); ne seront visibles que les seules comètes dont la vitesse initiale fait avec le rayon vecteur un angle suffisamment petit.

Remarquons que, pour $B = 0$, on a $e = 1$; et (8) donne:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha'' < \frac{1}{n - 1};$$

or, on a vu au N° 6 que, pour $e = 1$, on a:

$$a > \alpha'',$$

où $\operatorname{tg}^2 \alpha'' = \frac{1}{a - 1}$; et comme $a > n$, il vient

$$\operatorname{tg}^2 \alpha'' < \frac{1}{n - 1},$$

en accord avec ce qui précède.

Dans les deux cas signalés, l'excentricité de l'orbite est très rapprochée de l'unité; on a vu en effet qu'elle dépasse $\left(1 - \frac{B}{n}\right)$, c'est-à-dire nécessairement $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$; or n est un très gros nombre, 10.000 par exemple.

9. *Cas de l'hyperbole.*

Prenons maintenant A positif et inférieur à la quantité N, qui nous l'avons vu au N° 7, est un très gros nombre, 40.000 ou 80.000 par exemple.

$$A = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \frac{r}{r_0} - 2,$$

$$0 < A < N.$$

La condition de visibilité $a > n$, rapprochée de l'équation (7):

$$a = \frac{A}{e - 1},$$

exige que e soit inférieure à $\left(1 + \frac{A}{n}\right)$, ou:

$$e < 1 + \frac{A}{n};$$

et comme e est définie par l'équation (6)

$$e^2 = 1 + A(A + 2)\sin^2\alpha,$$

l'inégalité précédente implique la conséquence:

$$\left(1 + \frac{A}{n}\right)^2 > 1 + A(A + 2)\sin^2\alpha.$$

C'est dire que l'on doit avoir:

$$\text{(9)} \qquad \sin^2\alpha < \frac{\frac{2}{n} + \frac{A}{n^2}}{2 + A}, \text{ (avec } 0 < A < N\text{)},$$

inégalité identique à (8), puisque $B = -A$.

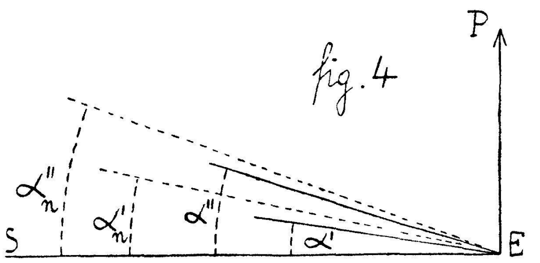
Mais, à cause de la grandeur de n, le second membre de (9) est décroissant par rapport à A; sa dérivée $\dfrac{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n}}{(2 + A)^2}$ est en effet négative; il varie entre un maximum égal à $\dfrac{1}{n}$ pour $A = 0$, et un minimum $\dfrac{1}{n^2}$ obtenu pour $A = \infty$. On voit que $\sin^2\alpha$ est ainsi étroitement limité; il doit rester inférieur à $\dfrac{1}{n}$ dans le cas de A nul, et inférieur à $\dfrac{1}{n^2}$ dans le cas de A infini.

On a vu d'ailleurs au N° 6 que l'angle réservé aux hyperboles est compris entre α' et α'' tels que:

$$\operatorname{tg}^2\alpha' = \frac{1}{a^2 - 1} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}^2\alpha'' = \frac{1}{a - 1};$$

or $a > n$; on a donc (fig. 4):

$$\alpha' < \alpha_n' \text{ et } \alpha'' < \alpha_n'',$$



où:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_n' = \frac{1}{n^2 - 1} \text{ et } \operatorname{tg}^2 \alpha_n'' = \frac{1}{n - 1}.$$

Mais la condition (9), qui peut s'écrire $\operatorname{tg}^2 \alpha < \dfrac{2 + \dfrac{A}{n}}{(2 + A)\,n - \left(2 + \dfrac{A}{n}\right)}$,

où A est donné par (4), montre que:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{dans le cas de } A = 0,\ \operatorname{tg}^2 \alpha \text{ doit être inférieur à } \dfrac{1}{n - 1}; \\[2ex] \text{dans le cas de } A = \infty,\ \operatorname{tg}^2 \alpha \text{ doit être inférieur à } \dfrac{1}{n^2 - 1}; \end{array}\right.$$

et cette valeur de $\operatorname{tg}^2 \alpha$ est une fonction décroissante de A.

D'autre part, nous savons que la limite inférieure de tout le domaine possible de α obéit à la condition:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha' = \frac{1}{a^2 - 1}, \text{ ou } \operatorname{tg}^2 \alpha' < \frac{1}{n^2 - 1};$$

il y a donc accord avec ce qui précède.

Enfin, la limite supérieure du domaine „hyperbolique" est donnée par: $\operatorname{tg}^2 \alpha'' < \dfrac{1}{n - 1}$; c'est aussi la limite correspondant à $A = 0$.

Les précisions de ce N° 9 cadrent donc bien avec les indications générales du N° 6.

Quant à l'excentricité e, sa plus grande valeur, A étant donné, résulte en subsistant dans (6) la plus grande valeur de $\operatorname{Sin}^2 \alpha$, à savoir

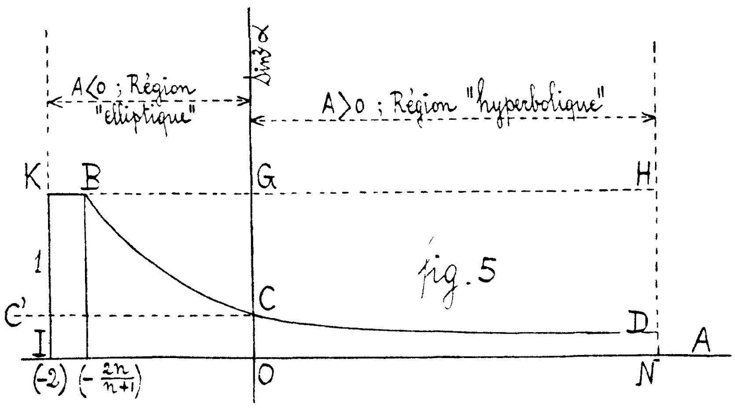
$$\operatorname{Sin}^2 \alpha = \frac{\dfrac{2}{n} + \dfrac{A}{n^2}}{2 + A};$$

le maximum de e sera donc égal à $\left(1 + \dfrac{A}{n}\right)$.

En résumé, la comète hyperbolique ne sera vue de la Terre que si sa vitesse initiale est très peu inclinée sur le rayon vecteur; l'excentricité peut s'élever très au-dessus de l'unité et atteindre la quantité $\left(1+\frac{N}{n}\right)$. Si, par exemple, $N=40.000$ et $n=10.000$, cette limite supérieure de l'excentricité serait 5.

10. *Récapitulation.*

Nous pouvons facilement résumer la discussion précédente sous la forme d'un graphique (fig. 5). Portons en abscisse la donnée A, et en ordonnée la quantité α, ou plutôt $\operatorname{Sin}^2\alpha$:



A sera comprise entre -2 et $+N$; pour la *visibilité*, $y=\operatorname{Sin}^2\alpha$ doit être comprise entre l'axe des x (A) et la courbe $\overline{KBCD}$. Celle-ci, entre l'abscisse $x=-2$ et l'abscisse $x=-\frac{2n}{n+1}$, est représentée par un segment de droite $\overline{KB}$ parallèle à $0x$ et d'ordonnée 1; l'angle α correspondant est un angle aigu quelconque (pourvu que $\alpha>\alpha'$).

Au dela du point B, la courbe limitative est l'hyperbole

$$y=\frac{\frac{2}{n}+\frac{x}{n^2}}{2+x},$$

qui admet pour asymptote, non pas l'axe $0x$, mais une droite parallèle à cet axe, d'équation $y=\frac{1}{n^2}$, et qui en diffère à peine. Dans le graphique (5), l'ordonnée $\overline{0c}$ est déjà très petite et égale à la quantité $y=\frac{1}{n}$, valeur correspondant à $A=0$ et $e=1$.

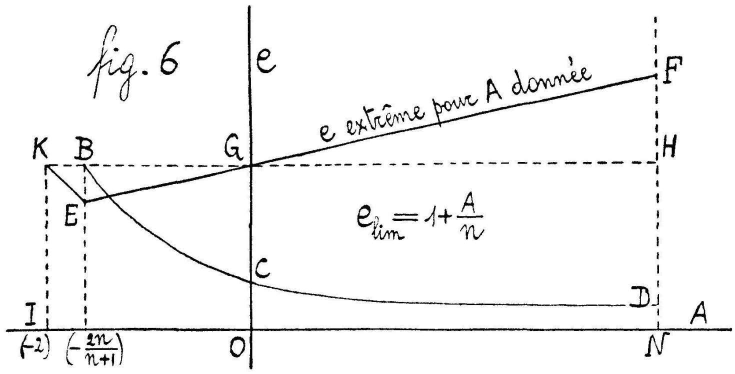
Pour les ellipses, $\operatorname{Sin}^2\alpha$ doit être supérieur à $\frac{1}{a}$ où $a>n$; la limite inférieure de $\text{Sin}^2 \alpha$ sera donc une parallèle à $\overline{C C'}$, située au-dessous de $\overline{CC'}$ ou confondue au plus avec $\overline{CC'}$.

Pour les hyperboles, la limite inférieure est donnée par $\text{Sin}^2 \alpha = \frac{1}{a^2}$.

Pour une valeur donnée de x (ou A) l'excentricité e, donnée par

$$e^2 = 1 + A\,(A + 2)\,\text{Sin}^2 \alpha,$$

différe le plus de l'unité quand on place y (ou $\text{Sin}^2 \alpha$) sur la courbe $\overline{K B C D}$ de la figure 5. Cette valeur extrême de e est représentée sur le dessin (fig. 6) par la ligne brisée $\overline{K E G F}$.



Le premier segment $\overline{K E}$ a pour équation: $e = -1 - x$; en effet, dans ce domaine compris entre $A = -2$ et $A = -\frac{2n}{n+1}$, le maximum possible de $\text{Sin}^2 \alpha$ est l'unité; ce que donne pour la valeur limite de e^2:

$$e^1 = (1 + A)^2, \text{ d'où } e = \pm (1 + A);$$

d'autre part, pour $A = -2$, on a $e = 1$; donc, dans ce domaine, il faut écrire:

$$e = -1 - x;$$

pour $A = -\frac{2n}{n+1}$, cela donne:

$$e = 1 - \frac{2}{n+1}.$$

Le deuxième segment $\overline{EGF}$ a pour équation:

$$e = 1 + \frac{x}{n};$$

en effet, le maximum de $\mathrm{Sin}^2\alpha$ est $\left(\dfrac{\dfrac{2}{n} + \dfrac{A}{n^2}}{2 + A}\right)$; cela donne pour la limite de e^2:

$$e^2 = 1 + A(A + 2)\left(\frac{\frac{2}{n} + \frac{A}{n^2}}{2 + A}\right) = \left(1 + \frac{A}{n}\right)^2$$

d'où:

$$e = 1 + \frac{A}{n};$$

pour $A = 0$, on obtient $e = 1$; et pour $A = -\dfrac{2n}{n+1}$, $e = 1 - \dfrac{2}{n+1}$

Il y a donc raccord entre les deux segments pour $A = -\dfrac{2n}{n+1}$, la quantié $\overline{BE}$ valant $\dfrac{2}{n+1}$, qu'on en emprunte la valeur à l'une ou à l'autre des équations des deux droites.

Le graphique (6) montre bien que, dans la région elliptique ($A < 0$), l'excentrique diffère *très peu* de l'unité; tandis quelle peut s'en écarter sensiblement pour la région hyperbolique.

La rareté des orbites hyperboliques très excentrées peut s'expliquer uniquement par des raisons tirées du calcul des probabilités. Nous reprendrons ce point plus loin.

IV. Des fréquences

11. *Fréquences relatives des orbites elliptiques et hyperboliques.*

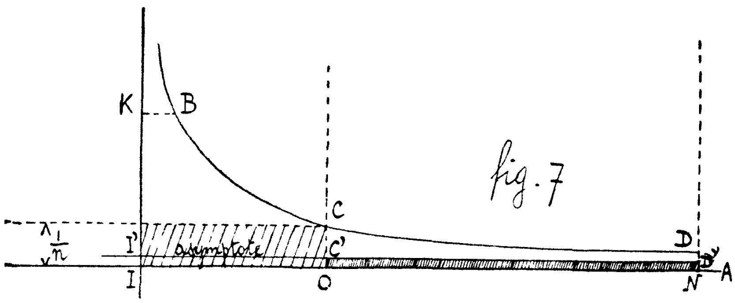
On a déjà vu au N° 6 que le secteur PCD (fig. 3) utile de l'angle α est presque uniquement relatif aux trajectoires elliptiques, les hyperboliques n'ayant à leur disposition qu'un secteur très petit. Mais cette raison est loin d'être suffisante pour permettre d'affirmer que les orbites elliptiques seront beaucoup plus nombreuses que les hyperboliques. Il faut revoir la chose de plus près.

Pour les premières, les données A et α sont figurées par un point du segment $(O\,I\,K\,B\,C)$ (fig. 5); pour les autres, par un point appartenant au segment $(O\,C\,D\,N)$.

Rapportons l'hyperbole limitative $\overline{BCD}$ à ses deux asymptotes; l'asymptote parallèle à $O\,Y$ est $I\,K$, car pour $x = -2$, on a $y = \infty$; l'asymptote parallèle à $O\,X$ est à l'ordonnée très faible $y = \frac{1}{n^2}$; l'équation nouvelle de la courbe est (fig. 7):

$$X\,Y = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right).$$

De là, on conclut facilement que:



$$\begin{cases} A_h = \text{aire } \overline{O\,C\,D\,N} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right).\ \mathrm{Log}\left(\frac{N}{2} + 1\right) + \frac{N}{n^2} \\ A_e = \text{aire } \overline{OIKBC} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right).\ \mathrm{Log}\,(n + 1) + \frac{2}{n}\,; \end{cases}$$

en supprimant les termes négligeables, le rapport de ces surfaces vaut:

$$\frac{A_e}{A_h} = \frac{\log_{10}(n + 1) + 0{,}434}{\log_{10}\left(\frac{N}{2} + 1\right) + 0{,}217\,\frac{N}{n}}\,;$$

il est fini et diffère peu de l'unité; A_e et A_h sont du même ordre de grandeur. Mais il faut observer que nous procéderions d'une manière bien imprudente, si nous prenions ce rapport des surfaces comme exprimant celui des fréquences relatives des orbites des deux espèces. Il faut faire intervenir ici la notion de probabilité.

Rapportons notre hyperbole-limitative aux axes $\overline{ION}$ et $\overline{IK}$, choisis dès maintenant comme axes des x et des y, de sorte que son équation devienne:

$$x\left(y - \frac{1}{n^2}\right) = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right).$$

La probabilité de choisir un élément $(dx\, dy)$ de notre surface-limite est de la forme:

$$f(x, y)\, dx\, dy;$$

et les hypothèses adoptées plus haut sur la fréquence des angles α et des vitesses v (N° 4) reviennent à prendre pour $f(x, y)$ une fonction de la forme:

$$f(x, y) = \frac{M}{\sqrt{x(1-y)}}.$$

En effet, si toutes les directions α autour d'un point sont également possibles (sous la réserve $\alpha' < \alpha \leq 90^0$), si l'on se place dans un plan défini normal au rayon vecteur mené au point d'émergence, elles cessent de l'être et leur fréquence est exprimée par:

$$\text{Sin}\ \alpha\, d\alpha = -d(\cos\ \alpha);$$

c'est là la probabilité de choisir une valeur de α comprise entre α et $(\alpha + d\alpha)$; en faisant, comme plus haut (axes $\overline{NIK}$), $y = \text{Sin}^2\,\alpha$ et $\cos\alpha = \sqrt{1-y}$, cette expression devient:

$$\frac{dy}{2\sqrt{1-y}}.$$

De même, la loi de la fréquence de v étant, dans le problème V, du type $h\ dv$, où h est une constante, et x ayant été pris égal à $x = A + 2 = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \frac{r}{r_0}$, la loi de probabilité pour x sera du type $p\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$, où p exprime une constante. Ainsi s'explique la présence des facteurs qui constituent $f(x, y)$.

En résumé, c'est une conséquence directe de nos hypothèses sur la loi de probabilité pour α et v que d'admettre que les fréquences relatives des orbites elliptiques et hyperboliques (visibles) sont dans le même rapport que les intégrales doubles

$$\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{x\,(1-y)}},$$

étendues aux surfaces $(O\,I\,K\,B\,C)$ et $(O\,C\,D\,N)$, le facteur constant M de $f(x, y)$ disparaissant par quotient.

On aura d'abord, en arrêtant l'intégration sur le bord $\overline{B\,C\,D}$ de notre courbe limitative:

$$(10) \qquad 2\sqrt{2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y)\cdot\left(y-\frac{1}{n^2}\right)}}\,;$$

les limites sont respectivement $\left(\frac{1}{n} \text{ et } 1\right)$ et $\left(\frac{1}{n^2} \text{ et } \frac{1}{n}\right)$.

En posant:

$$y = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\cos\varphi,$$

l'intégrale de (10) vaut $-\int d\varphi = \varphi_0 - \varphi$; intégrée pour Y dans le champ $\left(\frac{1}{n} \text{ à } 1\right)$, elle est égale à π; de $y = \frac{1}{n^2}$ à $y = \frac{1}{n}$, elle vaut presque $\pi - \left(\pi - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Les parties négligées dans le second cas disparaissent par rapport aux parties conservées, ainsi qu'on s'en assure facilement. Alors on trouve que:

Si les hypothèses sur la fréquence relative des diverses valeurs de v et α, qui sont à la base du problème V, sont vérifiées, le rapport des fréquences des orbites elliptiques et hyperboliques est à peu près celui de π à $\frac{2}{\sqrt{n}}$, c'est-à-dire celui de 157 à 1 si on fait $n = 10.000$.

A cause de la grandeur de n, on voit que *les orbites elliptiques sont beaucoup plus nombreuses que les hyperboliques.*

V. De l'excentricité.

12. On a déjà montré aux N° 9 et 10 que, pour les orbites elliptiques ($A < 0$), l'excentricité diffère très peu de l'unité; tandis qu'elle peut s'en écarter sensiblement pour les orbites hyperboliques.

Il reste à voir si celles des excentricités qui sont voisines de 1 sont beaucoup plus fréquentes que les autres, en ce qui concerne les orbites hyperboliques. On peut s'en rendre compte rapidement en cherchant si e est une fonction *lentement* décroissante de α, à partir de $\alpha = \alpha''$ jusqu'à $\alpha = \alpha'$.

Tel est en effet le cas.

Posons $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{\sqrt{a-1}}$; lorsque α part de α'', on a $m = 1$ à peu près; ensuite m diminue, puisque α diminue. Et exprimons l'excentricité e en fonction de m; on trouve, à partir de (2):

$$e(m) = \frac{1 + m^2(a-1)}{(a+1)m^2 - 1} = \frac{m^2 + \dfrac{1}{a-1}}{m^2 + \dfrac{2m^2 - 1}{a-1}};$$

m étant < 1, on voit que $e(m) > 1$.

Relevons ici que $\alpha > \alpha'$ tel que $\operatorname{tg}^2\alpha' = \frac{1}{a^2-1}$; comme on a posé $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{\sqrt{a-1}}$, on voit que m sera limité inférieurement par la valeur $\frac{1}{\sqrt{a+1}}$; elle correspond à $e = \infty$.

La dérivée de $e(m)$ par rapport à m est négative; si m diminue (en même temps que α), e augmente.

Pour $m = 1$, on a $e = 1$, $|e'(m)|$ est de l'ordre de grandeur de $\frac{2}{a}$; la variation de e en fonction de m est donc très lente au début; de sorte que m peut varier dans des limites étendues sans que e ait sensiblement changé. Par exemple, avec a 10000:

m	e	ordre de $\vert e'\vert$
1	1	$2/a < 0{,}0002$
0,5	1,0006	$16/a < 0{,}0016$
0,1	1,02	$\frac{2000}{a} < 0{,}2$

Donc, de $m = 1$ à $m = 0{,}1$, la dérivée $e'(m)$ reste comprise entre 0,0001 et 0,2; et l'accroissement de e est très inférieur à la variation de m, puisque e reste comprise entre 1 et 1,02.

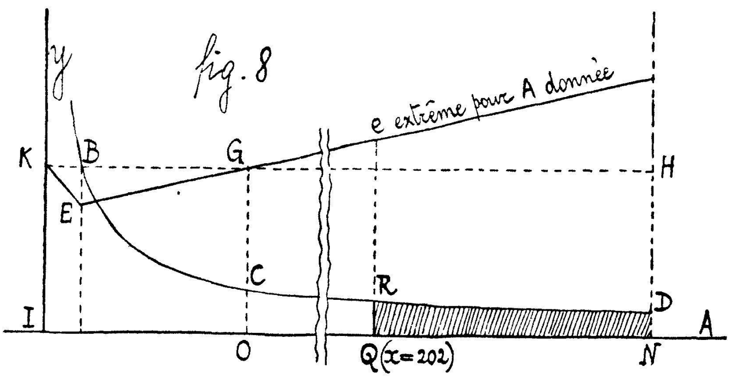
Ce ne seront donc que les valeurs de m inférieures à 0,1 qui pourront conduire à des valeurs de l'excentricité supérieure à 1,02. Encore faudra-t-il tenir compte du fait que m ne doit pas descendre au-dessous de $\frac{1}{\sqrt{a+1}}$. Telle est l'essence du raisonnement. La base en est encore précaire.

13. On peut l'améliorer beaucoup en se demandant quelle est la valeur probable de l'excentricité; ou pour faciliter le calcul, *la valeur probable du carré de l'excentricité*. Avec les axes $\overline{ION}$ et $\overline{IK}$, dont on s'est déjà servi à la fin du N° 11, elle est égale à $(1 + T)$, où T est le rapport des intégrales:

$$\iint_{\text{domaine } \mathfrak{S}} \frac{xy\,(x-2)\,dx\,dy}{\sqrt{x\,(1-y)}} : \iint_{\overline{OCDN}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x\,(1-y)}};$$

nous fixerons plus loin (N° 14) le domaine $\mathfrak{S}$ de la première intégrale.

Remarquons dès maintenant que la valeur $e = 1{,}02$ est la valeur limite correspondant à $x = 202$. En effet, on a (fig. 8):



avec $e = 1{,}02$ et $n = 10.000$, on trouve bien $x = 202$. Seuls les couples de valeurs (x, y) donnant des points d'un certain domaine $\mathfrak{S}$, partie du segment $(Q\,R\,D\,N)$, pourront conduire à des valeurs de e supérieures à 1,02.

Rappelons que l'équation de l'hyperbole limitative $\overline{BCRD}$ est:

$$(11) \qquad x\left(y - \frac{1}{n_2}\right) = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right);$$

et que la valeur de e^2 est donnée par l'équation (6), qui s'écrit ici:

$$e^2 = 1 + x (x - 2) \operatorname{Sin}^2\alpha,$$

ou bien:

$$e^2 = 1 + x (x - 2) y. \tag{12}$$

La probabilité d'avoir x compris entre x et $(x + dx)$, et y compris entre y et $(y + dy)$, c'est — à — dire α entre α et $(\alpha + d\alpha)$, est de la forme:

$$M \frac{dx\,dy}{\sqrt{x (1 - y)}}$$

comme on l'a montré au N° 11.

Si donc on pose:

$$\left\{ \begin{aligned} Z &= xy\ (x - 2), \\ e^2 &= 1 + Z, \end{aligned} \right. \tag{13}$$

les fréquences relatives des cas où Z est déterminé par le couple (x, y) et de la totalité des cas possibles (orbites hyperboliques) sont dans le même rapport que:

$$\frac{dx\,dy}{\sqrt{x (1 - y)}} \quad \text{et} \quad \iint\limits_{\overline{OCDN}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x (1 - y)}}.$$

L'espérance correspondante de Z est:

$$\frac{xy (x - 2)\,dx\,dy}{\sqrt{x (1 - y)}} : \iint\limits_{\overline{OCDN}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x (1 - y)}};$$

et la valeur probable de Z est l'expression T.

On a déjà vu au N° 11 que l'intégrale du dénominateur vaut presque $\frac{2}{\sqrt{n}}$; les parties négligées disparaissent par rapport aux parties conservées.

Il nous reste donc à calculer l'intégrale du numérateur:

$$\iint\limits_{\text{domaine } \mathfrak{S}} \frac{xy\,(x - 2)\,dx\,dy}{\sqrt{x (1 - y)}}$$

14. *Le domaine* $\mathfrak{S}$. On a vu que $e = 1{,}02$ est la limite de e correspondant à $x = 202$. Il en résulte que le domaine $\mathfrak{S}$ correspondant à des valeurs de e supérieures à 1,02 est situé « à droite » de l'ordonnée $\overline{QR}$ (fig. 8).

Cherchons la *courbe séparative* $\mathfrak{L}$ qui détache du segment $(QRDN)$ le domaine $\mathfrak{S}$. Cette courbe $\mathfrak{L}$ est donnée par l'équation :

$$(1{,}02)^2 = 1 + xy\,(x - 2) = \left(1 + \frac{200}{n}\right)^2 ;$$

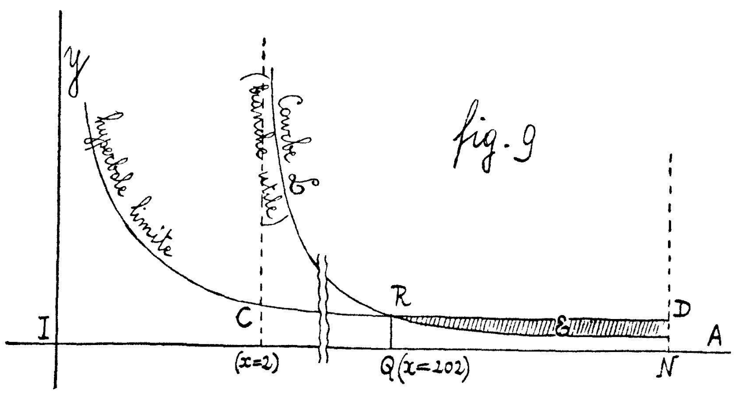
$$(14) \qquad y = \frac{400\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{100}{n^2}\right)}{x\,(x - 2)} ;$$

x étant donné (ou A), l'excentricité e sera plus grande que 1,02 pour des ordonnées y supérieures à celles fixées par l'équation (14).

D'ailleurs les valeurs de y sont limitées supérieurement par l'équation (11) de l'hyperbole limitative $\overline{CRD}$.

La courbe $\mathfrak{L}$ (14) admet des asymptotes parallèles à l'axe des y pour $x = 0$ et $x = 2$; cette dernière seule est à considérer, puisqu'on ne prend que des valeurs de x plus grandes que 2 ; on vient de voir, en effet, que le domaine $\mathfrak{S}$ est à droite de $\overline{QR}$ $(x = 202)$.

On vérifie vite que la branche utile de la courbe $\mathfrak{L}$ (fig. 9) coupe la courbe limitative $\overline{CRD}$ au point R, pour $x = 202$; avec $n = 10.000$, on a $y = 0{,}000.001$ pour les deux courbes.



Le domaine $\mathfrak{S}$ est donc limité par les courbes (14) et (11), inférieurement par (14) et supérieurement par (11).

15. *Calcul du numérateur de T.*

L'intégrale du numérateur s'écrit donc :

$$\int\limits_{x=202}^{N+2} \frac{x(x-2)\,dx}{\sqrt{x}} \int\limits_{\mathfrak{L}}^{\overline{RD}} \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y}} = \int\limits_{x=202}^{N+2} \frac{x(x-2)\,dx}{\sqrt{x}} \left[\frac{2}{3}(1-y)^{3/2} - 2(1-y)^{1/2}\right]_{\mathfrak{L}}^{\overline{RD}}.$$

En développant les puissances figurant dans le crochet, et en faisant $n = 10.000$ et $N = 40.000$, on trouve pour cette expression la valeur 0,0000243.

16. *La valeur probable de Z, soit T.*

Cette valeur est de l'ordre de $\frac{2430}{n^2} : \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{1215\sqrt{n}}{n^2} = 0{,}0012$. Il en résulte que la valeur probable de e^2 serait de 1,0012, et celle de e inférieure à 1,0006.

Cela montre bien que les chances de voir intervenir, *dans le problème V*, des excentricités très fortes sont minimes. En effet, les valeurs de e supérieures à 1 peuvent s'élever théoriquement jusqu'à quelques unités ; la probabilité de voir arriver une excentricité dépassant l'unité de plus de 0,02 n'est donc que de l'ordre du millième environ.

17. On peut d'ailleurs calculer directement cette probabilité en utilisant la même courbe séparative $\mathfrak{L}$ et le même domaine $\mathfrak{S}$ qu'aux numéros 14 et 15.

Le rapport des fréquences des orbites à excentricités plus grandes que 1,02 et de l'ensemble des orbites (hyperboliques) est le rapport des intégrales :

$$\iint\limits_{\mathfrak{S}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x(1-y)}} : \iint\limits_{\overline{OCDN}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x(1-y)}}.$$

Le dénominateur est presque égal à $\frac{2}{\sqrt{n}}$, nous l'avons vu.

Le numérateur donne :

$$\int\limits_{x=202}^{N+2} \frac{dx}{\sqrt{x}} \int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = -2\int\limits_{x=202}^{N+2} \frac{dx}{\sqrt{x}} \left[\sqrt{1-y}\right]_{\mathfrak{S}};$$

Or, on a:

$$[\sqrt{1-y}\,]_{\mathfrak{S}} = (1-y)^{1/2}_{\text{courbe } \overline{RD}} - (1-y)^{1/2}_{\text{courbe } \mathfrak{L}};$$

$$[\sqrt{1-y}\,]_{\mathfrak{S}} = \left[1 - \frac{2}{x}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n^2}\right]^{1/2} - \left[1 - \frac{400\left(\frac{1}{n} + \frac{100}{n^2}\right)}{x(x-2)}\right]^{1/2};$$

en développant les crochets, et en abandonnant les termes qui deviennent trop petits à cause de la grandeur de n, on trouve que:

$$\text{numérateur} = 2\int_{202}^{N+2} \frac{dx}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{nx} - \frac{202}{n\,x\,(x-2)} + \dots\right), \text{ soit } \frac{0{,}2}{n}.$$

Le rapport des fréquences envisagées vaut donc:

$$\frac{\left(\frac{0{,}2}{n}\right)}{\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{0{,}1}{\sqrt{n}}, \text{ soit } 0{,}001.$$

La probabilité de voir arriver une excentricité dépassant 1,02 est bien de l'ordre du millième; et il est bien entendu qu'il ne s'agit ici que des orbites hyperboliques.

La conclusion est donc que, *étant données les bases admises pour le problème V*, il n'y a guère de chance de voir arriver une orbite hyperbolique ayant une excentricité supérieure à 1,02. En fait, on n'en a pas encore trouvé une seule.

18. Il est bon de rappeler, en terminant, que nous avons considéré comme également possibles les vitesses relatives d'émergence v, pourvu qu'elles ne dépassent pas une valeur limite V; et nous avons fait remarquer que cette hypothèse est bien arbitraire.

Si l'on utilise une certaine vitesse „normale" U, comme indiqué au N° 4, U étant choisie de façon à rendre compte des résultats d'observations, on voit bien que cela aura pour effet de modifier la valeur du rapport du N° 17.

Il faudra donc reprendre le problème à ce point de vue.

Reçu le 16 février 1932.