

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1932)

Artikel: Sur le groupe de la géométrie hypersphérique.
Autor: Cartan, Elie
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-5617>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur le groupe de la géométrie hypersphérique

par ELIE CARTAN, Paris

1. On appelle, d'après H. Poincaré, *hypersphère* le lieu des points du plan complexe qui satisfont à l'équation

$$x\bar{x} + y\bar{y} - 1 = 0.$$

On peut envisager l'hypersphère comme un espace réel à trois dimensions ; il est homéomorphe à l'espace sphérique, puisque chacun de ses points est déterminé d'une manière biunivoque par quatre nombres réels assujettis à avoir la somme de leurs carrés égale à 1. H. Poincaré a démontré que toute transformation *analytique* sur les variables complexes x, y laissant invariante l'hypersphère est une homographie du plan ; ces homographies, que nous appellerons hermitiennes, dépendent de 8 paramètres réels¹⁾. Il existe aussi une famille d'*antihomographies* dépendant du même nombre de paramètres et laissant l'hypersphère invariante ; on les obtient en combinant les homographies considérées avec l'*antiinvolution* qui fait passer du point (x, y) au point conjugué (\bar{x}, \bar{y}) . Le groupe mixte ainsi obtenu n'est autre que le groupe de la géométrie hermitienne hyperbolique, étudiée par G. Fubini et E. Study.

Au lieu de porter notre attention, comme ces deux géomètres, sur les points du plan intérieurs à l'hypersphère, nous allons considérer de préférence les points de l'hypersphère, regardée comme un espace à trois dimensions, et certaines lignes remarquables tracées dans cet espace, les *chaînes* et les *cercles*. De même que, dans l'espace projectif réel, le réseau formé par les droites détermine par lui-même, sans aucune considération de continuité, le groupe projectif de l'espace, de même nous montrerons que chacun des réseaux déterminés par les chaînes et par les cercles suffit pour déterminer le groupe de l'hypersphère.

Les chaînes de l'hypersphère et le groupe qui les conserve

2. Pour arriver à la notion de chaîne, revenons au plan projectif complexe, avec ses coordonnées non homogènes x, y . Si nous consi-

1) H. Poincaré, Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme (Rendic. Circ. Mat. Palermo, 23, 1907, § 7, p. 207—212).

dérons un point $M(x_0, y_0)$ de l'hypersphère²⁾ et les différentes droites (complexes) issues de M , on démontre facilement qu'une de ces droites et une seule n'a que le point M en commun avec l'hypersphère; c'est la *tangente* en M à l'hypersphère, d'équation

$$x\bar{x}_0 + \bar{y}y_0 - 1 = 0.$$

Toutes les autres droites issues de M coupent l'hypersphère en une infinité de points formant une ligne continue à une dimension réelle, qu'on appelle une *chaîne*³⁾. Ces lignes jouissent de la propriété que le rapport anharmonique de quatre quelconques de leurs points est réel. Par exemple la droite $y = 0$ coupe l'hypersphère aux points $(x = e^{i\theta}, y = 0)$, θ étant un paramètre réel.

Il est bon d'ajouter qu'une droite du plan peut n'avoir aucun point commun avec l'hypersphère; il en est ainsi de la droite de l'infini. De sorte qu'on peut partager les droites du plan en trois catégories: les tangentes, les sécantes et les non-sécantes.

En définitive *les chaînes sont les sections de l'hypersphère par les droites sécantes du plan projectif complexe.*

On voit immédiatement que *par deux points de l'hypersphère il passe une chaîne et une seule*. Ce théorème rapproche les chaînes des droites de l'espace projectif réel; mais nous allons voir qu'il y a entre ces deux notions de profondes différences.

3. Dans l'hypersphère, il n'existe pas de surface analogue au plan; nous allons montrer en effet qu'étant donné un triangle ABC de chaînes, toute chaîne qui rencontre les trois chaînes BC , CA , AB passe nécessairement par un des sommets A , B , C .

Prenons en effet A , B , C comme sommets d'un triangle de référence; nous pouvons encore choisir le système de coordonnées x , y , z de manière que l'équation d'une droite donnée \mathcal{A} ne passant par aucun des trois points A , B , C soit $x + y + z = 0$. Cela posé, l'équation de l'hypersphère s'obtiendra en annulant une forme d'Hermite indéfinie non dégénérée; elle sera nécessairement de la forme

$$a\bar{y}\bar{z} + \bar{a}zy + b\bar{z}\bar{x} + \bar{b}xz + c\bar{x}\bar{y} + \bar{c}yx = 0.$$

²⁾ En géométrie projective complexe, on emploie habituellement, d'après *C. Segre*, l'expression *hyperconique*.

³⁾ Sur cette notion, due à von Staudt, voir *E. Cartan*, *Leçons sur la géométrie projective complexe* (Paris, Gauthier-Villars, 1931, p. 12).

Si la droite Δ était le support d'une chaîne rencontrant les trois chaînes BC , CA , AB , ses points d'intersection avec les côtés du triangle de référence satisferaient à l'équation précédente ; or ces points sont $(0, 1, -1)$, $(-1, 0, 1)$ et $(1, -1, 0)$; on aurait donc

$$a + \bar{a} = b + \bar{b} = c + \bar{c} = 0.$$

Mais cela est impossible, parce que le discriminant

$$\begin{vmatrix} 0 & c & \bar{b} \\ \bar{c} & 0 & a \\ b & \bar{a} & 0 \end{vmatrix} = abc + \bar{abc}$$

de la forme d'Hermite serait nul, et la forme serait dégénérée.

4. Avant d'énoncer le théorème que nous nous proposons de démontrer, indiquons une nouvelle propriété qui nous sera utile et qui est du reste intéressante en elle-même.

Lemme. *On considère dans le plan projectif complexe un point A d'une hypersphère, trois droites Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 issues de A et la tangente T en A à l'hypersphère. Pour qu'il existe sur les chaînes C_1 , C_2 , C_3 portées par Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , trois points alignés différents de A , il faut et il suffit que le rapport anharmonique $(\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 T)$ soit imaginaire.*

Prenons en effet sur la chaîne Δ_3 un point B distinct de A , et soit C le point d'intersection des tangentes en A et B à l'hypersphère. En prenant A , B , C comme sommets du triangle de référence, on peut toujours réduire l'équation de l'hypersphère à la forme

$$xy + \bar{y}\bar{x} - z\bar{z} = 0.$$

Cela posé, cherchons si l'on peut mener par le point B une droite telle que ses points d'intersection avec Δ_1 et Δ_2 appartiennent à l'hypersphère.

Les équations de Δ_3 et de T sont respectivement

$$z = 0, \quad y = 0;$$

soient

$$y - m_1 z = 0, \quad y - m_2 z = 0$$

celles de Δ_1 et de Δ_2 ; soit enfin

$$x - \lambda z = 0$$

l'équation de la droite cherchée. Elle coupe les droites \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 aux points $(\lambda, m_1, 1)$ et $(\lambda, m_2, 1)$. Ces points seront sur l'hypersphère si l'on a

$$\begin{aligned}\overline{m_1} \lambda + m_1 \bar{\lambda} &= 1, \\ \overline{m_2} \lambda + m_2 \bar{\lambda} &= 1.\end{aligned}$$

Ces deux équations admettent une solution et une seule si le déterminant $m_1 \overline{m_2} - m_2 \overline{m_1}$ n'est pas nul. Or, cela exprime la condition pour que le rapport anharmonique

$$(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3 T) = (m_1, m_2, \infty, 0) = \frac{m_2}{m_1}$$

soit imaginaire. La condition énoncée dans le lemme (rapport anharmonique imaginaire) est donc suffisante pour qu'on puisse trouver sur C_1, C_2, C_3 trois points alignés.

La condition est nécessaire, car s'il existe sur C_1, C_2, C_3 trois points alignés M_1, M_2, M_3 , le point d'intersection M_4 de la droite qui les porte avec la tangente T ne peut être situé sur l'hypersphère, ni par suite sur la chaîne déterminée par M_1, M_2, M_3 ; le rapport anharmonique $(M_1 M_2, M_3 M_4)$ est donc imaginaire, et par suite aussi le rapport $(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3 T)$, qui lui est égal.

5. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant.

Théorème A. *Si une transformation ponctuelle de l'hypersphère jouit des propriétés suivantes :*

1° *Elle est univoque, c'est-à-dire qu'elle transforme un point donné de l'hypersphère en un point déterminé de l'hypersphère;*

2° *Elle transforme deux points distincts en deux points distincts;*

3° *Elle transforme trois points sur une même chaîne en trois points sur une même chaîne;*

4° *Elle transforme trois points non sur une même chaîne en trois points non sur une même chaîne;*

Cette transformation résulte d'une homographie ou d'une antihomographie du plan projectif complexe.

Nous ne supposons donc dans l'énoncé, ni que la transformation admet une inverse, ni qu'elle est continue.

Le théorème analogue, où l'on remplace l'hypersphère par l'espace projectif réel et les chaînes par les droites, peut être regardé comme classique. Grâce aux propriétés du quadrilatère complet, on le ramène au

théorème de Staudt sur les transformations ponctuelles de la droite qui conservent les divisions harmoniques.

Ici, d'après ce qui a été démontré au N° 3, il n'existe pas de figure analogue au quadrilatère complet. Il faut donc suivre une marche différente. Nous allons nous appuyer sur le lemme du N° 4.

6. La transformation ponctuelle donnée, que nous désignerons par \mathcal{T} , transforme évidemment toute chaîne de l'hypersphère en une chaîne déterminée et deux chaînes distinctes en deux chaînes distinctes. Soit alors A un point de l'hypersphère, T la tangente en A , et C_1, C_2, C_3 trois chaînes passant par A , de supports $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$. Nous désignerons par des lettres accentuées les éléments transformés par \mathcal{T} . Si le rapport anharmonique $(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3 T)$ est imaginaire, le lemme du N° 4 montre immédiatement que le rapport anharmonique $(\mathcal{A}'_1 \mathcal{A}'_2 \mathcal{A}'_3 T')$ est aussi imaginaire.

En supposant toujours le rapport $(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3 T)$ imaginaire, considérons une quatrième sécante \mathcal{A}_4 issue de A , telle que le rapport anharmonique $(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3 \mathcal{A}_4)$ soit réel; il existera alors une chaîne rencontrant C_1, C_2, C_3, C_4 , et par suite aussi une chaîne rencontrant C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 ; le rapport anharmonique $(\mathcal{A}'_1 \mathcal{A}'_2 \mathcal{A}'_3 \mathcal{A}'_4)$ sera donc aussi réel.

Cela posé, \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 désignant deux sécantes particulières issues de A , \mathcal{A} une sécante variable, désignons par λ le rapport anharmonique $(\mathcal{A} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 T)$ et par λ' le rapport anharmonique $(\mathcal{A}' \mathcal{A}'_1 \mathcal{A}'_2 T')$. Représentons \mathcal{A} par le point du plan de la variable complexe qui a pour affixe λ , et \mathcal{A}' par le point d'affixe λ' . Comme T correspond à $\lambda = \infty$, les deux propriétés qui ont été démontrées dans ce numéro peuvent s'énoncer de la manière suivante:

A tout point du plan euclidien de la variable complexe λ la transformation \mathcal{T} fait correspondre un point déterminé; à deux points distincts correspondent deux points distincts; à trois points non alignés correspondent trois points non alignés; à quatre points situés sur une même circonference correspondent quatre points situés sur une même circonference.

Nous allons étudier de plus près cette transformation.

7. Considérons le point $\lambda = 0$, que nous appellerons le point origine; c'est l'image de \mathcal{A}_2 , et aussi de \mathcal{A}'_2 ; il est par suite son propre transformé. Effectuons une inversion ayant ce point pour pôle. La transformation \mathcal{T} deviendra une transformation $\bar{\mathcal{T}}$ qui laissera invariant le point

à l'infini (image de \mathcal{J}_2 et de \mathcal{J}'_2), et qui transformera trois points alignés suivant une droite ne passant pas par l'origine en trois points alignés suivant une droite ne passant pas par l'origine. Toute droite ne passant pas par l'origine est ainsi transformée en une droite ne passant pas par l'origine.

Examinons d'abord le cas où deux droites distinctes seraient transformées dans la même droite δ' ; on en déduit immédiatement que tout point du plan autre que l'origine est changé en un point de δ' . En revenant au plan projectif complexe, nous voyons que *dans ce cas, les transformées des différentes sécantes issues du point A de l'hypersphère appartiennent toutes à une même chaîne de droites issues de A'*, une telle chaîne étant caractérisée par la propriété que le rapport anharmonique de quatre quelconques de ses droites est réel; cette chaîne de droites ne contient du reste pas la tangente T .

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et que, dans le plan de la variable complexe λ , deux droites distinctes ne passant pas par l'origine soient changées en deux droites distinctes ne passant pas par l'origine. A l'aide des propriétés du quadrilatère complet, on montre alors que quatre points en division harmonique sur une droite δ ne passant pas par l'origine sont transformés en quatre points en division harmonique sur la droite transformée δ' . Par suite, d'après le théorème de Staudt-Darboux⁴⁾, la transformation $\bar{\mathcal{T}}$ appliquée aux points de δ , conserve le rapport anharmonique. Si $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ sont alors quatre points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas en ligne droite et que le point origine ne soit sur aucune des droites joignant ces points deux à deux; si $\alpha', \beta', \gamma', \varepsilon'$ sont les points transformés, et si on prend ces deux quaternes de points comme bases de deux systèmes de coordonnées projectives, les coordonnées relatives au second système du point λ' transformé de λ sont égales aux coordonnées de λ relatives au premier système. La transformation $\bar{\mathcal{T}}$, du moins tant qu'elle est appliquée aux points différents de l'origine, est donc une homographie plane réelle et, comme elle transforme tout point à distance finie en un point à distance finie, elle se traduit par une substitution linéaire sur les coordonnées cartésiennes. Mais d'autre part elle doit changer toute circonférence ne passant pas par l'origine en une circonférence; c'est donc une homographie ou une antihomographie de l'affixe du point courant.

8. La conclusion qui se dégage de cette analyse est la suivante: *Etant donné un point A de l'hypersphère, trois cas sont possibles:*

⁴⁾ E. Cartan, loc. cit. 3, p. 6.

1° Ou bien les transformées des différentes sécantes issues de A appartiennent toutes à une même chaîne de droites issues de A' ;

2° Ou bien deux sécantes distinctes issues de A sont transformées en deux sécantes distinctes issues de A' , le rapport anharmonique de quatre sécantes étant égal à celui de leurs transformées;

3° Ou bien deux sécantes distinctes sont transformées en deux sécantes distinctes, le rapport anharmonique de quatre sécantes étant complexe conjugué de celui de leurs transformées.

C'est de ces résultats que nous allons déduire la conclusion finale.

9. Montrons d'abord que la première possibilité ne peut se présenter pour deux points distincts A et B de l'hypersphère. Prenons en effet leurs transformés A' et B' comme sommets d'un triangle de référence, le troisième sommet étant indéterminé. Les transformées des différentes sécantes issues de A appartiennent au faisceau de droites de sommet A' (1, 0, 0) et, dans ce faisceau, à une chaîne de droites contenant certainement la droite $A'B'$ d'équation $z=0$; l'équation générale des droites de cette chaîne est donc de la forme

$$\frac{y}{z} = \alpha t + \beta,$$

α et β étant deux constantes complexes, t un paramètre réel; mais on peut, en prenant le sommet C sur la droite $y=\beta z$, réduire β à zéro; de plus, en remplaçant y par αy , réduire α à l'unité. *Par suite le transformé de tout point de l'hypersphère a des coordonnées x, y, z dont les deux dernières sont dans un rapport réel.*

Un raisonnement analogue montre qu'on peutachever la détermination du système de référence de manière que le transformé de tout point de l'hypersphère ait des coordonnées ayant tous leurs rapports mutuels réels. *On peut donc supposer que les transformés des différents points de l'hypersphère ont leurs coordonnées réelles.*

Il en résulte que le lieu de ces transformés appartient à une même conique à équation réelle. Mais cela est impossible. En effet il existe une infinité de sécantes de l'hypersphère et chaque sécante contient une infinité de points. Il doit donc y avoir, en considérant les transformés, une infinité de droites distinctes coupant la conique réelle, lieu des points transformés, en une infinité de points réels, ce qui est absurde.

10. Ce résultat acquis, prenons sur l'hypersphère trois points non alignés A, B, C et un quatrième point D qui ne soit sur aucune des droites BC, CA, AB . Nous pouvons supposer que pour aucun de ces quatre points la première possibilité prévue au N° 8 ne se présente. Ces quatre points sont les points de base d'un système de coordonnées projectives x, y, z , le point unité étant D . Prenons de même les transformés A', B', C', D' comme points de base d'un second système de coordonnées x', y', z' . Soit M un point quelconque de l'hypersphère, M' son transformé. On a

$$\frac{y}{z} = (A \cdot M \ D \ C \ B), \quad \frac{y'}{z'} = (A' \cdot M' \ D' \ C' \ B');$$

par suite on a, suivant que c'est la possibilité 2° ou la possibilité 3° qui se réalise au point A ,

$$\text{soit } \frac{y'}{z'} = \frac{y}{z}, \quad \text{soit } \frac{y'}{z'} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}}.$$

On a de même

$$\text{soit } \frac{z'}{x'} = \frac{z}{x}, \quad \text{soit } \frac{z'}{x'} = \frac{\bar{z}}{\bar{x}},$$

et aussi

$$\text{soit } \frac{x'}{y'} = \frac{x}{y}, \quad \text{soit } \frac{x'}{y'} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}.$$

Mais toutes les combinaisons de ces cas ne sont pas également possibles. On ne peut avoir par exemple

$$\frac{y'}{z'} = \frac{y}{z}, \quad \frac{z'}{x'} = \frac{\bar{z}}{\bar{x}}, \quad \frac{x'}{y'} = \frac{x}{y},$$

car on en déduirait par multiplication

$$xz - \bar{x}\bar{z} = 0;$$

une telle relation ne peut avoir lieu pour tous les points de l'hypersphère ; elle définit en effet une hypersphère dégénérée qui ne peut contenir l'hypersphère donnée. On déduit de là qu'il n'y a que deux combinaisons possibles, à savoir

$$1^o \quad \frac{y'}{z'} = \frac{y}{z}, \quad \frac{z'}{x'} = \frac{z}{x}, \quad \frac{x'}{y'} = \frac{x}{y};$$

$$2^o \quad \frac{y'}{z'} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}}, \quad \frac{z'}{x'} = \frac{\bar{z}}{\bar{x}}, \quad \frac{x'}{y'} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}.$$

Dans le premier cas la transformation est une homographie; dans le second cas c'est une antihomographie. Le théorème est ainsi complètement démontré.

Les cercles de l'hypersphère et le groupe qui les conserve

11. Le lieu des points réels du plan projectif complexe qui appartiennent à l'hypersphère

$$x\bar{x} + y\bar{y} - 1 = 0$$

est le cercle

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Nous appellerons d'une manière générale *cercles* de l'hypersphère les différents transformés du cercle précédent par les homographies qui laissent l'hypersphère invariante. On peut les définir autrement en remarquant que le cercle primitif est le lieu des points de l'hypersphère invariants par l'*antiinvolution*

$$x' = \bar{x}, \quad y' = \bar{y}$$

qui laisse invariante l'hypersphère. Chaque cercle est donc associé à une antiinvolution laissant invariante l'hypersphère (*antiinvolution normale*) et réciproquement.

12. Le groupe des homographies hermitiennes étant à 8 paramètres, et le cercle des points réels étant invariant par le sous-groupe à trois paramètres des homographies réelles, les cercles de l'hypersphère dépendent de $8 - 3 = 5$ paramètres. Il est donc à prévoir que par deux points donnés il passe une infinité de cercles dépendant d'un paramètre, mais que par trois points arbitrairement donnés il ne passe aucun cercle. Il y a intérêt à chercher la condition pour qu'il passe un cercle par trois points donnés.

Nous allons d'abord montrer que tout triangle (figure formée par trois points distincts A , B , C) admet un invariant par rapport au groupe des homographies hermitiennes; c'est de la valeur de cet invariant que dépendra la propriété de trois points soit d'être alignés, soit d'être sur un même cercle.

Introduisons des coordonnées homogènes et écrivons l'équation de l'hypersphère sous la forme

$$F - ss - xx - yy = 0.$$

Toute homographie hermitienne peut être traduite analytiquement par une substitution linéaire laissant invariante la forme d'Hermite F ; si alors on applique aux coordonnées (x, y, z) , (x', y', z') de deux points M et M' cette substitution linéaire, il est évident que l'expression

$$(M, \overline{M'}) = x \frac{\partial F}{\partial x'} + y \frac{\partial F}{\partial y'} + z \frac{\partial F}{\partial z'} = ss' - xx' - yy'$$

reste invariante. Si nous considérons alors trois points M_1 , M_2 , M_3 , l'expression

$$(M_1 M_2 M_3) = (M_1, \overline{M_2}) (M_2, \overline{M_3}) (M_3, \overline{M_1})$$

sera aussi invariante, *mais à condition de fixer les coordonnées homogènes de ces trois points*. Or, quand on multiplie les coordonnées de chaque point par un facteur complexe arbitraire, l'expression est multipliée par le produit des carrés des modules des trois facteurs; *l'argument de l'expression est donc un invariant*. Il faut cependant remarquer que si l'on change l'ordre circulaire des trois points, l'expression est remplacée par sa conjuguée, et l'argument change de signe. Il en est de même quand on effectue sur les trois points une même antihomographie.

L'invariant ainsi obtenu sera appelé l'invariant angulaire du triangle orienté $M_1 M_2 M_3$.

13. Nous allons maintenant vérifier que l'invariant angulaire est toujours compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. En effet nous pouvons toujours, par une homographie, ramener les deux premiers points à avoir les coordonnées non homogènes $(-1, 0)$ et $(1, 0)$; soient x , y les coordonnées non homogènes du troisième. Un calcul immédiat donne alors

$$(M_1 M_2 M_3) = 2(1 - \bar{x})(1 + x) = 2(1 - x\bar{x}) + 2(x - \bar{x}) \\ = 2y\bar{y} + 2(x - \bar{x}).$$

La partie réelle est essentiellement positive ou nulle, ce qui justifie notre affirmation.

Pour que l'invariant angulaire soit égal à $\pm \frac{\pi}{2}$, il faut $y = 0$, ce qui exprime que les trois points sont alignés. On voit que sur toute chaîne il existe un sens circulaire positif intrinsèque, celui qui correspond à l'invariant $+\frac{\pi}{2}$; il se conserve par toute homographie hermitienne.

Pour que trois points soient sur un même cercle, il est évident que l'invariant angulaire doit être nul, car l'antiinvolution qui laisse invariants tous les points du cercle ne peut changer cet invariant, alors qu'elle change son signe. Réciproquement si l'invariant angulaire est nul et si on ramène les deux premiers points à être $(-1, 0)$ et $(1, 0)$, on a $x = \bar{x}$; l'abscisse x est donc réelle. Soit θ l'argument de l'ordonnée y ; l'homographie hermitienne

$$x' = x, \quad y' = y e^{-i\theta}$$

laisse fixes les deux premiers points donnés et transforme le troisième en un point réel; elle ramène donc les trois points à être sur le cercle des points réels; c'est donc qu'ils sont eux-mêmes sur un même cercle.

Théorème. Pour que trois points soient alignés, il faut et il suffit que leur invariant angulaire soit égal à $\pm \frac{\pi}{2}$; pour qu'ils soient sur un même cercle, il faut et il suffit que leur invariant angulaire soit nul.

14. Nous venons de voir que le lieu des points M situés sur un même cercle avec les deux points $A(-1, 0)$ et $B(1, 0)$ du cercle des points réels est formé des points de l'hypersphère situés sur le faisceau des droites réelles passant par le pôle de la droite AB par rapport au cercle (ou par rapport à l'hypersphère)⁵⁾. Cette propriété aura naturellement lieu pour deux points quelconques du cercle. Considérons alors sur le cercle deux couples de points A, B et C, D . Pour qu'il passe un cercle par chacun des deux groupes de points (MAB) et (MCD) , il faut que le point M soit sur une droite réelle issue du pôle de la droite AB et

⁵⁾ Il est en effet clair que l'équation de la tangente au cercle en un point (réel) de ce cercle est identique à l'équation de la tangente à l'hypersphère en ce point.

sur une droite réelle issue du pôle de la droite CD . Si ces deux droites sont distinctes, le point M est réel et est par suite sur le cercle donné. Si elles sont confondues, le point M est sur la droite qui joint les deux pôles, ou encore sur la polaire du point d'intersection des deux droites. Si ce point d'intersection est extérieur au cercle (et par suite à l'hypersphère), cette polaire coupe l'hypersphère suivant une chaîne. Si ce point est intérieur au cercle, sa polaire ne coupe pas l'hypersphère. Enfin si ce point est sur le cercle, ce qui suppose par exemple C confondu avec A , sa polaire est la tangente en A , qui ne coupe l'hypersphère qu'au seul point A .

Il résulte de ce qui précède que *si quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle, le lieu des points M qui sont sur un même cercle avec AB et sur un même cercle avec CD est ce cercle lui-même, ou se compose de ce cercle et d'une chaîne.*

15. Nous allons déduire de ce résultat un lemme qui nous sera utile plus loin.

Lemme I. *Pour que trois points P, Q, R de l'hypersphère soient alignés, il faut et il suffit qu'on puisse trouver dans l'hypersphère quatre points A, B, C, D situés sur un même cercle ne contenant aucun des trois points donnés et tels qu'il passe un cercle par chacun des six groupes de points*

$$(A B P), (A B Q), (A B R), (C D P), (C D Q), (C D R).$$

La condition est nécessaire. En effet supposons les points P, Q, R alignés. Prenons sur la chaîne qui les joint deux autres points M, N et faisons passer par M, N un cercle quelconque. Prenons sur ce cercle deux couples de points A et B d'une part, C et D d'autre part, conjugués harmoniques par rapport à M et N . La droite PQR est alors la polaire du point d'intersection de AB et de CD et, par suite (N° 14), chaque point d'intersection de cette polaire et de l'hypersphère est sur un même cercle avec AB et avec CD .

La condition est suffisante, car les points P, Q, R n'étant pas sur le cercle $ABCD$, il faut qu'ils soient sur la polaire du point d'intersection de AB et de CD ; ils sont donc alignés.

16. Nous allons maintenant trouver une condition nécessaire et suffisante pour que trois points *ne soient pas* alignés, condition se traduisant par la possibilité d'une construction où n'interviennent que des cercles.

Cherchons pour cela la condition pour que trois points distincts A , B , C étant donnés, il existe au moins un point M distinct de A et situé sur un même cercle avec AB et sur un même cercle avec AC . Il est clair que si les trois points sont sur un même cercle, il suffira de prendre un point quelconque de ce cercle, et ce sera du reste la seule solution du problème (N° 14).

Nous pouvons nous ramener au cas où B est le point $(-1, 0)$ et A le point $(1, 0)$; soit alors (a, b) le point C , et soient x, y les coordonnées de M . Pour qu'il passe un cercle par A, B, M il faut et il suffit que x soit réel (N° 13). Nous poserons donc

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta e^{i\varphi};$$

θ devra être différent de zéro, sans quoi M serait confondu avec A . On a

$$(A C M) = (1 - \bar{a})(1 - a \cos \theta - b \sin \theta e^{-i\varphi}) (1 - \cos \theta);$$

pour que l'invariant angulaire soit nul, il faut et il suffit qu'on ait

$$(1 - \bar{a})(1 - a \cos \theta - b \sin \theta e^{-i\varphi}) = (1 - a)(1 - \bar{a} \cos \theta - \bar{b} \sin \theta e^{i\varphi}),$$

ou, en simplifiant,

$$(a - \bar{a}) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = b (1 - \bar{a}) e^{-i\varphi} - \bar{b} (1 - a) e^{i\varphi}.$$

Nous pouvons supposer $a - \bar{a} \neq 0$, les trois points A, B, C n'étant pas sur un même cercle. On voit que l'équation précédente ne pourrait entraîner $\theta = 0$, quel que soit φ , que si l'on avait $b(1 - \bar{a}) = 0$, ce qui exige dans tous les cas $b = 0$: *les trois points A, B, C seraient alors alignés*, et dans ce cas il n'existerait effectivement aucun point M satisfaisant aux conditions énoncées. Nous voyons en passant que *si deux cercles ont deux points communs, il est impossible de faire passer par l'un de ces points une chaîne coupant chacun des cercles en un second point*.

17. Nous déduisons des résultats précédents le lemme suivant:

Lemme II. *Pour que trois points A, B, C ne soient pas alignés, il faut et il suffit qu'on puisse trouver un point M distinct de A , situé sur un même cercle avec A, B et sur un même cercle avec A, C .*

18. Nous allons maintenant démontrer le théorème que nous avons en vue et qui s'énonce de la manière suivante.

Théorème B. *Si une transformation ponctuelle de l'hypersphère jouit des propriétés suivantes :*

1° *Elle est univoque, c'est-à-dire qu'elle transforme tout point donné de l'hypersphère en un point déterminé de l'hypersphère ;*

2° *Elle transforme deux points distincts en deux points distincts ;*

3° *Elle transforme trois points sur un même cercle en trois points sur un même cercle ;*

4° *Elle transforme trois points non sur un même cercle en trois points non sur un même cercle ;*

Cette transformation résulte d'une homographie ou d'une antihomographie du plan projectif complexe.

La démonstration est immédiate. En effet considérons d'abord trois points alignés distincts ; leurs transformés sont alignés d'après le lemme I. Considérons ensuite trois points non alignés ; leurs transformés sont non alignés, d'après le lemme II. La transformation considérée jouit donc de toutes les propriétés énoncées au théorème A ; elle résulte donc d'une homographie ou d'une antihomographie.

(Reçu le 2 février 1932)