Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1932)

Artikel: Zwei komplementäre Maßzahlen der Versicherungsmathematik.
Autor: Moser, Chr.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5614

Zwei komplementäre Maßzahlen der Versicherungsmathematik

Von CHR. MOSER, Bern

A. Einführung

§ 1. Die beiden Maßzahlen, die uns hier beschäftigen, seien mit ψ und ω bezeichnet. Sie sind Größen, die sich gegenseitig stets *zu 1 ergänzen*, wie etwa die Quadrate von *Sinus* und *Cosinus* eines Winkels, deren Summe ebenfalls immer gleich der Einheit ist.

Sowohl bei ψ, als auch bei ω haben wir es mit *Funktionen der technischen Grundlagen* einer Versicherung zu tun.

Unter diesen technischen Grundlagen, als Variable, fällt zunächst der bekannte, zur Barwertbestimmung geeignete Abzinsungsfaktor v in Betracht, durch dessen Höhe der *Zinsfuß* i festgelegt wird. Es ist $v = \frac{1}{1+i}$ und der logarithmische Diskont oder die Zinsintensität $\delta = ln(1+i)$. Sodann sind die *Prämienordnung* p (Ordnung der Versicherungsnehmer, Aktivitätsordnung) und schließlich die Leistungsfunktion y der Versicherung zu berücksichtigen. Es ist stets:

$$\psi(v,p,y) + \omega(v,p,y) = 1. \tag{1}$$

Bevor wir auf die weitere mathematische Erfassung übergehen, wollen wir auf die sehr *reale*, theoretisch und praktisch wichtige Bedeutung der beiden Größen ψ und ω hinweisen.

§ 2. Der Betrieb einer Versicherung verlangt in der Regel von den Versicherungsnehmern die Entrichtung wiederkehrender *Prämien* und von der Versicherungseinrichtung oder Gesellschaft die *Rücklage eines Dekkungskapitals*, der Prämienreserve. Das Bedürfnis nach Ansammlung von Deckungskapitalien ist bei den einzelnen Versicherungsarten recht verschieden. Die Notwendigkeit größerer oder geringerer Rücklagen drückt einer *Versicherungsart geradezu ihren Stempel* auf. Die Notwendigkeit der Rücklage bedeutender Summen ist z. B. bei einer Krankenkasse viel geringer, als bei einer Lebensversicherungsanstalt.

Für eine Versicherungseinrichtung bilden, neben den eingehenden Prämien, die *Zinsen* des Deckungskapitals eine Einnahmequelle. *Beide*

Einnahmequellen, die Prämien der Versicherungsnehmer und die Zinsen des Deckungskapitals, *müssen genügen*, damit die Gesellschaft ihre *vertraglichen Verpflichtungen* erfüllen kann.

Die zwei Einnahmequellen sind im allgemeinen, je nach Maßgabe des Versicherungsbestandes, seines Alters und seiner Struktur zeitlichen Aenderungen unterworfen. Hat aber der Versicherungsbestand durch Neuzugänge einen gewissen Umfang erreicht und durch Erneuerungen einen Zustand erlangt, den man gewöhnlich als *Beharrungszustand* oder auch als stationären Zustand zu bezeichnen pflegt, so wird jede der beiden Einnahmequellen *gleichmäßig* fließen. Beide werden *zusammen so viel ergeben müssen*, wie die Gesellschaft an *Versicherungsleistungen*, die nunmehr ebenfalls eine Konstanz erlangt haben, zu verabfolgen hat. Untersuchungen über den Beharrungszustand sind schon öfters vorgenommen und ihre Wichtigkeit ist betont worden, so z. B. von Dr. *G. Schaertlin*[1]) und andern Autoren. Indem man die Einheit der Versicherungsleistung ins Auge faßt, wird man sagen können, daß *jede Leistung 1*, und das gilt für die verschiedenen Versicherungsarten, *im Beharrungszustande durch zwei Einnahmekomponenten* befriedigt wird, entsprechend den beiden im Beharrungszustande konstanten Einnahmequellen, den *Prämien* und den *Zinsen* des *Deckungskapitals. Die zwei Komponenten sind unsere komplementären Maßzahlen* ψ und ω.

Es ist einleuchtend, daß es für jede Gesellschaft von großem Interesse sein muß, einen Kompaß zu besitzen, um zu erkennen, wohin sie steuert und wie groß für sie im Beharrungszustande die beiden Einnahmekomponenten ausfallen.

§ 3. In der nachstehenden Untersuchung benützen wir, und zwar bei den Ableitungen ausschließlich, *die kontinuierliche Methode.* Wir nehmen also dabei alle Aenderungen als sich in Differentialen fortlaufend, sich *kontinuierlich* vollziehend an. Damit gewährt man in der Versicherungsmathematik, wie wir schon mehrfach zu betonen Gelegenheit hatten, einer Betrachtungsweise Eingang, wie sie in sämtlichen Gebieten der Naturwissenschaften und der Technik seit Erfindung der Differential- und Integralrechnung so fruchtbare und glänzende Resultate gezeitigt hat.

Nicht nur die *Prämienentrichtung*, sondern auch die *Verzinsung* und die *Versicherungsleistungen* sind gemäß dieser Methode als Kontinuitäten anzusprechen. Dadurch wird der Schluß auf den Beharrungszustand er-

---

[1]) Dr. *G. Schaertlin*, die Altersversorgung der eidgenössischen Beamten und Angestellten. Separatabdruck aus der Zeitschrift für schweizerische Statistik. Bern 1889, Buchdruckerei K. J. Wyß.

leichtert und dieser selbst kann genau festgelegt werden. Wie man sehen wird, lassen sich auch die *Maßzahlen ψ und ω in einfachen, geschlossenen Ausdrücken zur Darstellung bringen.*

B. Allgemeine Ableitungen

§ 4. Wir gehen aus von einer großen, geschlossenen *Gesamtheit.* Sie bestehe aus H Elementen (Personen). Die Gesamtheit nehme allmählich kontinuierlich ab[2]) und sei nach der Zeit t noch gleich $Hp(t)$. Die Funktion $p(t)$ als Wahrscheinlichkeit ist demnach anfänglich gleich 1 und nähert sich, wenn t groß geworden ist, der Null.

Die Gesamtheit betrachten wir nun als solche der prämienpflichtigen Versicherungsnehmer (Aktiven). An die Existenz dieser anfänglichen H Prämienzahler binde sich ein *versicherbarer Vorgang* $Hy(t)$, der, wie die Entrichtung der Prämien, ebenfalls kontinuierlich verlaufe. Der Anfangsgesamtheit $Hp(0)$ entspricht demnach der Anfangsvorgang $Hy(0)$, der Gesamtheit $Hp(t)$ der Vorgang $Hy(t)$. Dem Vorgange 1 komme die Versicherungsleistung 1 zu. Der Vorgang kann sich mit der Zeit sehr ändern, z. B. kann er gewisse Maximalwerte annehmen, entsprechend den versicherbaren Vorgängen, muß aber, wie es ja die tatsächlich vorkommenden Verhältnisse verlangen, so beschaffen sein, daß er mit der Zeit zu null wird. Wir bemerken noch, daß der Allgemeinheit der Ableitungen kein Eintrag getan wird, wenn wir im Folgenden $H = 1$ setzen. Die aufgeführten Angaben genügen, um die kontinuierlich zu entrichtende, auf das Jahr als Einheit der Zeit berechnete Prämie P zu bestimmen.

§ 5. Die *Prämie,* die auf die Einheit der Gesamtheit im Momente dt zur Zeit t entfällt, sei $P\,dt$. In einem Jahre beträgt sie dann $\int_0^1 P\,dt = P$, da P nicht von t abhängt. Die ganze, von der Gesamtheit $p(t)$ im Momente dt zu entrichtende Prämie ist $p(t) \,.\, P\,dt$. Ihr Barwert beträgt $v^t \,.\, p(t)\, P\,dt$. Für die volle Versicherungsdauer wird er gleich:

$$P \int_0^\infty v^t p(t)\, dt.$$

---

2) Vgl. des Verfassers „Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit". Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 21, Bern bei Stämpfli & Cie., 1926. Ferner: „Integralgleichungen und sich erneuernde Gesamtheiten". Neunter internationaler Kongreß der Versicherungsmathematiker 1930 in Stockholm, Bd. III, S. 215 und Bd. IV, S. 393 und 499. Uppsala 1931.

Bricht $p(t)$ schon im Endlichen ab, etwa bei n, so braucht selbstverständlich nur von 0 bis n integriert zu werden. Anderseits ist der Barwert der gesamten Versicherungsleistung:

$$\int_0^\infty v^t y(t)\,dt.$$

Da der Barwert der Prämie dem Barwert der Versicherungsleistung gleich zu setzen ist, so folgt:

$$P\int_0^\infty v^t p(t)\,dt = \int_0^\infty v^t y(t)\,dt.$$

Diese Gleichung dient dazu, um P ermitteln zu können. Man erhält:

$$P = \frac{\int_0^\infty v^t y(t)\,dt}{\int_0^\infty v^t p(t)\,dt} \tag{2}$$

Hier ersieht man recht gut, in welcher Weise die Prämie $P(v, p, y)$ als Funktion der 3 technischen Grundlagen v, p, y auftritt.

§ 6. Das *Deckungskapital* oder die Prämienreserve $z(t)$ zur Zeit t ist gleich der Differenz zwischen dem Barwert der künftigen Versicherungsleistungen und dem Barwert der künftigen Prämien, nämlich:

$$z(t) = \int_t^\infty v^{\tau - t} y(\tau)\,d\tau - P\int_t^\infty v^{\tau - t} p(\tau)\,d\tau. \tag{3}$$

Wir integrieren demnach, in Befolgung der prospektiven Deckungskapitalbestimmung, von t an. Aus Gleichung (3) kann Gleichung (2) abgeleitet werden, wenn man in Gleichung (3) die Variable $t = 0$ setzt. Dann gilt nämlich ebenfalls $z(0) = 0$.

Die Darstellung gemäß Gleichung (3) zeigt deutlich, wie wir es bei dem Deckungskapital $z(v, p, y, t)$ mit einer Funktion von 4 Größen, nämlich von drei technischen Grundlagen und der Zeit zu tun haben. Die

Aenderung nach der Zeit ist gewöhnlich bei der einzelnen, gegebenen Versicherungsart besonders hervortretend und wichtig.

§ 7. Gehen wir jetzt von der allmählich bis zu null abnehmenden, geschlossenen Gesamtheit zu der kontinuierlich sich *erneuernden Gesamtheit* über. Alle ausscheidenden Elemente sollen von Anfang an fortlaufend und *kontinuierlich* durch solche ersetzt werden, deren *Struktur genau der Anfangsstruktur* der ursprünglichen Gesamtheit entspricht. Sie sollen von dieser Normalzusammensetzung das getreue Abbild sein und unsere neue Gesamtheit so ergänzen, daß sie stets *konstant* bleibt. Die Vorgänge in dieser neuen, konstant erhaltenen Gesamtheit streben ebenfalls einzeln einer Konstanz zu. Vorher werden sie, wie sich zeigen läßt, in der Regel gewisse abklingende Schwingungen beschreiben. Ist die Konstanz erreicht, hat man es also mit dem *Beharrungszustand* zu tun, so werden, wie bereits betont wurde, sowohl die eingehende Prämie, als auch die auszurichtende Versicherungsleistung und das Deckungskapital in gleichen Beträgen verharren (Grenzwerte für $t = \infty$). Definitionsgemäß ist die Prämie in einem Momente dt gleich $P\,dt$, im Jahre gleich P. Soviel beträgt sie für jede Einheit, sowohl der ursprünglichen geschlossenen, als auch der neuen Gesamtheit. Hätten wir es mit $\int_0^\infty p(t)\,dt$ Einheiten zu tun, so wäre auch die Prämie das Mehrfache, nämlich jährlich $P\int_0^\infty p(t)\,dt$, und nach Analogie, jenen Einheiten entsprechend, der jährliche, kontinuierlich zu entrichtende Deckungskapitalzins $\delta\int_0^\infty z(t)\,dt$ und die jährliche Versicherungsleistung $\int_0^\infty y(t)\,dt$. Nun ist es naheliegend, sich zu überlegen, daß die genannten Einheiten, indem wir über das ganze endliche Gebiet integrieren, auch sämtliche möglichen Elemente des Beharrungszustandes umfassen. Gleiches gilt mit Bezug auf die hier auftretenden zinstragenden Elemente des Deckungskapitals und mit Bezug auf die Elemente der Versicherungsleistung. Wie in der vorn erwähnten Arbeit (Mitt. Heft 21), auf die wir hier verweisen möchten, des Nähern und in aller Strenge dargetan wird, entsprechen sich in der Tat obige Einnahmen und die Versicherungsleistung im Beharrungszustande und halten sich das Gleichgewicht (vgl. dort S. 19, VI). Es ist also:

$$(4) \qquad P\int_0^\infty p(t)\,dt + \delta\int_0^\infty z(t)\,dt = \int_0^\infty y(t)\,dt.$$

§ 8. Die beiden *Einnahmekomponenten* für die Versicherungsleistung 1 gehen ohne weiteres aus Gleichung (4) hervor. Dividieren wir beide Seiten mit $\int_0^\infty y(t)\,dt$, so erhalten wir:

$$(5) \qquad P\frac{\int_0^\infty p(t)\,dt}{\int_0^\infty y(t)\,dt} + \delta\frac{\int_0^\infty z(t)\,dt}{\int_0^\infty y(t)\,dt} = 1.$$

Die erste Komponente ist nichts anderes als der Prämienanteil ψ, und die zweite ist gleich dem Zinsenanteil ω, womit Gleichung (1) erwahrt ist. Wir haben also im *Beharrungszustande für die Versicherungsleistung 1 folgende zwei Einnahmekomponenten:*

$$(6) \qquad \psi(v,p,y) = P\frac{\int_0^\infty p(t)\,dt}{\int_0^\infty y(t)\,dt}$$

und

$$(7) \qquad \omega(v,p,y) = \delta\frac{\int_0^\infty z(t)\,dt}{\int_0^\infty y(t)\,dt}.$$

Gleichung (6) stellt die Einnahmekomponente für die *Prämie* und Gleichung (7) für den *Deckungskapitalzins* dar. Der Betrag P wird durch Gleichung (2) und das Deckungskapital $z(t)$ durch Gleichung (3) gegeben. Unsere Aufgabe ist damit ganz allgemein für die verschiedenen einschlägigen Versicherungsarten gelöst und die Maßzahlen ψ und ω sind ermittelt. Es bleibt uns noch übrig, an Beispielen für einzelne Versicherungsarten die Integrationen und andern Ausrechnungen vorzunehmen und die Resultate nachstehend anzugeben.

C. Numerische Beispiele für einzelne Versicherungsarten

§ 9. Um numerische Beispiele ausführen zu können, müssen wir für die *technischen Grundlagen*, nämlich für die Größen v, p, y gewisse Werte wählen. Diese seien in aller Kürze hier vermerkt.

1) Als *Zins* wählen wir einen solchen, für den $v^{20} = \frac{1}{2}$ ist. Dann wird der Zinsfuß etwas größer als $3\frac{1}{2}\,\%$ und der logarithmische Diskont $\delta = 0{,}034657..$

2) Da es sich nur darum handelt, die Anwendung auf die Praxis zu demonstrieren, so fasse man für die *Ordnung p* der Versicherungsnehmer nur einen zweistufigen Verlauf ins Auge. Die Integrale können ja auch ermittelt werden, und zwar ganz genau und leichter, wenn der Integrand eine Zeitlang konstant bleibt. Die zweistufige Gesamtheit, die hier gewählt werden möge, sei definiert in einer ersten Periode I von 20 Jahren mit $p(t) = 1$ und in einer gleichlangen, zweiten Periode II mit $p(t) = \frac{2}{3}$. Die Prämienzahlungsdauer steigt damit durchschnittlich auf $33\frac{1}{3}$ Jahre.

3) Die *Versicherungsleistungen y* werden folgendermaßen festgesetzt:

a) In der *Krankenversicherung* betrage die Leistung, und zwar für jeden Krankentag, je 1. Die durchschnittliche, auf ein Mitglied berechnete Zahl der jährlichen Krankentage, sei 8 in I und 16 in II, so daß für die zweistufige Gesamtheit in II konsequenterweise mit $\frac{2}{3} \cdot 16$ oder mit $10\frac{2}{3}$ jährlichen Krankentagen zu rechnen ist.

b) In der *Lebensversicherung* sei die Versicherungssumme 1 maßgebend. Diese wird nach Ablauf von I an $\frac{1}{3}$ und nach Ablauf von II an $\frac{2}{3}$ der anfänglichen Gesamtheit ausgerichtet.

c) In der *Witwenversicherung* komme jährlich jeder Witwe die Rente 1 zu, und zwar an $\frac{1}{3}$ in den Perioden I und II und an ebensoviel in der dritten, ebenfalls 20jährigen Periode III.

d) In der *Invaliden- und Altersversicherung* werde die jährliche Rente 1 an $\frac{1}{9}$ Invalide in II und an $\frac{4}{9}$ Alte in III verabfolgt.

e) In der *Altersversicherung* allein ist nur die Rente von jährlich je 1 in III an die $\frac{4}{9}$ Alten der ganzen ursprünglichen Gesamtheit auszurichten.

Prämien, Zinsen und Versicherungsleistungen werden *kontinuierlich* erstattet, wie es unsern Ableitungen entspricht.

§ 10. Die einzelnen Versicherungsarten ergeben nun die folgenden, lehrreichen *Resultate für die zwei Komponenten ψ und ω im Beharrungszustande.*

Versicherungsart	Resultate für ψ *Prämie*	ω *Zins*	$\psi + \omega$ *Zusammen*
Krankenversicherung	0,8929	0,1071	1,0000
Lebensversicherung	0,5776	0,4224	1,0000
Witwenversicherung	0,4688	0,5312	1,0000
Invaliden- u. Altersversicherung	0,3750	0,6250	1,0000
Altersversicherung allein	0,3125	0,6875	1,0000

Die Aufstellung läßt erkennen, wie *verschieden die einzelnen Versicherungsarten* auf Grund der gewählten Beispiele sich verhalten. In der Krankenversicherung spielt der Zins des Deckungskapitals nur eine untergeordnete Rolle. Die verhältnismäßig geringe Erhöhung der Prämie um 12 % würde diese von 0,8929 auf 1,0000 bringen, würde also genügen, um, ohne Zins, die ganze Leistung 1 verabfolgen zu können. Die Lebensversicherung dagegen muß schon in ganz anderer und sorgfältigerer Weise darauf Bedacht nehmen, die Quelle ihrer Zinsen ergiebig zu gestalten und reichliche Deckungskapitalien zurückzulegen. Bei der Altersversicherung hat die Zinsquelle, wie unser Beispiel zeigt, sogar recht viel größer auszufallen, als die Quelle der Prämien. Das ist auch leicht zu begreifen. Denn man hat es da, bis die Versicherungsleistungen erfolgen, mit besonders langen Zeiten der Ansammlung der notwendigen Deckungskapitalien zu tun.

Im Nachstehenden rechnen wir unser Schema auf je eine *Versicherungsleistung von 100 Franken* um.

Versicherungsart	*Jede Leistung von 100 Franken* wird im Beharrungszustande aufgebracht		
	durch *Prämien* mit Franken	durch *Zinsen* mit Franken	*zusammen* mit Franken
Krankenversicherung	89	11	100
Lebensversicherung	58	42	100
Witwenversicherung	47	53	100
Invaliden- u. Altersversicherung	38	62	100
Altersversicherung allein	31	69	100

Es darf noch darauf hingewiesen werden, daß *nach* einem Beharrungszustande und überhaupt, wenn die *Erneuerung einer Gesamtheit aufhören sollte*, der Abbau bei sorgfältiger zutreffender Wahl der Grundlagen technisch sich reibungslos gestalten müßte. Die „absterbenden Portefeuilles" einer Versicherungsgesellschaft werden zwar gewöhnlich recht gefürchtet. Aber richtig aufgebaute Versicherungsgebilde vermögen ihre Verpflichtungen ohne Neuzugang zu erfüllen. Selbst das „Absterben" eines Portefeuilles wird sich technisch durchaus sanft vollziehen können.

Eine rationelle, auf solider Grundlage beruhende Versicherung ist ein Kunstwerk. Freuen wir uns, daß zu seiner Beurteilung das erste und gewichtigste Wort dem *Mathematiker* gebührt.

(Eingegangen den 27. Januar 1932)