

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 4 (1932)  
  
**Artikel:** Geometrische Anwendungen der binären  $(n, n)$ - Verwandtschaft.  
**Autor:** Emch, Arnold  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-5609>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Geometrische Anwendungen der binären $(n, n)$ -Verwandtschaft

Von ARNOLD EMCH, Urbana, Illinois (U. S. A.)

## § 1. Einleitung

In einem in dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz über eine besondere Klasse von algebraischen Flächen<sup>1)</sup> habe ich auch die sogenannten Involutionenflächen behandelt, welche sich auf die vollständig symmetrische  $(n, n)$ -Verwandtschaft, oder eine Involution  $n^{\text{ter}}$  Ordnung auf einem binären Felde  $(\lambda, \mu)$ , das nicht homogen ist, gründen. Eine solche Verwandtschaft kann in der Form

$$(I) \quad \prod_{i=1}^{n+1} (\lambda - \lambda_i) \prod_{i=n+2}^{2n+2} (\mu - \lambda_i) - \prod_{i=n+2}^{2n+2} (\lambda - \lambda_i) \prod_{i=1}^{n+1} (\mu - \lambda_i) = 0$$

dargestellt werden. Diese Gleichung ist für  $\lambda = \mu$  identisch erfüllt, zudem verschwindet der Koeffizient des höchsten Gliedes  $(\lambda \mu)^{n+1}$ , und läßt sich folglich auf eine vollständig symmetrische  $(n, n)$  Verwandtschaft zwischen  $\lambda$  und  $\mu$  reduzieren. Letztere ist durch zwei  $(n+1)$ -wertige Gruppen vollständig bestimmt und es ergibt sich leicht, daß die Existenz einer einzigen solchen involutorischen Wertegruppe,  $\infty^1$  solche bedingt.

Den veränderlichen Parametern  $\lambda$  und  $\mu$  seien nun ein-eindeutig irgend welche gleichartige geometrische Gebilde zugeordnet. Das führt dann zu einer Unmenge interessanter geometrischer Erzeugnisse, von welchen ich in einer bald erscheinenden Arbeit berichten werde.

Identifiziert man z. B.  $\lambda$  und  $\mu$  mit Parametern der Tangenten desselben Kegelschnittes  $K$ , so erhält man Kurven  $n^{\text{ter}}$  Ordnung mit einfach unendlich vielen vollständig einbeschriebenen  $(n+1)$ -Seiten. Für  $n=4$  ergibt sich die bekannte Lüroth'sche Kurve 4. Ordnung mit  $\infty^1$  vollständig einbeschriebenen Fünfseiten, die alle demselben Kegelschnitt umschrieben sind.

Individualisieren  $\lambda$  und  $\mu$  je eine einhüllende Ebene einer abwickelbaren Fläche 3. Klasse, so erzeugen die Schnittlinien entsprechender Ebenen Regelflächen der Ordnung  $2n$  mit einer dreifachen Kurve

<sup>1)</sup> Comm. Math. Helv., Vol. 2 (1930), pp. 99—115.

$\frac{1}{2} n (n - 1)^{\text{ter}}$  Ordnung. Diese Kurve hat die Eigenschaft daß ihr  $\infty^1$   $(n + 1)$ -Fläche vollständig einbeschrieben sind, deren  $\frac{1}{2} n (n + 1)$  Schnittlinien  $n$ -fache Sekanten der Kurve sind. Jede Ebene eines solchen  $(n + 1)$ -Flaches schneidet die Regelfläche in  $n$  Erzeugenden und in einer Restkurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, welcher  $\infty^1 (n + 1)$ -Seite einbeschrieben sind. Für  $n = 4$  bekommt man die spezielle Kurve 6. Ordnung vom Geschlecht 3 mit  $\infty^1$  einbeschriebenen Pentaedern, die sich zugleich als sogenannte „Kegelspitzenkurve“ herausstellt, wie schon von *F. Schur* erkannt wurde.<sup>2)</sup> Jede Ebene eines solchen Pentaeders schneidet die zugehörige Regelfläche 8. Ordnung in vier Seiten und eine Restkurve 4. Ordnung vom Lüroth-Typus. Die fünften Seiten der letzteren einbeschriebenen Fünfseite sind gerade die Tangenten der Rückkehrkurve der abwickelbaren Fläche 3. Klasse.

In der vorliegenden Arbeit sollen Untersuchungen dieser Art weitergeführt werden. Anstatt einer einzigen Trägerkurve oder Trägerfläche der Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  sollen jetzt zwei, bezüglich drei solche Träger zu Grunde gelegt werden. Im Falle von drei Trägerflächen hat man es dann noch mit einem dritten Parameter  $\nu$  zu tun.

## § 2. Die allgemeine $(n, n)$ -Verwandtschaft auf zwei Kegelschnitten

Es seien

$$(2) \quad a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

$$(3) \quad d \mu^2 + e \mu + f = 0$$

zwei Klassenkegelschnitte, wobei  $a, b, c, d, e, f$  lineare Formen in  $(x_1, x_2, x_3) = (x)$  sind. Nach den  $x$  geordnet sind sie

$$(4) \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0,$$

$$(5) \quad B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 = 0,$$

wo jetzt die  $A$  und  $B$  beziehungsweise quadratische Polynome in  $\lambda$  und  $\mu$  sind. Für jedes Wertepaar  $(\lambda, \mu)$  wird der Schnittpunkt der beiden Tangenten im allgemeinen eindeutig bestimmt:

---

<sup>2)</sup> Math. Ann., Band 18 (1881), pp. 1—30.

$$(6) \quad \begin{aligned} \varrho x_1 &= A_2 B_3 - A_3 B_2, \\ \varrho x_2 &= A_3 B_1 - A_1 B_3, \\ \varrho x_3 &= A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned}$$

Jeder der Ausdrücke auf der rechten Seite ist vom 4. Grade in  $\lambda$  und  $\mu$  und vom zweiten in  $\lambda$  und vom zweiten in  $\mu$ . In einer Cartesischen  $(\lambda, \mu)$ -Ebene entspricht somit jedem allgemeinen Punkte  $(\lambda, \mu)$  eindeutig ein Punkt der projektiven  $(x)$ -Ebene, und  $A_2 B_3 - A_3 B_2 = 0$ , etc. stellen Kurven 4. Ordnung dar mit den unendlich fernen Punkten der  $\lambda$ - und  $\mu$ -Axe als Doppelpunkten. Einer Geraden  $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$  entspricht eine ebensolche Kurve 4. Ordnung

$$(7) \quad c_1 (A_2 B_3 - A_3 B_2) + c_2 (A_3 B_1 - A_1 B_3) + c_3 (A_1 B_2 - A_2 B_1) = 0,$$

und da der dritte Klammerausdruck durch Elimination aus den zwei übrigen folgt, so haben alle Kurven (7) außer den zwei Doppelpunkten noch vier andere feste Punkte gemein, welche auch Fundamentalpunkte der Transformation (6) sind und den vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegelschnitte  $(A)$  und  $(B)$  entsprechen. Zwei Kurven (7) schneiden sich also in nur vier veränderlichen Punkten, so daß also die Transformation (6) zwischen  $(x)$  und  $(\lambda, \mu)$  (1,4)-deutig ist. Bezeichnet  $r$  die Multiplizität eines Fundamentalpunktes, so gilt bei einer  $(1, m)$ -deutigen Transformation  $n^{\text{ter}}$  Ordnung vom Geschlecht  $p$  die Beziehung

$$\frac{1}{2} \sum r(r+1) = \frac{1}{2} n(n+3) - (m+1) + p,$$

welche in unserem Falle (zwei Doppelpunkte, vier einfache Punkte,  $n=4$ ,  $m=4$ ,  $p=1$ ) erfüllt ist.

Diese Transformation wende ich nun auf die Verwandtschaft 2  $n^{\text{ter}}$  Ordnung in  $(\lambda, \mu)$  an:

$$(8) \quad \lambda^n \Phi_0 + \lambda^{n-1} \Phi_1 + \dots + \Phi_n = 0,$$

worin die  $\Phi$  Polynome  $n^{\text{ten}}$  Grades in  $\mu$  sind und welche eine Kurve 2  $n^{\text{ter}}$  Ordnung mit  $n$ -fachen Punkten in den unendlich fernen Punkten der  $\lambda$ - und  $\mu$ -Axe darstellt. Für jedes (8) befriedigende Wertepaar  $(\lambda, \mu)$  ergibt sich in  $(x)$  eindeutig ein Punkt. Es handelt sich nun darum, den Ort dieser Punkte zu bestimmen. Der Geraden  $(cx)$  entspricht eine Kurve 4. Ordnung (7), welche (8) außerhalb der vielfachen Punkte in  $4 \cdot 2n - 2 \cdot 2 \cdot n = 4n$  Punkten schneidet. Der fragliche Ort ist somit von



der Ordnung  $4n$  und infolge des eindeutigen Entsprechens  $(\lambda, \mu) \rightarrow (x)$  vom gleichen Geschlecht wie (8). Somit hat man den

*Satz 1: Ueberträgt man  $\lambda$  und  $\mu$  einer  $(n, n)$ -Verwandtschaft auf zwei irreduzible Klassenkegelschnitte  $(A)$  und  $(B)$  als Träger, so ist der Ort der Schnittpunkte entsprechender Tangenten eine Kurve der Ordnung  $4n$  vom gleichen Geschlecht der Verwandtschaft. Ist die Verwandtschaft eine Involution (I), so befinden sich auf der  $C_{4n} \infty^1$  schachbrettartige Gruppen von  $n^2$  Punkten.*

Ist umgekehrt eine Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung  $C_n$  gegeben, so ergibt sich durch Substitution von (6) sofort eine Kurve  $\Gamma_{4n}$  der Ordnung  $4n$  mit den unendlich fernen Punkten der  $\lambda$ - und  $\mu$ -Axe als  $2n$ -fachen Punkten. Nur ist die Sache jetzt so, daß jedem Punkt von  $C_n$  vier Punkte von  $\Gamma_{4n}$  entsprechen. Zusammenfassend ergibt sich

*Satz 2: Der aus  $C_n$  in  $(x)$  hervorgegangenen  $\Gamma_{4n}$  in  $(\lambda, \mu)$  entspricht umgekehrt in  $(x)$  die vierfach überdeckte Kurve  $C_n$ . In diesem Sinne kann also jede algebraische Kurve aus einer  $(\lambda, \mu)$ -Verwandtschaft mit Hilfe zweier Klassenkegelschnitte erzeugt werden.*

Sind in (2) und (3)  $a = 0$ ,  $d = 0$ , so hat man zwei Geradenbüschel und (6) wird zu einer quadratischen Transformation. Schreibt man  $(\lambda, \mu)$  in homogenen Koordinaten  $(\lambda, \mu, \nu)$ , so ergibt die Umkehrung von (6) unter diesen Umständen

$$(9) \quad \rho \lambda = c e, \quad \rho \mu = b f, \quad \rho \nu = -b e.$$

Den Geraden  $b = 0$  und  $e = 0$  in  $(x)$  entsprechen bez. die Punkte  $L(1, 0, 0)$  und  $M(0, 1, 0)$ . Der Verbindungslinie  $g = 0$  der Scheitelpunkte der Büschel  $b\lambda + c\nu = 0$  und  $e\mu + f\nu = 0$  entspricht ein bestimmter Punkt  $N(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ . Die Fundamentalpunkte in  $(x)$  sind die Schnittpunkte der Geradenpaare  $(b = 0, e = 0)$ ;  $(b = 0, c = 0)$ ;  $(e = 0, f = 0)$ . Eine einer  $(n, n)$ -Verwandtschaft entsprechenden Kurve  $F(\lambda, \mu, \nu)$ , welche in  $L$  und  $M$   $n$ -fache Punkte hat, entspricht in  $(x)$  eine Kurve  $C_{2n}$  von derselben Ordnung und mit demselben Geschlecht. Nimmt man umgekehrt in  $(x)$  eine beliebige Kurve  $C_n$  vom Geschlecht  $p$  an, so entspricht ihr in der quadratischen Transformation in  $(\lambda, \mu, \nu)$  eine Kurve  $\Gamma_{2n}$  mit  $n$ -fachen Punkten in  $L, M, N$  und überdies  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - p$  Doppelpunkten, die natürlich dasselbe Geschlecht  $p$  hat. erinnert man sich noch der Eigenschaften der vollständig symmetrischen  $(n, n)$ -Verwandtschaft oder einer Involution  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, so kann man das gewonnene Resultat zusammenfassen als

*Satz 3: Jede algebraische Kurve kann als Ort der Schnittpunkte der Geraden zweier Büschel erhalten werden, welche sich nach einer bestimmten  $(n, n)$ -Verwandtschaft entsprechen.*

*Ist letztere eine Involution, so erhält man eine Kurve  $C_{2n}$  mit  $n$ -fachen Punkten in  $L$  und  $M$ , welcher  $\infty^1$  Gitter mit je  $n^2$  Punkten einbeschrieben sind. In der Cartesischen Ebene  $(x, y)$  sind diese Gitter rechtwinklig, d. h., sie werden von je  $n$  zu der  $x$ - und  $y$ -Axe parallelen Geraden ausgeschnitten. Eine solche Kurve hat die Form*

$$\prod_{i=1}^n (x - x_i) \prod_{i=n+1}^{2n} (y - y_i) + k \cdot \prod_{i=1}^{n+1} (y - y_i) \prod_{i=n+1}^{2n} (x - x_i) = 0.$$

### §3. Eine Cremona Transformation 6. Ordnung

Zwei Tangenten  $\lambda, \mu$  der Kegelschnitte  $(A)$  und  $(B)$  bestimmen im Allgemeinen einen Punkt  $P(x)$  eindeutig. Derselbe Punkt bestimmt, wenn  $(\lambda, \mu)$  gegeben ist, ein zweites Paar  $(\lambda', \mu')$  eindeutig, folglich sind  $\lambda'$  und  $\mu'$  eindeutig durch  $\lambda$  und  $\mu$  bestimmt. Umgekehrt bestimmen  $\lambda'$  und  $\mu'$  dasselbe Paar  $(\lambda, \mu)$  eindeutig. In der Verwandtschaft zwischen  $(\lambda, \mu)$  und  $(\lambda', \mu')$  handelt es sich also um eine involutorische Cremona Transformation zwischen den homogenen Feldern  $(\lambda, \mu, \nu)$  und  $(\lambda' \mu' \nu')$ , deren Ordnung und Charakter zu bestimmen ist.

Zunächst ist klar, daß die vier gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte auf vier Ausnahmepunkte  $F_3, F_4, F_5, F_6$  der Transformation führen müssen. Für  $\nu = 0$  sind  $\lambda$  und  $\mu$  beliebig, was durch  $a = 0, d = 0$  befriedigt wird. Diese Tangenten schneiden sich in einem Punkte  $P_7$ , von welchem ein zweites Tangentenpaar  $a' = 0, b = 0$  an die Kegelschnitte geht, daß in  $(\lambda, \mu, \nu)$  den Punkt  $F_7(\lambda_7', \mu_7', \nu_7')$ , der allen Punkten  $(\lambda, \mu, 0)$  der Geraden  $\nu = 0$  entspricht. Zwei weitere Fundamentalpunkte sind  $F_1(1, 0, 0)$  und  $F_2(0, 1, 0)$ , von welchen wir zeigen werden, daß sie dritter Ordnung sind, während sich  $F_3, F_4, F_5, F_6$  von der zweiten und  $F_7$  von der ersten Ordnung erweisen.

Zu diesem Zwecke kann man von der Tatsache ausgehen, daß in nicht homogener Form  $\lambda' + \lambda = -\frac{b}{a}, \lambda' \lambda = \frac{c}{a}, \mu' + \mu = -\frac{e}{a}, \mu' \mu = \frac{f}{a}$ , und man die Bedingung aufstellt, daß der Schnittpunkt der Tangenten  $\lambda'$  und  $\lambda$  mit demjenigen von  $\mu'$  und  $\mu$  zusammenfällt, und dann die zwei sich daraus ergebenden Gleichungen nach  $\lambda'$  und  $\mu'$  auf-

löst. Der Einfachheit halber nehme ich die Klassenkegelschnitte (A) und (B) in der Form

$$(A) = \lambda^2 (-x + 1) + \lambda \cdot 2y + x - 3 = 0, \\ (B) = \mu^2 (x + 1) - \mu \cdot 2y - x - 3 = 0,$$

an. Für  $(\lambda = 1, \mu = -1)$ ;  $(\lambda = -1, \mu = 1)$ ;  $(\lambda = \sqrt{3}, \mu = \sqrt{3})$ ,  $(\lambda = -\sqrt{3}, \mu = -\sqrt{3})$  ergeben sich in derselben Reihenfolge die gemeinschaftlichen Tangenten  $y = -1$ ,  $y = 1$ ,  $x - \sqrt{3} \cdot y = 0$ ,  $x + \sqrt{3} \cdot y = 0$ .

Aus (A) folgt  $\lambda' + \lambda = \frac{2y}{x-1}$ ,  $\lambda' \lambda = \frac{x-3}{-x+1}$ , welche nach  $x$  und  $y$  gelöst

$$x = \frac{\lambda' \lambda + 3}{\lambda' \lambda + 1}, \quad y = \frac{\lambda' + \lambda}{\lambda' \lambda + 1}$$

ergeben. In ähnlicher Weise erhält man aus (B)

$$x = -\frac{\mu' \mu + 3}{\mu' \mu + 1}, \quad y = -\frac{\mu' + \mu}{\mu' \mu + 1}.$$

Setzt die  $x$  und  $y$  beziehungsweise einander gleich, so kommt

$$(\lambda' \lambda + 3)(\mu' \mu + 1) + (\lambda' \lambda + 1)(\mu' \mu + 3) = 0, \\ (\lambda' + \lambda)(\mu' \mu + 1) - (\lambda' + \lambda)(\mu' \mu + 3) = 0.$$

Löst man diese Gleichungen nach  $\lambda'$  und  $\mu'$  und drückt das Resultat in homogener Form aus, so erhält man nach längerer, aber leichter Rechnung

$$(10) \quad \begin{aligned} \rho \lambda' &= (\lambda \mu - 2 \mu^2 + 3 \nu^2) (\lambda^2 \mu - \lambda \nu^2 - 2 \mu \nu^2) \nu, \\ \rho \mu' &= (\lambda \mu - 2 \lambda^2 + 3 \nu^2) (\lambda \mu^2 - \mu \nu^2 - 2 \lambda \nu^2) \nu, \\ \rho \nu' &= (\lambda \mu^2 - \mu \nu^2 - 2 \lambda \nu^2) (\lambda^2 \mu - \lambda \nu^2 - 2 \mu \nu^2). \end{aligned}$$

Nach den vorausgegangenen Entwicklungen und diesen Formeln stellt sich das System der Fundamentalpunkte und zugehörigen Fundamentalkurven in folgender Tabelle dar

$$\begin{array}{ll}
F_1(1, 0, 0); & f_1 = \lambda \mu^2 - \mu \nu^2 - 2 \lambda \nu^2 = 0, \\
F_2(0, 1, 0); & f_2 = \lambda^2 \mu - \lambda \nu^2 - 2 \mu \nu^2 = 0, \\
F_3(1, -1, 1); & f_3 = \lambda \mu - 2 \lambda + 2 \mu - 3 = 0, \\
F_4(-1, 1, 1); & f_4 = \lambda \mu + 2 \lambda - 2 \mu - 3 = 0, \\
F_5(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1); & f_5 = 3 \lambda \mu + 2 \sqrt{3} \cdot \lambda + 2 \sqrt{3} \cdot \mu + 3 = 0, \\
F_6(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1); & f_6 = 3 \lambda \mu - 2 \sqrt{3} \cdot \lambda - 2 \sqrt{3} \cdot \mu + 3 = 0, \\
F_7(0, 0, 1); & f_7 = \nu = 0.
\end{array}$$

Dabei hat man sich die  $F$  in  $(\lambda', \mu', \nu')$ , die  $f$  in  $(\lambda, \mu, \nu)$  zu denken. Die Felder können natürlich infolge des involutorischen Charakters vertauscht werden.

Werden die Ausdrücke in (10) in

$$k_1 \lambda' + k_2 \mu' + k_3 \nu' = 0$$

eingesetzt, so ergibt sich ein homoloidales Kurvennetz 6. Ordnung mit 2 dreifachen, 4 zweifachen und einem einfachen Grundpunkte, resp. Punkten. Man hat so den

*Satz 4:* Wählt man zwei irreduzible Klassenkegelschnitte  $A(\lambda)$  und  $B(\mu)$  in einer Ebene  $(x)$  und legt von einem beliebigen Punkte in  $(x)$  ein Tangentenpaar  $(\lambda, \mu)$  an die beiden Kegelschnitte, so ist das vom selben Punkte ausgehende zweite Tangentenpaar  $(\lambda', \mu')$  mit dem ersten durch eine involutorische Cremonatransformation 6. Ordnung verbunden. Dieselbe hat sieben Fundamentalpunkte und ebensoviele Fundamentalkurven, wovon zwei kubisch, vier quadratisch und einer (eine) linear sind.

Wird diese Transformation auf die Kurven  $\Gamma_{4n}$  des vorigen Abschnittes angewendet, so ergibt sich zunächst eine  $\Gamma'_{24n}$ . Da aber  $\Gamma_{4n}$   $F_1$  und  $F_2$  als  $2n$ -fache Punkte und  $F_3, F_4, F_5, F_6$  als  $n$ -fache Punkte enthält, so löst sich davon ein Kurvensystem von insgesamt der Ordnung  $2 \cdot 2n \cdot 3 + 4 \cdot n \cdot 2 = 20n$  ab, so daß die eigentliche Transformierte wieder eine  $\Gamma'_{4n}$  ist und nach der Bildungsweise selbstverständlich mit  $\Gamma_{4n}$  zusammenfällt. Somit

*Satz 5:* Alle aus  $C_n$  durch (6) hervorgegangenen Kurven  $\Gamma_{4n}$  werden von der oben erhaltenen involutorischen Cremonatransformation 6. Ordnung invariant gelassen.

Man kann die in § 2 beschriebene Methode der Kurvenerzeugung auf den Fall ausdehnen, in welchem  $A(\lambda)$  und  $B(\mu)$  rationale Klassenkurven höherer Ordnung sind und auf sie eine  $(n, n)$ -Verwandtschaft  $(\lambda, \mu)$  legt.

Ist diese projektive, d. h.,  $k_1 \lambda \mu + k_2 \lambda + k_3 \mu + k_4 = 0$ , so folgt der bekannte Satz, daß alle rationalen Kurven in  $(x)$  auf diese Weise erzeugt werden können, als spezielles Ergebnis. Stellen  $A(\lambda)$  und  $B(\mu)$  abwickelbare Flächen in einem Raume  $S_3(x)$  dar, so hat man es bei dem Erzeugnis mit Regelflächen zu tun. In ähnlicher Weise lassen sich Probleme dieser Art in großer Zahl in höhern Räumen aufstellen, namentlich wenn man die Zahl der Parameter, bezüglich der Träger vermehrt. In der Folge werde ich mich auf den projektiven  $S_3(x)$  beschränken.

#### § 4. Rationale abwickelbare Flächen als Träger in $S_3$

In einem projektiven Raume  $S_3$ ,  $(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  lege man zwei unabhängige abwickelbare Flächen von der Art

$$(11) \quad a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + a_2 \lambda^{m-2} + \dots + a_m = 0,$$

$$(12) \quad b_0 \mu^m + b_1 \mu^{m-1} + b_2 \mu^{m-2} + \dots + b_m = 0,$$

fest, worin die  $a$  und  $b$  lineare Formen in den  $x$  sind. Nun sollen  $\lambda$  und  $\mu$  wieder durch eine  $(n, n)$ -Verwandtschaft verbunden sein und zwar so, daß ihr Geschlecht  $p = (n - 1)^2 - d$  ist. Dieselbe werde mit  $V(\lambda, \mu) = 0$  bezeichnet. Dann entsprechen jedem Wertepaar von  $V$  zwei Ebenen (11) und (12), welche sich in der Erzeugenden  $g$  einer bestimmten Regelfläche  $R$  schneiden. Bringt man (11) und (12) mit einer beliebigen Ebene  $\Sigma c_i x_i = 0$  zum Schnitt, so ergeben sich darauf die  $x$  als Funktionen

$$(13) \quad \rho x_i = P_i(\lambda, \mu); \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

vom Grade  $m$  in  $\lambda$ , sowohl als in  $\mu$  und vom Grade  $2m$  in beiden. Wenden wir diese Transformation auf  $V(\lambda, \mu) = 0$  an, so ergibt sich in der Ebene  $(c x) = 0$  eine Kurve von der Ordnung  $2m \cdot 2n - 2 \cdot m \cdot n = 2mn$ . Folglich hat auch  $R$  dieselbe Ordnung und ist eine Regelfläche  $R_{2n}$  von demselben Geschlecht  $p$  wie  $V$ .

*Satz 6: Legt man eine  $(n, n)$ -Verwandtschaft vom Geschlecht  $p$  auf die einhüllenden Ebenen zweier rationalen abwickelbaren Flächen der  $m^{\text{ten}}$  Klasse, so ist das Erzeugnis einer Regelfläche der Ordnung  $2mn$  und vom Geschlecht  $p$ .*

Schließlich behandle ich noch kurz einige Probleme in welchen drei nicht homogene Parameter  $\lambda, \mu, \nu$  vorkommen.

Es bedeute

$$(14) \quad F(\lambda, \mu, \nu) = 0$$

eine irreduzible Fläche der  $n^{\text{ten}}$  Ordnung in einem Raume  $S_3(\lambda, \mu, \nu)$  und

$$(15) \quad \begin{aligned} a_0 \lambda^r + a_1 \lambda^{r-1} + \dots + a_r &= 0, \\ b_0 \mu^s + b_1 \mu^{s-1} + \dots + b_s &= 0, \\ c_0 \nu^t + c_1 \nu^{t-1} + \dots + c_t &= 0, \end{aligned}$$

rationale abwickelbare Flächen der Klasse  $r, s, t$ . Die  $a, b, c$  sind lineare Formen in  $S_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Für jedes Wertepaar  $(\lambda, \mu, \nu)$  stellen (15) drei Ebenen  $(\lambda), (\mu), (\nu)$  dar, die sich in einem Punkte  $P(x)$  schneiden. Löst man die (15) nach  $(x)$  auf, so ergeben sich

$$(16) \quad \rho x_i = R_i(\lambda, \mu, \nu); \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

worin die  $P_i$  Polynome vom Grade  $r, s, t$  bezüglich in  $\lambda, \mu, \nu$ , und vom Grade  $r + s + t$  in  $\lambda, \mu, \nu$  zusammen sind. Durchläuft nun  $(\lambda, \mu, \nu)$  die Fläche  $F$ , so beschreibt der Punkt  $P(x)$  eine Fläche  $\Phi(x)$ , welche die Transformierte von  $F$  durch (16) ist, und deren Ordnung sich als  $n(r + s + t)$  ergibt.

Vom Punkte  $P(x)$  gehen außer  $(\lambda, \mu, \nu)$  noch  $r - 1, s - 1, t - 1$  weitere einhüllende Ebenen bezüglich an die Flächen  $A(\lambda), B(\mu), C(\nu)$ , die durch das erste Tripel  $(\lambda, \mu, \nu)$  vollständig bestimmt sind. Für die unendlich ferne Ebene von  $S_3(\lambda, \mu, \nu)$  hat man einen einzigen Schnittpunkt, nämlich den von  $a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 = 0$ . Dieser ist also ein Fundamentalpunkt der Transformation (16) und die unendlich ferne Ebene in  $S_3(\lambda, \mu, \nu)$  die zugehörige Fundamentelebene.

Sind  $r = s = t = 2$ , also  $A(\lambda), B(\mu), C(\nu)$  Kegel, so entspricht jedem Tripel  $(\lambda, \mu, \nu)$  durch  $P(x)$  eindeutig ein zweites Tripel  $(\lambda', \mu', \nu')$ . Diese Beziehung ist involutorisch, so daß  $(\lambda', \mu', \nu')$  mit  $(\lambda, \mu, \nu)$  durch eine involutorische Cremonatransformation verbunden ist. Das Studium dieser interessanten Transformation soll jedoch in einer spätern Arbeit unternommen werden.

(Eingegangen den 16. Januar 1932)