

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 3 (1931)

Artikel: Sur l'approximation d'ordre n dans la théorie des figures planétaires.
Autor: Wavre, R.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-4675>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur l'approximation d'ordre n dans la théorie des figures planétaires

par R. WAVRE, Genève

Cet article fait suite au précédent: Vol. 2, p. 217—224, et je reproduirai ci-dessous le système fondamental par lequel se terminait le § 3, page 220. Quant aux notations elles ont été rappelées au § 2, page 217, et je les emploierai ici dans le même sens.

§ 1. Le principe des approximations

Dans leurs remarquables travaux sur les figures d'équilibre d'une masse fluide hétérogène, Clairaut, Laplace, Poincaré, ont négligé systématiquement les termes d'un ordre supérieur au carré de la vitesse angulaire. Ce procédé, tout à fait légitime pour des rotations lentes comme celle du soleil, n'est déjà plus suffisant pour le cas de la terre où l'influence des termes d'ordre quatre commence à se faire sentir, et c'est jusqu'à l'ordre six qu'il conviendrait de poursuivre les approximations dans le cas de Jupiter et de Saturne, si l'on voulait comparer avec précision les chiffres relatifs à la forme et à la rotation de ces astres, et tenir compte en plus du mouvement de leurs satellites.

J'appellerai « première approximation » celle où l'on tient compte des termes de l'ordre de ω^2 et où on néglige les termes d'ordre supérieur. La deuxième approximation consistera à tenir compte des termes en ω^2 et ω^4 mais à négliger les termes d'ordre supérieur, etc.; ω étant, comme toujours, la vitesse angulaire.

Posons

$$(1) \left\{ \Phi', R \right\} = -\Phi' H R'^{-1} R^{1-q} + 4\pi i \int_t^1 \rho R^{1-q} dR + 2\omega^2 \frac{1^+}{2-q} R^{2-q}.$$

Le système fondamental s'écrit, y compris l'équation de Poincaré

$$(2) \left\{ \Phi', R \right\}_q = \begin{cases} iM & \text{si } q = -1 \\ \Phi & q = 0 \\ \frac{5}{3} \omega^2 X_2(c\theta) & q = 2 \\ 0 & q = 1, 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

Mettons en évidence, dans l'expression du rayon vecteur, le rayon t de la sphère de même pôle que la surface de niveau :

$$(3) \quad R = t(1 + e).$$

La fonction e de t , θ et ψ s'appellera la déformation à partir de la sphère t . La quantité te représente l'excès du rayon vecteur sur le rayon de la sphère. La déformation sera toujours nulle sur l'axe polaire.

Développons e formellement en série de puissances de ω^2

$$(4) \quad e = \omega^2 e^{(1)} + \omega^4 e^{(2)} + \omega^6 e^{(3)} + \dots + \omega^{2n} e^{(n)} + \dots$$

Il n'y a pas lieu d'introduire un terme en ω^0 car pour $\omega = 0$ la stratification est sphérique en vertu du théorème de M. Lichtenstein.

Le potentiel de la pesanteur se développera d'une manière analogue

$$(5) \quad \Phi = \Phi^{(0)} + \omega^2 \Phi^{(1)} + \omega^4 \Phi^{(2)} + \dots + \omega^{2n} \Phi^{(n)} + \dots$$

Quant à la fonction $\rho(t)$, elle sera considérée comme donnée, les inconnues étant $e(t, \theta, \psi)$ et $\Phi(t)$. Si maintenant l'on substitue les développements (4) et (5) aux fonctions e et Φ dans le système fondamental, on obtiendra une expression formelle que l'on pourra ordonner suivant les puissances de ω^2 et relativement à toute valeur de q . Ces équations revêtiront la forme symbolique

$$(6) \quad \omega^0 F_q^{(0)} + \omega^2 F_q^{(1)} + \omega^4 F_q^{(2)} + \dots + \omega^{2n} F_q^{(n)} + \dots = 0.$$

Les fonctions F ne dépendent plus de ω . Il est à remarquer que $F_q^{(0)}$ ne peut contenir que $\Phi^{(0)}$ et $\rho(t)$; $F_q^{(1)}$ ne peut contenir que $\Phi^{(0)}$, $\Phi^{(1)}$, $e^{(1)}$ et $\rho(t)$; $F_q^{(2)}$ ne peut contenir que $\Phi^{(0)}$, $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ et $\rho(t)$ etc. Par équation à ω^{2n} près, nous entendons les relations

$$(7) \quad \omega^0 F_q^{(0)} + \omega^2 F_q^{(1)} + \dots + \omega^{2n-2} F_q^{(n-1)} = 0$$

dans lesquelles sont négligés les termes en ω^{2n} ainsi que ceux d'ordre supérieur. Revenons à l'expression symbolique (6). Nous considérerons ω comme une nouvelle variable et la relation (6) devra avoir lieu quel que soit ω , t , θ , ψ . Ceci nous oblige à annuler toutes les fonctions $F_q^{(n)}$. L'approximation d'ordre zéro consiste à poser $F_q^{(0)} = 0$. Ces re-

lations établiront simplement les formules connues pour des couches sphériques concentriques et le potentiel $\Phi^{(0)}$ qu'elles créent; potentiel qui se confond, dans ce cas, avec celui de Newton.

L'approximation d'ordre un consistera à écrire $F_q^{(1)} = 0$. Ces équations lieront les fonctions $e^{(1)}$ et $\Phi^{(1)}$ aux fonctions $\Phi^{(0)}$ et $\rho(t)$. Elles indiqueront la déformation de l'ordre ω^2 et l'altération $\Phi^{(1)}$ du champ de la pesanteur, qui proviennent toutes deux du fait que l'astre s'est mis à tourner lentement. Le système $F_q^{(1)} = 0$ domine, comme on le verra, la théorie classique.

L'approximation d'ordre deux consistera à écrire $F_q^{(2)} = 0$. Ces relations lieront les fonctions $e^{(2)}$ et $\Phi^{(2)}$ aux fonctions $\Phi^{(0)}$, $\Phi^{(1)}$, $e^{(1)}$ et $\rho(t)$ obtenues par les approximations précédentes, elles indiqueront la correction à faire subir à la première approximation, correction de l'ordre de ω^4 ; etc.

Après la première approximation, la déformation et le potentiel Φ s'écriront $e = \omega^2 e^{(1)}$ et $\Phi = \Phi^{(0)} + \omega^2 \Phi^{(1)}$.

Après la seconde approximation, ces fonctions s'écriront $e = \omega^2 e^{(1)} + \omega^4 e^{(2)}$ et $\Phi = \Phi^{(0)} + \omega^2 \Phi^{(1)} + \omega^4 \Phi^{(2)}$; etc.

§ 2. Remarques

Les approximations successives constituent un procédé itératif ou plus exactement récurrent, dans ce sens que les fonctions $e^{(n)}$ et $\Phi^{(n)}$ seront déterminées par les fonctions de rang moins élevé $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n-1)}$ et $\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(n-1)}$ obtenues précédemment. Les approximations d'ordre zéro, un, deux, ne fourniront que des surfaces de révolution et il en sera de même des suivantes. Mais cela ne veut pas dire que la résolution simultanée des équations (6) ou même des équations (7) ne fournissent également que des surfaces de révolution. Car le procédé récurrent employé revient à considérer tout d'abord la vitesse angulaire comme nulle, puis à animer la masse d'une petite rotation, telle que les termes en ω^2 puissent être seuls pris en considération, puis une rotation un peu plus forte qui mette en jeu les termes en ω^4 , etc. Le principe de raison suffisante vient confirmer cette proposition, en effet, dans cet astre qui est supposé partir du repos absolu et de l'état sphérique et qui s'anime d'une rotation croissante, il n'y a aucune raison pour qu'une dissymétrie se manifeste à une longitude plutôt qu'à une autre. Cette remarque devait être faite, et les figures d'équilibre que nous trouveront répondent davantage à un astre primitivement assez étendu (nébuleuse),

qui s'est concentré petit à petit, en tournant de plus en plus vite pour que le moment cinétique reste constant, qu'à une planète dont la rotation aurait diminué au cours des siècles à cause d'un freinage comme celui que les marées exercent.

Nous montrerons qu'en première et seconde approximations, les figures sont de révolution. Mais cela n'exclut pas absolument que la terre ait une forme légèrement polyédrale; cela montre simplement que si cette forme, d'ailleurs invraisemblable, existe réellement, c'est que la terre a diminué de vitesse angulaire sous l'influence d'astres perturbateurs comme la lune et le soleil.

L'étude de la stratification au voisinage de l'ensemble de densité maximum est fort délicate si l'on se refuse à admettre quelques hypothèses supplémentaires sur la répartition des densités.

Dans son livre sur les figures d'équilibre, Poincaré rejette à priori que la déformation des couches puisse devenir infinie. Cette hypothèse est nécessaire si l'on veut que la méthode des approximations s'applique, car si la déformation $e^{(1)}$ devenait infinie au voisinage du centre, le terme $\omega^2 e^{(1)}$ ne pourrait être envisagé comme de l'ordre de ω^2 . Nous rejetons également à priori qu'un des coefficients $e^{(n)}$ puisse devenir infini au voisinage du centre.

S'il s'agit d'une recherche des figures stables, cette hypothèse est encore plus légitime, car la forme générale de l'astre ne peut pas dépendre de la manière dont se comportent les densités dans un volume plus petit qu'une tête d'épingle placée au centre de l'astre.

Pour les figures instables, il est bon de remarquer que l'on exclut ainsi le cas où la stratification tendrait en forme vers un segment de droite, ou encore un cercle, quand on se rapproche du centre.

§ 3. L'approximation d'ordre n

Dans le tableau (2) remplaçons R par $t(1 + e)$ et développons e et φ en série procédant suivant les puissances de ω^2 comme nous l'indiquons au paragraphe 1. La fonction $e^{(n)}$ apparaît pour la première fois à l'approximation d'ordre n où elle figure linéairement. Nous poserons

$$(8) \quad \{e\} = \varphi'^0 t^{1-q} \left(qe + t \frac{\partial e}{\partial t} \right) + 4\pi i \int_t^1 \varphi \frac{\partial e t^{2-q}}{\partial t} dt$$

Le système fondamental s'écrit alors, il n'y a pas de grande difficulté à le vérifier, sous la forme suivante pour $n > 2$

$$(9) \quad \left\{ e^{(n)} \right\}_q = - \left\{ \Phi'_{n-1}, R_{n-1} \right\}_q^{2n} + \begin{cases} t^2 \frac{d\Phi^n}{dt} & \text{si } q = -1 \\ \Phi^n + t \frac{d\Phi^n}{dt} & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q > 0. \end{cases}$$

Dans l'accolade en R du second membre, l'indice inférieur $n-1$ rappelle qu'il faut remplacer R et Φ par leur valeur après la $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation

$$R_{n-1} = t \left[1 + \omega^2 e^{(1)} + \dots + \omega^{2n-2} e^{(n-1)} \right]$$

$$\Phi_{n-1} = \Phi^{(0)} + \omega^2 \Phi^{(1)} + \dots + \omega^{2n-2} \Phi^{(n-1)}$$

et l'indice supérieur $2n$ indique qu'il ne faut considérer dans cette accolade que le coefficient de ω^{2n} .

La fonction $e^{(n)}$ peut être développée en une série de fonctions sphériques, mais seule la fonction sphérique d'indice q interviendra dans l'accolade du premier membre; il faut poser

$$e^{(n)} = e_q^{(n)} X_q(c\theta) + e_{q,1}^{(n)} X_q^{(1)}(c\theta) c\psi + \dots + e_{q,-q}^{(n)} X_q^{(q)}(c\theta) sp\psi.$$

Le tableau doit être satisfait quelles que soient les valeurs de θ , ψ et t . On peut donc procéder à une identification suivant chaque fonction sphérique fondamentale. Le système s'écrit pour $n > 2$

$$(10) \quad \left\{ e_{q,p}^{(n)} \right\} = - \left\{ \Phi'_{n-1}, R_{n-1} \right\}_{q,p}^{2n} + \begin{cases} t^2 \frac{d\Phi^{(n)}}{dt} & \text{si } q = -1 \quad p = 0 \\ \Phi^{(n)} + t \frac{d\Phi^{(n)}}{dt} & q = 0 \quad p = 0 \\ 0 & \text{pour toute autre combinaison.} \end{cases}$$

L'accolade en R d'indice p, q indique qu'il faut prendre le coefficient de la fonction sphérique p, q dans le coefficient de ω^{2n} .

Les deux premières équations détermineront $\Phi^{(n)}$, les autres la déformation. Les équations sont les mêmes avec $-p$.

Il importerait de démontrer que les fonctions $e^{(n)}$ sont dominées par des nombres ω_+^{-2n} à partir d'un certain rang

$$(II) \quad |e^{(n)}| < \omega_+^{-2n}$$

pour prouver la convergence des approximations successives. Si, en effet, la relation (II) pouvait être établie, la série

$$e = \omega^2 e^{(1)} + \omega^4 e^{(2)} + \dots + \omega^{2n} e^{(n)} + \dots$$

serait convergente pour $0 \leq \omega < \omega_+$. Je n'ai pas recherché cette démonstration. L'introduction d'un calcul matriciel serait utile.

Les tableaux (9) et (10) ont l'avantage d'explicitier le procédé récurrent dont il était question au paragraphe 2.

§ 4. Un raisonnement par récurrence

J'invoquerai tout d'abord un théorème de Laplace: *En première approximation, la déformation est*

$$e^{(1)} = e_0^{(1)}(t) X_0 + e_2^{(1)}(t) X_2(c\theta)$$

elle ne dépend que de t et de θ et n'introduit que les polynômes X_0 et X_2 .

Voici ensuite quatre remarques.

1° La déformation $e^{(2)}$ se calcule à partir de $e^{(1)}$. Les seconds membres des équations seront indépendants de la longitude ψ et par conséquent tous les termes du premier membre avec $p \neq 0$ correspondront à des seconds membres nuls.

2° La fonction

$$\left(\frac{\partial X_q(c\theta)}{\partial \theta} \right)^2$$

est un polynôme d'ordre q en $c^2\theta$ et par conséquent il s'exprime à son tour par une somme de polynômes de Legendre d'ordre pair X_0, X_2, \dots, X_{2q} .

3° Les seconds membres de (10) ne contiendront que des termes pairs en $c \theta$ convertibles à leur tour en polynômes d'ordre pair $X_0, X_2(c \theta), X_4(c \theta), \dots$. Dans le tableau (10) les seconds membres seront donc nuls pour toutes les valeurs impaires de q .

4° On sait qu'un produit de polynôme de Legendre d'ordre q_1, q_2, \dots, q_n est un polynôme d'ordre $q_1 + q_2 + \dots + q_n$ en $c \theta$ qui s'exprime à son tour par une somme de polynômes de Legendre jusqu'à l'ordre $q_1 + q_2 + \dots + q_n$ au plus. Ceci étant, supposons que les fonctions $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n-1)}$ soient respectivement des sommes de polynômes de Legendre d'ordre 2, 4, $\dots, 2n-2$ au plus.

Je dis que $e^{(n)}$ sera une somme de polynômes X d'ordre $2n$ au plus.

En effet, rapportons-nous au tableau (10) du paragraphe précédent. Dans le second membre, R doit être remplacé par

$$R = t \left[1 + \omega^2 e^{(1)} + \dots + \omega^{2n-2} e^{(n-1)} \right]$$

et, dans l'accolade en R , il ne faudra retenir que le coefficient de ω^{2n} . Dans les différents termes qui le constituent, les fonctions $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n-1)}$ ne peuvent figurer que multipliées par les puissances de ω^2 correspondantes; la somme des indices de ces fonctions dans un produit ne pourra dépasser $2n$.

Et cela est vrai, même si l'on tient compte des termes en $\frac{\partial X_q}{\partial \theta}$ qui figurent dans l'accolade en R par l'intermédiaire de H .

Alors, en vertu de la remarque 4°, les seconds membres de $e^{(n)}$ ne contiendront aucune fonction sphérique d'ordre supérieur à $2n$.

En résumé, les seconds membres du tableau (10) seront nuls si l'une des circonstances suivantes se produit $p \neq 0$; q impair, à part $q = -1$; $q > 2n$.

Les équations revêtent alors la forme

$$\left\{ e_{q,p}^{(n)} \right\} = 0.$$

Nous ferons voir au paragraphe suivant que ces équations n'admettent pas d'autres solutions que $e_{q,p}^{(n)} \equiv 0$.

Dès lors, tous les coefficients $e_{q,p}^{(n)}$ seront nuls identiquement, sauf si l'on a $p = 0, q = 0, 2, 4, \dots, 2n$.

La déformation $e^{(n)}$ s'écrit

$$e^{(n)} = e_0^{(n)} X_0 + e_2^{(n)} X_2(c\theta) + \dots + e_{2n}^{(n)} X_{2n}(c\theta),$$

et la déformation totale est après la $n^{\text{ième}}$ approximation

$$\begin{aligned} e &= \omega^2 [e_0^{(1)} + e_2^{(1)} X_2(c\theta)] \\ &+ \omega^4 [e_0^{(2)} + e_2^{(2)} X_2(c\theta) + e_4^{(2)} X_4(c\theta)] \\ &+ \dots \\ &+ \omega^{2n} [e_0^{(n)} + e_2^{(n)} X_2(c\theta) + \dots + e_{2n}^{(n)} X_{2n}(c\theta)]. \end{aligned}$$

Laplace et Poincaré ont établi que la déformation est en première approximation

$$e = \omega^2 [e_0^{(1)} + e_2^{(1)} X_2(c\theta)].$$

En plus, Legendre a indiqué pour la seconde approximation la forme générale

$$e = \eta_0 X_0 + \eta_2 X_2(c\theta) + \eta_4 X_4(c\theta).$$

L'analyse précédente permet de conclure :

La déformation après la $n^{\text{ième}}$ approximation, procède suivant les polynômes de Legendre X_0, X_2, X_4, \dots jusqu'à X_{2n} .

Nous avons démontré en même temps que les surfaces sont de révolution et présentent le plan de symétrie $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ce dernier résultat pouvait être d'ailleurs prévu par le théorème de M. Lichtenstein.

§ 5. L'équation homogène

L'équation $\left\{ e_{q,p}^{(n)} \right\} = 0$ s'écrit avec la notation de Newton pour les dérivées et en supprimant les indices de e

$$\Phi'^0 t^{1-q} (q e + t e') + 4\pi i \int_t^1 \varrho d(e t^{2-q}) = 0.$$

La dérivée Φ'^0 n'est autre que la pesanteur changée de signe, créée par des sphères concentriques. Soit $D(t)$ la densité moyenne de la matière intérieure à la sphère de rayon t . On a

$$\Phi'^0 = -\frac{4}{3} \pi t D(t).$$

L'équation s'écrit sous la forme suivante

$$(12) \quad \frac{1}{3} D t^{2-q} (q e + t e') = \int_t^1 \rho t^{1-q} [(2-q) e + t e'] dt.$$

Montrons qu'elle n'admet pas d'autre solution bornée au voisinage de l'origine que $e \equiv 0$, si $q = 1, 2, 3, 4, \dots$. Différencions cette relation (12), on trouve facilement

$$(13) \quad (3 + q)(2 - q) D e + t(2 D' e + 6 \rho e' + t D e'') = 0.$$

En posant $\eta = \frac{t e'}{e}$ l'équation (12) s'écrit d'autre part

$$(14) \quad \frac{1}{3} D t^{2-q} e (q + \eta) = \int_t^1 \rho t^{1-q} e (\eta - q + 2) dt.$$

On sait qu'on peut faire $t > 1$ et que ρ est nul de 1 à t dans ce cas. A l'extérieur de l'astre $t > 1$, la relation se réduit à

$$e(q + \eta) \equiv 0.$$

1° Si $e \equiv 0$, on a $e' \equiv 0$ à l'extérieur et sur la surface libre $t = 1$, mais alors l'équation différentielle (13) n'admet pas d'autre solution à l'intérieur $t < 1$ que $e \equiv 0$ qui répondent à ces conditions de Cauchy aux limites.

Rappelons que c'est la dérivée seconde seule qui subit une discontinuité au travers de la surface libre.

2° Si $q + \eta \equiv 0$, alors posons $\eta = -q + \eta^+$ et l'on a $\eta^+ = 0$ pour $t = 1$. Dans ce cas e ne serait pas nul pour $t = 1$. L'équation (14) s'écrit

$$\frac{1}{3} D t^{2-q} e \eta^+ = \int_t^1 \rho t^{1-q} e (\eta^+ + 2 - 2q) dt.$$

Si $q = 1$, l'équation n'admet pas d'autre solution que $\eta^+ \equiv 0$, en effet, si η^+ s'annule pour $t = 1$ comme $(t - 1)^m$ dans le second membre, elle s'annulerait comme $(t - 1)^{m+1}$ dans le premier, ce qui est absurde.

Si $q > 1$, la parenthèse du second membre est négative pour t voisin de 1; il en sera de même de η^+ puisque D est positif et cela quel que soit le signe de e qui figure en facteur dans les deux membres. La fonction η^+ restant négative lorsque t diminue, la parenthèse restera négative et cela jusqu'à $t = 0$. On aurait donc de $t = 1$ à $t = 0$:

$$\eta^+ \leq 0, \quad \eta \leq -q, \quad \frac{e'}{e} \leq -\frac{q}{t}, \quad L \frac{e_1}{e} \leq -q L \frac{1}{t}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{e}{e_1} \geq \left(\frac{1}{t}\right)^q.$$

Cette relation est absurde, car e augmenterait au delà de toute limite quand on se rapproche du centre de l'astre.

L'alternative 2° a conduit à une absurdité, il ne reste que la possibilité 1° qui implique, on l'a vu, $e \equiv 0$.

(Reçu le 13 février 1930)