**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 3 (1931)

**Artikel:** Ueber die Abbildung projektiver Räume.

Autor: Emch, Arnold

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-4674

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 17.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# Ueber die Abbildung projektiver Räume

Von ARNOLD EMCH, Urbana, Illinois

## § 1. Abbildung projektiver Überräume auf rationale Hyperflächen

I. Es ist wohlbekannt, daß Abbildungsverfahren manchmal unerwartete und wichtige Aufschlüsse in der Behandlung geometrischer Probleme gestatten. Man denke z. B. nur an den Zusammenhang der Veronese'schen mit der Steiner'schen Fläche, oder von Segre's kubischen Varietät mit der Kummer'schen Fläche.

In den folgenden Zeilen handelt es sich darum, einen projektiven Überraum  $S_r(x_1, x_2, ..., x_{r+1})$  von r Dimensionen auf eine rationale Hyperfläche in einem  $S_{r+1}(y_1, y_2, ..., y_{r+2})$  abzubilden, um dann umgekehrt aus den Eigenschaften dieser Fläche Schlüsse auf diejenigen von  $S_r$  zu ziehen.

Dieses Problem soll dann insbesondere für  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  behandelt werden.

2. Ein  $S_r(x)$  kann durch folgende Transformation T ein-eindeutig auf eine bestimmte Hyperfläche F in einem  $S_{r+1}(y)$  abgebildet werden:

Bezeichnet man mit  $\Delta$  den Ausdruck  $x_1 x_2 \dots x_{r+1} = \Delta$ , so ergibt sich umgekehrt

(2) 
$$x_i = \frac{\Delta}{\rho} \cdot \frac{1}{v_i}, i = 1, 2, ..., r+1;$$

daraus

$$\varrho \, y_{r+2} = \frac{y_2^{\,r} \dots y_{r+1}^{\,r} + \dots + y_1^{\,r} y_2^{\,r} \dots y_r^{\,r}}{y_1^{\,r} y_2^{\,r} \dots y_{r+1}^{\,r}} \cdot \frac{\Delta^{\,r}}{\varrho^{\,r}} \cdot$$

1 Commentarii Mathematici Helvetici

Multipliziert man die ersten r+1 Gleichungen von (1), so ergibt sich

$$\varrho^{r+1} \cdot y_1 y_2 \dots y_{r+1} = x_1^r x_2^r \dots x_{r+1}^r = \Delta^r$$
,

also

$$y_1 y_2 \dots y_{r+1} = \frac{\Delta^r}{\varrho^{r+1}},$$

und

(3) 
$$y_{r+2} = y_1 y_2 \dots y_{r+1} \frac{(y_2^r \dots y_{r+1}^r) + \dots + (y_1^r \dots y_r^r)}{(y_1 y_2 \dots y_{r+1})^r}$$
, oder

(4) 
$$(y_2^r y_3^r \dots y_{r+1}^r) + (y_1^r y_3^r \dots y_{r+1}^r) + \dots + (y_1^r y_2^r \dots y_r^r) - (y_1 y_2 \dots y_{r+1})^{r-1} \cdot y_{r+2} = 0.$$

Die Punkte (y), welcher den Punkten (x) in  $S_r$  entsprechen, liegen also auf einer Hyperfläche der Ordnung  $r^2$  in einem  $S_{r+1}(y)$ . Zudem ist der birationale Charakter der Transformation (1) nachgewiesen.

Aus (4) geht hervor, daß Überräume gerader oder ungerader Ordnung bezüglich auf Hyperflächen gerader oder ungerader Ordnung abgebildet werden. Geht man in einen Euklidischen Überraum, indem man  $y_{r+2} = 0$  setzt, so zeigt sich, daß im Falle der geraden Ordnung die Fläche keine reellen unendlich fernen Punkte hat, also im Endlichen geschlossen ist. Im ungeraden Falle gibt es keine Hyperebene, welche die Fläche nicht in reellen Punkten schneidet. Die Fläche zieht sich ins Unendliche. Dieses steht mit der interessanten Tatsache im Zusammenhange, daß die projektiven Überräume vom Standpunkte der Topologie ein- oder zweiseitig sind jenachdem ihre Ordnung gerade oder ungerade ist.

# § 2. Die Abbildung der gewöhnlichen Ebene $\mathcal{S}_2$ auf die Steiner'sche Fläche

3. Die Transformation hat hier die einfache Form

(1) 
$$\begin{aligned} \varrho \, y_1 &= x_2 \, x_3 \,, \\ \varrho \, y_2 &= x_3 \, x_1 \,, \\ \varrho \, y_3 &= x_1 \, x_2 \,, \\ \varrho \, y_4 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \,, \end{aligned}$$

und die rationale Fläche F der Abbildung in  $S_3$  wird zur bekannten Römer-Fläche Steiner's:

(2) 
$$y_2^2 y_3^2 + y_3^2 y_1^2 + y_1^2 y_2^2 - y_1 y_2 y_3 y_4 = 0.$$

Da diese Abbildung wohlbekannt 1) ist, so sollen ihre Eigenschaften hier nicht eingehend behandelt werden. Den ebenen Schnitten von F entsprechen in  $S_2$  die Kegelschnitte eines Gewebes, das selbst ein Netz von  $\infty^2$  zerfallenden Kegelschnitten enthält, die den Tangentialschnitten von F entsprechen. In dem Netz befinden sich vier Doppelgeraden, die den vier Berührungskegelschnitten von F entsprechen. Einer Geraden g in  $S_2$  entspricht auf F ein Kegelschnitt K, der in einer Ebene e liegt, die F in einem zweiten Kegelschnitt K' schneidet. Diesem K' entspricht in  $S_2$  eine zweite Gerade g', die mit g einen zerfallenden Kegelschnitt des obengenannten Netzes bildet. Die Ebene e ist tangential zu F. Eine beliebige Kurve n-ter Ordnung schneidet g und g' in 2n Punkten; folglich schneidet ihr Bild auf F die Ebene e in einer geraden Anzahl Punkten. Also, wie bekannt: Auf der Steiner'schen Fläche gibt es nur Kurven gerader Ordnung.

4. Die Eigenschaften der Abbildung stehen in engem Zusammenhang mit der Apolarität und verdienen besonders erwähnt zu werden.

In einer involutorischen quadratischen Transformation I:

$$\rho x_1' = x_2 x_3, \ \rho x_2' = x_3 x_1, \ \rho x_3' = x_1 x_2$$

mit dem Fundamentaldreieck  $A_1$  (100),  $A_2$  (010),  $A_3$  (001) und dem invarianten Viereck B (111),  $B_1$  (-111),  $B_2$  (1-11),  $B_3$  (11-1) sind zwei entsprechende Punkte P, P' als degenerierter Kegelschnitt zweiter Klasse aufgefaßt apolar zu allen Kegelschnitten des Büschels durch  $BB_1B_2B_3$ . Ähnliches gilt bei dualistischer Übersetzung: Der Kegelschnitt (u)  $(u') = (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) (u_2 u_3 x_1 + u_3 u_1 x_2 + u_1 u_2 x_3) = 0$  ist apolar zu allen Klassenkegelschnitten, welche das invariante Vierseit b (111),  $b_1$  (-111),  $b_2$  (1-11),  $b_3$  (11-1) in der involutarischen quadratischen Linientransformation U:

$$\varrho \ u_1' = u_2 \ u_3, \ \varrho \ u_2' = u_3 \ u_2, \ \varrho \ u_3' = u_1 \ u_2$$
 berühren.

Die Geraden (u) und (u') schneiden sich in dem Punkte P:

$$\varrho \ a_1 = u_1 (u_2^2 - u_3^2), \ \varrho \ a_2 = u_2 (u_3^2 - u_1^2), \ \varrho \ a_3 = u_3 (u_1^2 - u_2^2),$$

<sup>1)</sup> Siehe E. Bertini: Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume (1924), pp. 400-410.

und diesem entspricht auf F ein Punkt  $(a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$ , mit der Tangentialebene

$$a_1 (a_2^2 + a_3^2 - a_1^2) y_1 + a_2 (a_3^2 + a_1^2 - a_2^2) y_2 + a_3 (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) y_3 - a_1 a_2 a_3 y_4 = 0.$$

Es ist leicht zu bestätigen, daß diese Ebene F in zwei Kegelschnitten K und K' schneidet, denen in  $S_2$  gerade (u) und (u') entsprechen. Man hat demnach

Satz 1. Den Tangentialebenenschnitten der Steiner'schen Fläche entsprechen in der Abbildungsebene Linienpaare welche apolar sind zu allen
Klassenkegelschnitten ( $\infty^1$ ), welche dem invarianten Vierseit der zugehörigen involutorischen quadratischen Linientransformation einbeschrieben
sind. Die Seiten des Vierseits entsprechen den Berührungskegelschnitten
von F und sind doppelt gerechnet selbstverständlich apolar zu jedem der
einbeschriebenen Kegelschnitte.

5. Wenn (x) eine Kurve  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  beschreibt, so umhüllt das Paar (u) (u') die Klassenkurve

(3) 
$$f\left(u_1\left(u_2^2-u_3^2\right), \ u_2\left(u_3^2-u_1^2\right), \ u_3\left(u_1^2-u_2^2\right)\right)=0,$$

welche die Transformation U invariant läßt. Der Schnittpunkt der in U sich entsprechenden Linien wird hier mit (x) bezeichnet. Wenn also (x) die Linie  $(b) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$  beschreibt, so umhüllt das Paar (u) (u') die Kurve dritter Klasse

(4) 
$$b_1 u_1 (u_2^2 - u_3^2) + b_2 u_2 (u_3^2 - u_1^2) + b_3 u_3 (u_1^2 - u_2^2) = 0.$$

Der Geraden (b) entspricht auf F ein Kegelschnitt  $K_1$ . Durch jeden Punkt von  $K_1$  gehen zwei koplanare Kegelschnitte K und K' auf F, welche dem durch den entsprechenden Punkt auf (b) gehenden Paare (u) (u') entsprechen. Durch einen allgemein gelegenen Punkt P von  $S_2$  gehen drei Tangenten an die Kurve (4), so daß auch durch jeden allgemein gelegenen Punkt von F drei Kegelschnitte gehen, welche ihre Kontaktpunkte auf einem gegebenen Kegelschnitte von F haben. Die von den Ebenen der Kegelschnitte  $K_1$  K' erzeugte abwickelbare Fläche  $D_1$  ist deshalb von der dritten Klasse. Da (4) eine allgemeine kubische Klassenkurve darstellt, so ist sie von der G0. Ordnung G0. Ein durch G1 gehendes Linienpaar schneidet also diese Kurve G1 in 12 Punkten. Sind

Satz 2. Gegeben sei ein Kegelschnitt  $K_1$  auf einer Steiner'schen Fläche F. Die Tangentialebenen in den Punkten von  $K_1$  erzeugen eine abwickelbare Fläche dritter Klasse und vierter Ordnung, welche F in einer residualen Kurve 12. Ordnung schneidet, welche von den von den Tangentialebenen ausgeschnittenen Kegelschnitten umhüllt wird.

6. Im allgemeineren Falle, wo Q(x) in  $S_2$  eine Kurve f(x) von der Ordnung n und dem Geschlecht p beschreibt, umhüllen die Geradenpaare (u), (u') durch Q eine Kurve  $C_{3n}$  von der Klasse 3n, vorausgesetzt, daß f(x) nicht durch die sechs invarianten Punkte der Transformation U geht, welche auch  $C_{3n}$  invariant läßt. Das Problem der Kurveninvarianz in involutorischen Cremona-Transformationen wurde vom Verfasser in mehreren Aufsätzen behandelt 1). Das Geschlecht von  $C_{3n}$  ergibt sich demnach als  $p^* = \frac{1}{2}(3n-1)(3n-2) - \frac{1}{2} \cdot 7n(n-1) - (n-1)(n-2) + 2p$ , oder  $p^* = 2n + 2p - 1$ . Die Anzahl der Doppeltangenten von  $C_{3n}$  ist  $\delta = \frac{1}{2}(3n-1)(3n-2) - p^* = \frac{1}{2}(9n^2-13n-4p+4)$ , und die Ordnung  $n^* = 3n(3n-1) - (9n^2-13n-4p+4)$ , oder  $n^* = 10n+4p-4$ . Der Kurve f(x) = 0 entspricht in der Abbildung auf F eine  $C_{2n}$  vom gleichen Geschlecht p. Die Tangentialebene h in jedem Punkte von  $C_{2n}$  schneidet F in zwei Kegelschnitten K, K', welche den durch den entsprechenden Punkt auf f(x) = 0

<sup>1)</sup> Siehe z. B. On surfaces and curves which are invariant under involutorial Cremona transformations. Am. Journ. of Math., vol. 48 (1926), pp. 21-44.

gehenden Geraden (u) und (u') entsprechen. Die Ebenen h umhüllen eine abwickelbare Fläche D von der Klasse 3n und der Ordnung z, die näher zu bestimmen ist. Das Bild von  $C_{3n}$  auf F ist eine Kurve W von der Ordnung 20n + 8p - 8. Da D die Fläche F der Kurve  $C_{2n}$  entlang berührt, so ist  $2n^* = 4 \cdot z - 4n$ , woraus sich z als z = 6n + 2p - 2 ergibt. Das Resultat mag zusammengefaßt werden als

Satz 3. Es sei  $C_n$  eine Kurve n-ter Ordnung vom Geschlecht p in der Ebene  $S_2$  mit gewöhnlichen Doppelpunkten in allgemeiner Lage. Ihr entspricht in der Abbildung auf die Steiner'sche Fläche F eine  $C_{2n}$ . Die Tangentialebenen an F in den Punkten von  $C_{2n}$  erzeugen eine abwickelbare Fläche D von der Klasse 3n und der Ordnung 6n + 2p - 2, welche F in einer Kurve W von der Ordnung 20n + 8p - 8 und dem Geschlecht 2n + 2p - 1 schneidet und sie überdies in  $C_{2n}$  berührt. Die in der Transformation U sich entsprechenden Geraden (u), (u') durch die Punkte von  $C_n$  umhüllen eine Kurve, deren Abbild auf F die Kurve W ist.

## § 3. Die Abbildung von $S_3$ auf eine rationale Fläche in $S_4$

7. Die Abbildung wird jetzt durch das System

$$\begin{aligned}
\varrho \, y_1 &= x_2 \, x_3 \, x_4 \\
\varrho \, y_2 &= x_1 \, x_3 \, x_4 \\
\varrho \, y_3 &= x_1 \, x_2 \, x_4 \\
\varrho \, y_4 &= x_1 \, x_2 \, x_3 \\
\varrho \, y_5 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3
\end{aligned}$$

bewerkstelligt, so daß dem gewöhnlichen projektiven Raume  $S_3$  (x) die Hyperfläche

(2) 
$$S_3' \equiv y_2^3 y_3^3 y_4^3 + y_1^3 y_3^3 y_4^3 + y_1^3 y_2^3 y_4^3 + y_1^3 y_2^3 y_3^3 - y_1^2 y_2^2 y_3^2 y_4^2 y_5 = 0$$

neunter Ordnung in einem projektiven Raume  $S_4(y)$  von vier Dimensionen entspricht. Diese, sowohl wie die entsprechende  $S_n'$  in  $S_{n+1}$ , (4) § 1, kann als verallgemeinerte Steiner'sche Fläche angesprochen werden. Der Punkt  $A_5$  des Koordinatenpentaeders  $A_1 \dots A_5$  ist ein achtfacher Punkt der Fläche. Aus (2) ist ferner ersichtlich, daß die Schnittebene je zweier der Koordinatenhyperebenen  $y_i = 0$ , i = 1, 2, 3, 4 auf  $S_3'$ 

dreifach ist. Ferner ist jede der vier Kanten  $y_i = 0$ ,  $y_k = 0$ ,  $y_l = 0$ , i, k, l = 1, 2, 3, 4 sechsfach, jede der sechs Kanten  $y_i = 0$ ,  $y_k = 0$ ,  $y_5 = 0$  dreifach. Ähnliches läßt sich für  $S_n'$  feststellen.

Einer Geraden l

(3) 
$$\varrho x_{i} = a_{i} + \lambda b_{i}, i = 1, 2, 3, 4,$$

in  $S_3$  entspricht auf  $S_3$ ' eine rationale Kurve dritter Ordnung  $C_3$ 

(4) 
$$\varrho y_i = K_0^{(i)} \lambda^3 + K_1^{(i)} \lambda^2 + K_2^{(i)} \lambda + K_3^{(i)}, i = 1, 2, 3, 4,$$

welche zudem auf einer Hyperebene  $h = \sum c_i y_i = 0$  liegt. Letztere ist durch die Gerade l eindeutig bestimmt. Einer beliebigen Ebene in  $S_3$ 

(5) 
$$\begin{aligned} \varrho \ x_1 &= \lambda_1 \, c_1, \\ \varrho \ x_2 &= \lambda_2 \, c_2, \\ \varrho \ x_3 &= \lambda_3 \, c_3, \\ \varrho \ x_4 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \end{aligned}$$

oder

(6) 
$$c_2 c_3 x_1 + c_3 c_1 x_2 + c_1 c_2 x_3 - c_1 c_2 c_3 x_4 = 0$$

entspricht auf S3' die Fläche dritter Ordnung

$$\sigma y_{1} = c_{2} c_{3} \lambda_{2} \lambda_{3} (\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3})$$

$$\sigma y_{2} = c_{3} c_{1} \lambda_{3} \lambda_{1} (\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3})$$

$$\sigma y_{3} = c_{1} c_{2} \lambda_{1} \lambda_{2} (\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3})$$

$$\sigma y_{4} = c_{1} c_{2} c_{3} \lambda_{1} \lambda_{2} \lambda_{3}$$

$$\sigma y_{5} = c_{1}^{3} \lambda_{1}^{3} + c_{2}^{3} \lambda_{2}^{3} + c_{3}^{3} \lambda_{3}^{3} + (\lambda_{1} + \lambda_{2} + \lambda_{3})^{3},$$

oder

(8) 
$$\begin{cases} c_2 c_3 y_2 y_3 y_4 + c_3 c_1 y_1 y_3 y_4 + c_1 c_2 y_1 y_2 y_4 - c_1 c_2 c_3 y_1 y_2 y_3, \\ y_5 = \frac{y_2^3 y_3^3 y_4^3 + y_1^3 y_3^3 y_4^3 + y_1^3 y_2^3 y_4^3 + y_1^8 y_2^3 y_3^3}{y_1^2 y_2^2 y_3^2 y_4^2}.$$

8. Eine Hyperebene

(9) 
$$3a_1y_1 + 3a_2y_2 + 3a_3y_3 + 3a_4y_4 - y_5 = 0$$

schneidet  $S_3$  in einer Fläche neunter Ordnung, welcher in  $S_3$  die Fläche dritter Ordnung

(10) 
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 - 3(a_1 x_2 x_3 x_4 + a_2 x_1 x_3 x_4 + a_3 x_1 x_2 x_4 + a_4 x_1 x_2 x_3) = 0$$

entspricht. Da es in  $S_3 \infty^{15}$  Kollineationen gibt und die allgemeine Fläche dritter Ordnung von 19 Konstanten abhängt, so läßt sich ihre Gleichung auf eine solche mit 4 Konstanten reduzieren, also gerade so viele wie in (10) vorkommen, so daß also in der Form (10) nichts an Allgemeinheit verloren geht. Übrigens läßt sich diese Tatsache auch auf algebro-geometrischem Wege beweisen. Man gelangt also zu einer neuen Normalform der kubischen Fläche:

Satz 4. Die allgemeine Gleichung der kubischen Fläche läßt sich auf eine solche reduzieren, in welcher die quadratisch-linearen  $(x_i^2 x_k)$  Glieder fehlen.

Diese Form führt zu einer interessanten Konfiguration  $\Delta_{18}$  von 18 Punkten, den Schnittpunkten der Fläche mit den 6 Kanten des Koordinatentetraeders. Setzt man z. B.  $x_4 = 0$ , so ist der Schnitt dieser Ebene mit der Fläche

(11) 
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3 a_4 x_1 x_2 x_3 = 0,$$

also die Hesse'sche Normalform. Die Kanten  $A_2$   $A_3$ ,  $A_3$   $A_1$ ,  $A_1$   $A_2$  enthalten zu dreien die 9 Wendepunkte, wovon die reellen auf der Einheitsgeraden  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  liegen. Man findet z. B. für die Koordinaten der 3 Wendepunkte auf  $A_2$   $A_3$  (0, 1, -1, 0), (0, 1,  $\omega$ , 0), (0, 1,  $\omega^2$ , 0), wo  $\omega^3 = 1$  ist. Diese sind von der Konstanten  $a_4$  unabhängig, so daß ein System von  $\infty^4$  Flächen dritter Ordnung durch die erhaltene Konfiguration  $A_{18}$  geht. Da 19 allgemein gelegene Punkte eine Fläche dritter Ordnung bestimmen, so ist  $A_{18}$  von ganz spezieller Art. Bei veränderlichen  $a_i$  bilden die Schnitte in den Koordinatenebenen syzygetische Büschel von Kurven dritter Ordnung. Wählt man eine Kurve aus jedem der vier Büschel, so gibt es gerade eine Fläche dritter Ordnung die durch jede der vier Kurven geht. Es ist leicht einzusehen, daß die Konfiguration  $A_{18}$  in der endlichen Substitutionsgruppe

(12) 
$$\begin{aligned}
\varrho \, x_1' &= x_1 \\
\varrho \, x_2' &= \omega^{\alpha} \, x_2 \\
\varrho \, x_3' &= \omega^{\beta} \, x_3 \\
\varrho \, x_4' &= \omega^{\gamma} \, x_4
\end{aligned}$$

invariant ist. Diese Gruppe ist abelsch und von der Ordnung 27 und Typus (1, 1, 1).  $\Delta_{18}$  ist natürlich auch invariant in der symmetrischen Gruppe der Ordnung 24 der vier Variabeln  $x_i$ . Jeder der 18 Punkte ist invariant in einer abelschen Gruppe  $G_9$ , z. B. (1,  $-\omega^2$ , 0, 0) in der Gruppe

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega x_3 & \omega x_4 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega x_3 & \omega^2 x_4 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega^2 x_3 & \omega x_4 \end{pmatrix}$$
 
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega^2 x_3 & \omega^2 x_4 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega x_4 & \omega x_3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega x_4 & \omega^2 x_3 \end{pmatrix}$$
 
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega^2 x_4 & \omega x_3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega^2 x_4 & \omega^2 x_3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} .$$

Satz 5. Die Konfiguration  $\Delta_{18}$  der Grundpunkte des  $\infty^4$  Systems von Flächen dritter Ordnung ist invariant in einer Kollineationsgruppe  $G_{648}$  von der Ordnung 27.24 = 648 mit den oben angegebenen Eigenschaften.

9. Die Ebene  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$  enthält vier von den Ebenen  $x_i = 0$  ausgeschnittenen Geraden, welche sich in sechs Punkten (1—100), .... schneiden und der Konfiguration  $\Delta_{18}$  angehören. Jede dieser Linien, z. B.  $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0)$  bestimmt ein Büschel von Ebenen

$$x_1 + (\lambda + 1) x_2 + (\lambda + 1) x_3 + (\lambda + 1) x_4 = 0.$$

Für  $\lambda + 1 = 1$  erhalten wir die Einheitsebene, für  $\lambda + 1 = \omega$  ergibt sich die Ebene

$$x_1 + \omega x_2 + \omega x_3 + \omega x_4 = 0,$$

welche die 6 Punkte (01–10), (001–1), (010–1), (1– $\omega^2$ 00), (10– $\omega^2$ 0), (100– $\omega^2$ ) von  $\Delta_{18}$  enthält, die 6 Schnittpunkte eines Vierseits von Mac Laurin Geraden (3 Wendepunkte eines syzygetischen Büschels enthaltend) bilden. Für  $\lambda + 1 = \omega^2$  erhält man die Ebene

$$x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^2 x_3 + \omega^2 x_4 = 0$$

welche ebenfalls ein Vierseit solcher Mac-Laurin Geraden enthält. Durch

jede Mac Laurin Gerade welche nicht Kante des Koordinatentetraeders ist gehen also drei Ebenen, von welchen jede ein von Mac Laurin Geraden gebildetes Vierseit enthält.

Es gibt (12—3). 4 = 36 Mac Laurin Geraden in  $A_{18}$ , somit 3. 36 Ebenen mit solchen Vierseiten. Der aber jede Ebene 4 Mac Laurin Geraden enthält, so reduziert sich die Zahl der Ebenen auf  $3 \cdot 36 \cdot 4 = 27$ . Diese werden aus der Einheitsebene durch die Substitutionen der abelschen  $G_{27}$  erhalten. Das Resultat kann noch auf folgende Weise bestätigt werden: Auf jeder Kante, z. B.  $A_1$   $A_2$  liegen drei Wendepunkte. Durch jeden derselben gehen drei übrige Mac Laurin Geraden in jeder der Ebenen  $A_1$   $A_2$   $A_4$  und  $A_1$   $A_2$   $A_3$ . Mit diesen zwei Tripeln kann man 9 Paare von Mac Laurin Geraden und ebensoviele Ebenen bilden, die sie enthalten. Jede dieser Ebenen enthält ein Vierseit von Mac Laurin Geraden. Also gehen durch die 3 Wendepunkte auf  $A_1$   $A_2$   $3 \cdot 9 = 27$  solche Ebenen. Zusammenfassend ergibt sich

Satz 6. Die 18 Punkte von  $\Delta_{18}$  liegen zu sechs als Schnittpunkte der Geraden von Mac Laurin Vierseiten in 27 Ebenen (ausschließlich die Koordinatenebenen). Durch jede von einer Kante verschiedenen Mac Laurin Geraden gehen drei Ebenen, von welchen jede ein Mac Laurin Vierseit enthält.

Die ganze Konfiguration wird natürlich von der Gruppe  $G_{648}$  beherrscht.

Es ist prinzipiell nicht schwierig, ähnliche Konfigurationen bei der Abbildung von Räumen  $S_n$  beliebiger Dimension auf Hyperflächen  $S_{n'}$  in einem  $S_{n+1}$  zu konstruieren und die zugehörigen Kollineationsgruppen aufzustellen.

10. Ist  $(z) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$  ein Punkt in  $S_3$ , so entspricht ihm auf  $S_3$  in  $S_4$  ein Punkt in welchem die Hypertangentialebene leicht als

(13) 
$$z_1 (z_2^3 + z_3^3 + z_4^3 - 2 z_1^3) y_1 + z_2 (z_1^3 + z_3^3 + z_4^3 - 2 z_2^3) y_2 + z_3 (z_1^3 + z_2^3 + z_4^3 - 2 z_3^3) y_2 + z_4 (z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 2 z_4^3) y_4 - z_1 z_2 z_3 z_4 y_5 = 0$$

gefunden wird. Diese schneidet  $S_3'$  in einer Fläche 9. Ordnung, der umgekehrt in  $S_3$  die Fläche dritter Ordnung  $F_3$ 

$$(14) \ z_{1}(z_{2}^{3}+z_{3}^{3}+z_{4}^{3}-2z_{1}^{3}) \ x_{2}x_{3}x_{4}+z_{2}(z_{1}^{3}+z_{3}^{3}+z_{4}^{3}-2z_{2}^{3}) \ x_{1}x_{3}x_{4} + z_{3}(z_{1}^{3}+z_{2}^{3}+z_{4}^{3}-2z_{2}^{3}) \ x_{1}x_{2}x_{4}+z_{4}(z_{1}^{3}+z_{2}^{3}+z_{3}^{3}-2z_{4}^{3}) \ x_{1}x_{2}x_{3} - z_{1}z_{2}z_{3}z_{4}(x_{1}^{3}+x_{2}^{3}+x_{3}^{3}+x_{4}^{3}) = 0,$$

entspricht. Diese hat im Punkte (z) einen Doppelpunkt und ist deshalb ein kubisches Monoid, das die Konfiguration  $\mathcal{L}_{18}$  enthält. Es ist klar, daß es ebensoviele  $(\infty^3)$  solcher Monoide gibt, als Punkte (z) in  $S_3$  und daß durch (z) als Doppelpunkt ein solches Monoid eindeutig bestimmt ist. Somit

Satz 7. Den Hypertangentialebenen der Hyperfläche  $S_3'$  in  $S_4$  entsprechen in  $S_3$  ein-eindeutig die  $\infty^3$  kubischen Monoide durch  $\Delta_{18}$ . Hält man in (14) (x) fest und läßt (z) veränderlich, so ergibt sich

Satz 8. Der Ort der Doppelpunkte der kubischen Monoide durch  $\Delta_{18}$ , welche überdies durch einen allgemein gelegenen Punkt (x) in  $S_3$  gehen, ist eine Fläche vierter Ordnung.

Wie zuvor, lassen sich ähnliche Sätze bei der Abbildung höherer Räume aufstellen. Außerdem kann man in jedem Fall den Zusammenhang der involutorischen Transformation

$$\varrho \, x_i' = \frac{1}{x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

und der dualen Ebenentransformation

$$\varrho u_i' = \frac{1}{u_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

mit der Abbildung von  $S_n$  auf  $S_{n+1}$  untersuchen, wie es bei der Abbildung von  $S_2$  auf die Steiner'sche Fläche geschah. Der Kürze halber soll jedoch hier nicht darauf eingetreten werden.

(Eingegangen den 21. Januar 1931)