Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 3 (1931)

Artikel: Ueber die Abbildung projektiver Räume.
Autor: Emch, Arnold
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4674

Ueber die Abbildung projektiver Räume

Von ARNOLD EMCH, Urbana, Illinois

§ 1. Abbildung projektiver Überräume auf rationale Hyperflächen

1. Es ist wohlbekannt, daß Abbildungsverfahren manchmal unerwartete und wichtige Aufschlüsse in der Behandlung geometrischer Probleme gestatten. Man denke z. B. nur an den Zusammenhang der Veronese'schen mit der Steiner'schen Fläche, oder von Segre's kubischen Varietät mit der Kummer'schen Fläche.

In den folgenden Zeilen handelt es sich darum, einen projektiven Überraum $S_r(x_1, x_2, \ldots, x_{r+1})$ von r Dimensionen auf eine rationale Hyperfläche in einem $S_{r+1}(y_1, y_2, \ldots, y_{r+2})$ abzubilden, um dann umgekehrt aus den Eigenschaften dieser Fläche Schlüsse auf diejenigen von S_r zu ziehen.

Dieses Problem soll dann insbesondere für S_2, S_3, S_4 behandelt werden.

2. Ein $S_r(x)$ kann durch folgende Transformation T ein-eindeutig auf eine bestimmte Hyperfläche F in einem $S_{r+1}(y)$ abgebildet werden:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \varrho y_1 &= x_2 x_3 \ldots x_{r+1}, \\ \varrho y_2 &= x_1 x_3 \ldots x_{r+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varrho y_{r+1} &= x_1 x_2 \ldots x_r, \\ \varrho y_{r+2} &= x_1^r + x_2^r + \ldots + x_{r+1}^r. \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit Δ den Ausdruck $x_1 x_2 \ldots x_{r+1} = \Delta$, so ergibt sich umgekehrt

$$(2)\qquad x_i = \frac{\Delta}{\varrho} \cdot \frac{1}{y_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, r+1;$$

daraus

$$\varrho y_{r+2} = \frac{y_2^r \ldots y_{r+1}^r + \ldots + y_1^r y_2^r \ldots y_r^r}{y_1^r y_2^r \ldots y_{r+1}^r} \cdot \frac{\Delta^r}{\varrho^r}.$$

Multipliziert man die ersten $r+1$ Gleichungen von (1), so ergibt sich

$$\varrho^{r+1} \cdot y_1 y_2 \cdots y_{r+1} = x_1^r x_2^r \ldots x_{r+1}^r = \Delta^r ,$$

also

$$y_1 y_2 \cdots y_{r+1} = \frac{\Delta^r}{\varrho^{r+1}} ,$$

und

$$y_{r+2} = y_1 y_2 \cdots y_{r+1} \frac{(y_2^r \ldots y_{r+1}^r) + \ldots + (y_1^r \ldots y_r^r)}{(y_1 y_2 \ldots y_{r+1})^r} , \text{ oder} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}(y_2^r y_3^r \ldots y_{r+1}^r) + (y_1^r y_3^r \ldots y_{r+1}^r) + \ldots + (y_1^r y_2^r \ldots y_r^r) \\ - (y_1 y_2 \cdots y_{r+1})^{r-1} \cdot y_{r+2} = 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Die Punkte (y), welcher den Punkten (x) in S_r entsprechen, liegen also auf einer Hyperfläche der Ordnung r^2 in einem $S_{r+1}(y)$. Zudem ist der birationale Charakter der Transformation (1) nachgewiesen.

Aus (4) geht hervor, daß Überräume gerader oder ungerader Ordnung bezüglich auf Hyperflächen gerader oder ungerader Ordnung abgebildet werden. Geht man in einen Euklidischen Überraum, indem man $y_{r+2} = 0$ setzt, so zeigt sich, daß im Falle der geraden Ordnung die Fläche keine reellen unendlich fernen Punkte hat, also im Endlichen geschlossen ist. Im ungeraden Falle gibt es keine Hyperebene, welche die Fläche nicht in reellen Punkten schneidet. Die Fläche zieht sich ins Unendliche. Dieses steht mit der interessanten Tatsache im Zusammenhange, daß die projektiven Überräume vom Standpunkte der Topologie ein- oder zweiseitig sind jenachdem ihre Ordnung gerade oder ungerade ist.

§ 2. Die Abbildung der gewöhnlichen Ebene S_2 auf die Steiner'sche Fläche

3. Die Transformation hat hier die einfache Form

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= x_2 x_3 , \\ \varrho y_2 &= x_3 x_1 , \\ \varrho y_3 &= x_1 x_2 , \\ \varrho y_4 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 , \end{aligned} \tag{1}$$

und die rationale Fläche F der Abbildung in S_3 wird zur bekannten Römer-Fläche Steiner's:

(2) $$y_2^2 y_3^2 + y_3^2 y_1^2 + y_1^2 y_2^2 - y_1 y_2 y_3 y_4 = 0.$$

Da diese Abbildung wohlbekannt[1]) ist, so sollen ihre Eigenschaften hier nicht eingehend behandelt werden. Den ebenen Schnitten von F entsprechen in S_2 die Kegelschnitte eines Gewebes, das selbst ein Netz von ∞^2 zerfallenden Kegelschnitten enthält, die den Tangentialschnitten von F entsprechen. In dem Netz befinden sich vier Doppelgeraden, die den vier Berührungskegelschnitten von F entsprechen. Einer Geraden g in S_2 entspricht auf F ein Kegelschnitt K, der in einer Ebene e liegt, die F in einem zweiten Kegelschnitt K' schneidet. Diesem K' entspricht in S_2 eine zweite Gerade g', die mit g einen zerfallenden Kegelschnitt des obengenannten Netzes bildet. Die Ebene e ist tangential zu F. Eine beliebige Kurve n-ter Ordnung schneidet g und g' in $2n$ Punkten; folglich schneidet ihr Bild auf F die Ebene e in einer geraden Anzahl Punkten. Also, wie bekannt: *Auf der Steiner'schen Fläche gibt es nur Kurven gerader Ordnung.*

4. Die Eigenschaften der Abbildung stehen in engem Zusammenhang mit der Apolarität und verdienen besonders erwähnt zu werden.

In einer involutorischen quadratischen Transformation I:

$$\varrho\, x_1' = x_2 x_3, \quad \varrho\, x_2' = x_3 x_1, \quad \varrho\, x_3' = x_1 x_2$$

mit dem Fundamentaldreieck $A_1\,(100)$, $A_2\,(010)$, $A_3\,(001)$ und dem invarianten Viereck $B\,(111)$, $B_1\,(-111)$, $B_2\,(1-11)$, $B_3\,(11-1)$ sind zwei entsprechende Punkte P, P' als degenerierter Kegelschnitt zweiter Klasse aufgefaßt apolar zu allen Kegelschnitten des Büschels durch $B\,B_1 B_2 B_3$. Ähnliches gilt bei dualistischer Übersetzung: Der Kegelschnitt $(u)\,(u') = (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)\,(u_2 u_3 x_1 + u_3 u_1 x_2 + u_1 u_2 x_3) = 0$ ist apolar zu allen Klassenkegelschnitten, welche das invariante Vierseit $b\,(111)$, $b_1\,(-111)$, $b_2\,(1-11)$, $b_3\,(11-1)$ in der involutarischen quadratischen Linientransformation U:

$$\varrho\, u_1' = u_2 u_3, \quad \varrho\, u_2' = u_3 u_2, \quad \varrho\, u_3' = u_1 u_2 \text{ berühren.}$$

Die Geraden (u) und (u') schneiden sich in dem Punkte P:

$$\varrho\, a_1 = u_1\,(u_2^2 - u_3^2), \quad \varrho\, a_2 = u_2\,(u_3^2 - u_1^2), \quad \varrho\, a_3 = u_3\,(u_1^2 - u_2^2),$$

---

[1]) Siehe *E. Bertini:* Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume (1924), pp. 400—410.

und diesem entspricht auf F ein Punkt $(a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$, mit der Tangentialebene

$$a_1 (a_2^2 + a_3^2 - a_1^2) y_1 + a_2 (a_3^2 + a_1^2 - a_2^2) y_2 + a_3 (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) y_3 \\ - a_1 a_2 a_3 y_4 = 0.$$

Es ist leicht zu bestätigen, daß diese Ebene F in zwei Kegelschnitten K und K' schneidet, denen in S_2 gerade (u) und (u') entsprechen. Man hat demnach

Satz 1. Den Tangentialebenenschnitten der Steiner'schen Fläche entsprechen in der Abbildungsebene Linienpaare welche apolar sind zu allen Klassenkegelschnitten (∞^1), *welche dem invarianten Vierseit der zugehörigen involutorischen quadratischen Linientransformation einbeschrieben sind. Die Seiten des Vierseits entsprechen den Berührungskegelschnitten von F und sind doppelt gerechnet selbstverständlich apolar zu jedem der einbeschriebenen Kegelschnitte.*

5. Wenn (x) eine Kurve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ beschreibt, so umhüllt das Paar (u) (u') die Klassenkurve

$$f\Big(u_1 (u_2^2 - u_3^2),\ u_2 (u_3^2 - u_1^2),\ u_3 (u_1^2 - u_2^2)\Big) = 0, \tag{3}$$

welche die Transformation U invariant läßt. Der Schnittpunkt der in U sich entsprechenden Linien wird hier mit (x) bezeichnet. Wenn also (x) die Linie $(b) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$ beschreibt, so umhüllt das Paar (u) (u') die Kurve dritter Klasse

$$b_1 u_1 (u_2^2 - u_3^2) + b_2 u_2 (u_3^2 - u_1^2) + b_3 u_3 (u_1^2 - u_2^2) = 0. \tag{4}$$

Der Geraden (b) entspricht auf F ein Kegelschnitt K_1. Durch jeden Punkt von K_1 gehen zwei koplanare Kegelschnitte K und K' auf F, welche dem durch den entsprechenden Punkt auf (b) gehenden Paare (u) (u') entsprechen. Durch einen allgemein gelegenen Punkt P von S_2 gehen drei Tangenten an die Kurve (4), so daß auch durch jeden allgemein gelegenen Punkt von F drei Kegelschnitte gehen, welche ihre Kontaktpunkte auf einem gegebenen Kegelschnitte von F haben. Die von den Ebenen der Kegelschnitte K_1 K' erzeugte abwickelbare Fläche D_1 ist deshalb von der dritten Klasse. Da (4) eine allgemeine kubische Klassenkurve darstellt, so ist sie von der 6. Ordnung C_6. Ein durch P gehendes Linienpaar schneidet also diese Kurve C_6 in 12 Punkten. Sind

Q und Q_1 zwei unendlich benachbarte Punkte von (b), und (u) und (u_1) die zugehörigen Geraden, so schneiden sich (u) und (u_1) in einem Punkte V von C_6. Die den Paaren $(u)\,(u')$ und $(u_1)\,(u_1')$ entsprechenden Kegelschnittpaare liegen in zwei unendlich benachbarten Tangentialebenen der abwickelbaren Fläche D, welche sich in einer Erzeugenden t von D schneiden. Dem Punkte Q entspricht auf F ein Punkt R in dem F von t berührt wird. Die den Geraden (u) und (u_1) entsprechenden Kegelschnitte auf F schneiden sich in einem Punkte T der in der Abbildung V entspricht und der auch auf t liegt. Dem vierten residualen Schnittpunkt T' von t mit F entspricht in S_2 der Schnitt V' von (u') und (u_1'). Der Kurve C_6 entspricht somit auf F als Ort der Punkte T, T' eine Kurve C_{12} zwölfter Ordnung. Da D von F dem Kegelschnitte K_1 entlang berührt wird, so ist die Ordnung m von D bestimmt durch $4m = 12 + 2 \cdot 2 = 16$, also $m = 4$, was ohnehin für eine abwickelbare Fläche dritter Klasse bekannt ist. Daraus ergibt sich

Satz 2. Gegeben sei ein Kegelschnitt K_1 auf einer Steiner'schen Fläche F. Die Tangentialebenen in den Punkten von K_1 erzeugen eine abwickelbare Fläche dritter Klasse und vierter Ordnung, welche F in einer residualen Kurve 12. Ordnung schneidet, welche von den von den Tangentialebenen ausgeschnittenen Kegelschnitten umhüllt wird.

6. Im allgemeineren Falle, wo $Q\,(x)$ in S_2 eine Kurve $f\,(x)$ von der Ordnung n und dem Geschlecht p beschreibt, umhüllen die Geradenpaare $(u), (u')$ durch Q eine Kurve C_{3n} von der Klasse $3n$, vorausgesetzt, daß $f\,(x)$ nicht durch die sechs invarianten Punkte der Transformation U geht, welche auch C_{3n} invariant läßt. Das Problem der Kurveninvarianz in involutorischen Cremona-Transformationen wurde vom Verfasser in mehreren Aufsätzen behandelt[1]). Das Geschlecht von C_{3n} ergibt sich demnach als $p^* = \frac{1}{2}(3n-1)(3n-2) - \frac{1}{2} \cdot 7n(n-1) - (n-1)(n-2) + 2p$, oder $p^* = 2n + 2p - 1$. Die Anzahl der Doppeltangenten von C_{3n} ist $\delta = \frac{1}{2}(3n-1)(3n-2) - p^* = \frac{1}{2}(9n^2 - 13n - 4p + 4)$, und die Ordnung $n^* = 3n(3n-1) - (9n^2 - 13n - 4p + 4)$, oder $n^* = 10n + 4p - 4$. Der Kurve $f\,(x) = 0$ entspricht in der Abbildung auf F eine C_{2n} vom gleichen Geschlecht p. Die Tangentialebene h in jedem Punkte von C_{2n} schneidet F in zwei Kegelschnitten K, K', welche den durch den entsprechenden Punkt auf $f\,(x) = 0$

[1]) Siehe z. B. On surfaces and curves which are invariant under involutorial Cremona transformations. Am. Journ. of Math., vol. 48 (1926), pp. 21—44.

gehenden Geraden (u) und (u') entsprechen. Die Ebenen h umhüllen eine abwickelbare Fläche D von der Klasse $3n$ und der Ordnung z, die näher zu bestimmen ist. Das Bild von C_{3n} auf F ist eine Kurve W von der Ordnung $20n + 8p - 8$. Da D die Fläche F der Kurve C_{2n} entlang berührt, so ist $2n^* = 4 \cdot z - 4n$, woraus sich z als $z = 6n + 2p - 2$ ergibt. Das Resultat mag zusammengefaßt werden als

Satz 3. Es sei C_n eine Kurve n-ter Ordnung vom Geschlecht p in der Ebene S_2 mit gewöhnlichen Doppelpunkten in allgemeiner Lage. Ihr entspricht in der Abbildung auf die Steiner'sche Fläche F eine C_{2n}. Die Tangentialebenen an F in den Punkten von C_{2n} erzeugen eine abwickelbare Fläche D von der Klasse 3n und der Ordnung $6n + 2p - 2$, welche F in einer Kurve W von der Ordnung $20n + 8p - 8$ und dem Geschlecht $2n + 2p - 1$ schneidet und sie überdies in C_{2n} berührt. Die in der Transformation U sich entsprechenden Geraden (u), (u') durch die Punkte von C_n umhüllen eine Kurve, deren Abbild auf F die Kurve W ist.

§ 3. Die Abbildung von S_3 auf eine rationale Fläche in S_4

7. Die Abbildung wird jetzt durch das System

$$(1)\qquad \begin{aligned} \varrho y_1 &= x_2 x_3 x_4 \\ \varrho y_2 &= x_1 x_3 x_4 \\ \varrho y_3 &= x_1 x_2 x_4 \\ \varrho y_4 &= x_1 x_2 x_3 \\ \varrho y_5 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \end{aligned}$$

bewerkstelligt, so daß dem gewöhnlichen projektiven Raume $S_3(x)$ die Hyperfläche

$$(2)\ S_3' \equiv y_2^3 y_3^3 y_4^3 + y_1^3 y_3^3 y_4^3 + y_1^3 y_2^3 y_4^3 + y_1^3 y_2^3 y_3^3 - y_1^2 y_2^2 y_3^2 y_4^2 y_5 = 0$$

neunter Ordnung in einem projektiven Raume $S_4(y)$ von vier Dimensionen entspricht. Diese, sowohl wie die entsprechende S_n' in S_{n+1}, (4) § 1, kann als *verallgemeinerte Steiner'sche Fläche* angesprochen werden. Der Punkt A_5 des Koordinatenpentaeders $A_1 \ldots A_5$ ist ein achtfacher Punkt der Fläche. Aus (2) ist ferner ersichtlich, daß die Schnittebene je zweier der Koordinatenhyperebenen $y_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ auf S_3'

dreifach ist. Ferner ist jede der vier Kanten $y_i = 0$, $y_k = 0$, $y_l = 0$, $i, k, l = 1, 2, 3, 4$ sechsfach, jede der sechs Kanten $y_i = 0$, $y_k = 0$, $y_5 = 0$ dreifach. Ähnliches läßt sich für S_n' feststellen.

Einer Geraden l

$$\varrho x_i = a_i + \lambda b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3}$$

in S_3 entspricht auf S_3' eine rationale Kurve dritter Ordnung C_3

$$\varrho y_i = K_0^{(i)} \lambda^3 + K_1^{(i)} \lambda^2 + K_2^{(i)} \lambda + K_3^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{4}$$

welche zudem auf einer Hyperebene $h = \Sigma c_i y_i = 0$ liegt. Letztere ist durch die Gerade l eindeutig bestimmt. Einer beliebigen Ebene in S_3

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \lambda_1 c_1, \\ \varrho x_2 &= \lambda_2 c_2, \\ \varrho x_3 &= \lambda_3 c_3, \\ \varrho x_4 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \end{aligned} \tag{5}$$

oder

$$c_2 c_3 x_1 + c_3 c_1 x_2 + c_1 c_2 x_3 - c_1 c_2 c_3 x_4 = 0 \tag{6}$$

entspricht auf S_3' die Fläche dritter Ordnung

$$\begin{aligned} \sigma y_1 &= c_2 c_3 \ \lambda_2 \lambda_3 \ (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ \sigma y_2 &= c_3 c_1 \ \lambda_3 \lambda_1 \ (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ \sigma y_3 &= c_1 c_2 \ \lambda_1 \lambda_2 \ (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ \sigma y_4 &= c_1 c_2 c_3 \ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ \sigma y_5 &= c_1^3 \lambda_1^3 + c_2^3 \lambda_2^3 + c_3^3 \lambda_3^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3, \end{aligned} \tag{7}$$

oder

$$\left\{ \begin{aligned} & c_2 c_3 y_2 y_3 y_4 + c_3 c_1 y_1 y_3 y_4 + c_1 c_2 y_1 y_2 y_4 - c_1 c_2 c_3 y_1 y_2 y_3, \\ & y_5 = \frac{y_2^3 y_3^3 y_4^3 + y_1^3 y_3^3 y_4^3 + y_1^3 y_2^3 y_4^3 + y_1^3 y_2^3 y_3^3}{y_1^2 y_2^2 y_3^2 y_4^2} \ . \end{aligned} \right. \tag{8}$$

8. Eine Hyperebene

$$3 a_1 y_1 + 3 a_2 y_2 + 3 a_3 y_3 + 3 a_4 y_4 - y_5 = 0 \tag{9}$$

schneidet S_3' in einer Fläche neunter Ordnung, welcher in S_3 die Fläche dritter Ordnung

$$(10) \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 - 3(a_1 x_2 x_3 x_4 + a_2 x_1 x_3 x_4 + a_3 x_1 x_2 x_4 + a_4 x_1 x_2 x_3) = 0$$

entspricht. Da es in S_3 ∞^{15} Kollineationen gibt und die allgemeine Fläche dritter Ordnung von 19 Konstanten abhängt, so läßt sich ihre Gleichung auf eine solche mit 4 Konstanten reduzieren, also gerade so viele wie in (10) vorkommen, so daß also in der Form (10) nichts an Allgemeinheit verloren geht. Übrigens läßt sich diese Tatsache auch auf algebro-geometrischem Wege beweisen. Man gelangt also zu einer neuen Normalform der kubischen Fläche:

Satz 4. Die allgemeine Gleichung der kubischen Fläche läßt sich auf eine solche reduzieren, in welcher die quadratisch-linearen ($x_i^2 x_k$) *Glieder fehlen.*

Diese Form führt zu einer interessanten Konfiguration Δ_{18} von 18 Punkten, den Schnittpunkten der Fläche mit den 6 Kanten des Koordinatentetraeders. Setzt man z. B. $x_4 = 0$, so ist der Schnitt dieser Ebene mit der Fläche

$$(11) \qquad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3 a_4 x_1 x_2 x_3 = 0,$$

also die Hesse'sche Normalform. Die Kanten $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ enthalten zu dreien die 9 Wendepunkte, wovon die reellen auf der Einheitsgeraden $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ liegen. Man findet z. B. für die Koordinaten der 3 Wendepunkte auf $A_2 A_3$ (0, 1, -1, 0), (0, 1, ω, 0), (0, 1, ω^2, 0), wo $\omega^3 = 1$ ist. Diese sind von der Konstanten a_4 unabhängig, so daß ein System von ∞^4 Flächen dritter Ordnung durch die erhaltene Konfiguration Δ_{18} geht. Da 19 allgemein gelegene Punkte eine Fläche dritter Ordnung bestimmen, so ist Δ_{18} von ganz spezieller Art. Bei veränderlichen a_i bilden die Schnitte in den Koordinatenebenen syzygetische Büschel von Kurven dritter Ordnung. *Wählt man eine Kurve aus jedem der vier Büschel, so gibt es gerade eine Fläche dritter Ordnung die durch jede der vier Kurven geht.* Es ist leicht einzusehen, daß die Konfiguration Δ_{18} in der endlichen Substitutionsgruppe

$$(12) \qquad \begin{aligned} \varrho x_1' &= x_1 \\ \varrho x_2' &= \omega^\alpha x_2 \\ \varrho x_3' &= \omega^\beta x_3 \\ \varrho x_4' &= \omega^\gamma x_4 \end{aligned} \qquad \omega^3 = 1$$

invariant ist. Diese Gruppe ist abelsch und von der Ordnung 27 und Typus (1, 1, 1). $\varDelta_{18}$ ist natürlich auch invariant in der symmetrischen Gruppe der Ordnung 24 der vier Variabeln x_i. Jeder der 18 Punkte ist invariant in einer abelschen Gruppe G_9, z. B. $(1, -\omega^2, 0, 0)$ in der Gruppe

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega x_3 & \omega x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega x_3 & \omega^2 x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega^2 x_3 & \omega x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega^2 x_3 & \omega^2 x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega x_4 & \omega x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega x_4 & \omega^2 x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega^2 x_4 & \omega x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & \omega^2 x_4 & \omega^2 x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Satz 5. Die Konfiguration $\varDelta_{18}$ der Grundpunkte des ∞^4 Systems von Flächen dritter Ordnung ist invariant in einer Kollineationsgruppe G_{648} von der Ordnung $27 . 24 = 648$ mit den oben angegebenen Eigenschaften.

9. Die Ebene $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ enthält vier von den Ebenen $x_i = 0$ ausgeschnittenen Geraden, welche sich in sechs Punkten (1—100), ... schneiden und der Konfiguration $\varDelta_{18}$ angehören. Jede dieser Linien, z. B. $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0)$ bestimmt ein Büschel von Ebenen

$$x_1 + (\lambda + 1)\, x_2 + (\lambda + 1)\, x_3 + (\lambda + 1)\, x_4 = 0.$$

Für $\lambda + 1 = 1$ erhalten wir die Einheitsebene, für $\lambda + 1 = \omega$ ergibt sich die Ebene

$$x_1 + \omega x_2 + \omega x_3 + \omega x_4 = 0,$$

welche die 6 Punkte (01—10), (001—1), (010—1), (1—$\omega^2$00), (10—$\omega^2$0), (100—ω^2) von $\varDelta_{18}$ enthält, die 6 Schnittpunkte eines Vierseits von Mac Laurin Geraden (3 Wendepunkte eines syzygetischen Büschels enthaltend) bilden. Für $\lambda + 1 = \omega^2$ erhält man die Ebene

$$x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^2 x_3 + \omega^2 x_4 = 0,$$

welche ebenfalls ein Vierseit solcher Mac-Laurin Geraden enthält. Durch jede Mac Laurin Gerade welche nicht Kante des Koordinatentetraeders ist gehen also drei Ebenen, von welchen jede ein von Mac Laurin Geraden gebildetes Vierseit enthält.

Es gibt $(12-3) . 4 = 36$ Mac Laurin Geraden in Δ_{18}, somit $3 . 36$ Ebenen mit solchen Vierseiten. Der aber jede Ebene 4 Mac Laurin Geraden enthält, so reduziert sich die Zahl der Ebenen auf $3 . 36 : 4 = 27$. Diese werden aus der Einheitsebene durch die Substitutionen der abelschen G_{27} erhalten. Das Resultat kann noch auf folgende Weise bestätigt werden: Auf jeder Kante, z. B. $A_1 A_2$ liegen drei Wendepunkte. Durch jeden derselben gehen drei übrige Mac Laurin Geraden in jeder der Ebenen $A_1 A_2 A_4$ und $A_1 A_2 A_3$. Mit diesen zwei Tripeln kann man 9 Paare von Mac Laurin Geraden und ebensoviele Ebenen bilden, die sie enthalten. Jede dieser Ebenen enthält ein Vierseit von Mac Laurin Geraden. Also gehen durch die 3 Wendepunkte auf $A_1 A_2$ $3 . 9 = 27$ solche Ebenen. Zusammenfassend ergibt sich

Satz 6. Die 18 Punkte von Δ_{18} liegen zu sechs als Schnittpunkte der Geraden von Mac Laurin Vierseiten in 27 Ebenen (ausschließlich die Koordinatenebenen). Durch jede von einer Kante verschiedenen Mac Laurin Geraden gehen drei Ebenen, von welchen jede ein Mac Laurin Vierseit enthält.

Die ganze Konfiguration wird natürlich von der Gruppe G_{648} beherrscht.

Es ist prinzipiell nicht schwierig, ähnliche Konfigurationen bei der Abbildung von Räumen S_n beliebiger Dimension auf Hyperflächen S_n' in einem S_{n+1} zu konstruieren und die zugehörigen Kollineationsgruppen aufzustellen.

10. Ist $(z) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ ein Punkt in S_3, so entspricht ihm auf S_3' in S_4 ein Punkt in welchem die Hypertangentialebene leicht als

$$\begin{aligned}(13)\quad & z_1 (z_2^3 + z_3^3 + z_4^3 - 2 z_1^3) y_1 + z_2 (z_1^3 + z_3^3 + z_4^3 - 2 z_2^3) y_2 \\ & + z_3 (z_1^3 + z_2^3 + z_4^3 - 2 z_3^3) y_2 + z_4 (z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 2 z_4^3) y_4 \\ & - z_1 z_2 z_3 z_4 y_5 = 0\end{aligned}$$

gefunden wird. Diese schneidet S_3' in einer Fläche 9. Ordnung, der umgekehrt in S_3 die Fläche dritter Ordnung F_3

$$\begin{aligned}(14)\quad & z_1 (z_2^3 + z_3^3 + z_4^3 - 2 z_1^3) x_2 x_3 x_4 + z_2 (z_1^3 + z_3^3 + z_4^3 - 2 z_2^3) x_1 x_3 x_4 \\ & + z_3 (z_1^3 + z_2^3 + z_4^3 - 2 z_3^3) x_1 x_2 x_4 + z_4 (z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 2 z_4^3) x_1 x_2 x_3 \\ & - z_1 z_2 z_3 z_4 (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) = 0,\end{aligned}$$

entspricht. Diese hat im Punkte (z) einen Doppelpunkt und ist deshalb ein kubisches Monoid, das die Konfiguration Δ_{18} enthält. Es ist klar, daß es ebensoviele (∞^3) solcher Monoide gibt, als Punkte (z) in S_3 und daß durch (z) als Doppelpunkt ein solches Monoid eindeutig bestimmt ist. Somit

Satz 7. Den Hypertangentialebenen der Hyperfläche S_3' in S_4 entsprechen in S_3 ein-eindeutig die ∞^3 kubischen Monoide durch Δ_{18}.

Hält man in (14) (x) fest und läßt (z) veränderlich, so ergibt sich

Satz 8. Der Ort der Doppelpunkte der kubischen Monoide durch Δ_{18}, welche überdies durch einen allgemein gelegenen Punkt (x) in S_3 gehen, ist eine Fläche vierter Ordnung.

Wie zuvor, lassen sich ähnliche Sätze bei der Abbildung höherer Räume aufstellen. Außerdem kann man in jedem Fall den Zusammenhang der involutorischen Transformation

$$\varrho\, x_i' = \frac{1}{x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

und der dualen Ebenentransformation

$$\varrho\, u_i' = \frac{1}{u_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

mit der Abbildung von S_n auf S_{n+1} untersuchen, wie es bei der Abbildung von S_2 auf die Steiner'sche Fläche geschah. Der Kürze halber soll jedoch hier nicht darauf eingetreten werden.

(Eingegangen den 21. Januar 1931)