Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 3 (1931)

Artikel: Sur les sytèmes cycliques de triples de Steiner différents pour N premier (ou puissance de nombre premier) de la forme 6n + 1(suite et fin).

Autor: Bays, S.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4693

Sur les systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour N premier (ou puissance de nombre premier) de la forme $6n+1$ (suite et fin)*

Par S. Bays, Fribourg

Chapitre VI

Application aux premières valeurs de $N = 6n + 1$

52. Dans *A.*, p. 71 à 96, j'ai obtenu les systèmes cycliques de triples de Steiner *différents* pour les valeurs de $N = 6n + 1$: 7, 13, 19, 25 et 31, en cherchant les systèmes de caractéristiques un à un, par une méthode purement empirique, et j'ai différencié les systèmes de triples qui s'en déduisent par le moyen laborieux des *trains* de H.-S. White, adapté et simplifié pour ce cas particulier des systèmes *cycliques* de triples. Dans *J.*, p. 77 à 98, j'ai introduit le groupe $\{|\underline{x}, \underline{ax}|\}$, les colonnes cycliques de caractéristiques et la *réduction* déjà par rapport au diviseur n de $3n$ (note 43); j'ai pu ainsi obtenir encore, sans y mettre trop de temps, les systèmes de caractéristiques pour les valeurs suivantes de $N = 6n + 1$: 37 et 43. Pour différencier les systèmes de triples qui s'en déduisent, j'ai admis sans autre le théorème 6 (§ 22) qui rend cette discrimination immédiate, en attendant sa démonstration.

Dans l'exposé actuel, dans lequel ce qui n'est pas nouveau est donné sous une *forme* nouvelle plus simple ou plus complète (chapitre I, une partie du chapitre II et chapitre III), l'essentiel, indépendamment de la preuve du théorème 6 faite par P. Lambossy (chapitre II), est *la réduction introduite maintenant par rapport au diviseur d quelconque de* $3n$ (chapitre IV) et ensuite, pour la discrimination des systèmes de triples déterminés par les systèmes de caractéristiques, l'établissement des équations (50) et (53) et des conséquences qui en découlent (chapitre V).

Pour obtenir les systèmes de caractéristiques appartenant au diviseur $3n$ lui-même, le temps nécessaire et le procédé sont encore actuellement les mêmes que dans *J.*; par contre, pour obtenir les systèmes de ca-

* Voir Vol. 2, Fasc. IV et Vol. 3, Fasc. I et II.

ractéristiques appartenant aux diviseurs propres de $3n$, en particulier aux petits diviseurs de $3n$, la question est maintenant grandement simplifiée. Pour le diviseur $d = 3$, la question est résolue; ayant une racine primitive de N, on a immédiatement les systèmes de caractéristiques appartenant à $d = 3$.

D'autre part le nombre des systèmes de triples différents que détermine un système de caractéristiques appartenant aux diviseurs $3n$ ou $\frac{3n}{2}$ est fixé; pour un système de caractéristiques appartenant au diviseur n, le genre des systèmes de triples différents qu'il peut déterminer est limité à deux (§ 47). Presque sûrement ce nombre des systèmes de triples différents pourra être fixé encore pour le système des caractéristiques principales ($d = 1$) et pour les systèmes de caractéristiques appartenant à $d = 3$, probablement aussi pour certains des systèmes appartenant à $d = n$. Cette question fera l'objet d'une autre étude.

Dans ce dernier chapitre je crois utile, après ce qui vient d'être dit, de montrer l'application, aux premières valeurs de $N = 6n + 1$, de ces résultats du chapitre IV et du chapitre V. Nous retrouverons ainsi les systèmes de triples obtenus dans *A.* et dans *J.*, et leurs diviseurs métacycliques, mais d'une façon en fait toute nouvelle, plus simple et plus élégante, qui pour les petits diviseurs de $3n$ est un jeu comparée aux laborieuses recherches de mes deux premiers mémoires. Nous nous limiterons d'ailleurs aux cas qui suffisent comme exemples de nos procédés. Nous terminerons conformément à l'intention donnée au § 1, troisième alinéa, par un *tableau* des résultats obtenus jusqu'ici, dans cette recherche des systèmes cycliques de triples de Steiner différents, pour les premiers nombres des deux formes $6n + 1$ et $6n + 3$, par les méthodes exposées dans cette étude.

53. Avant de considérer les différentes valeurs de N, nous ferons les observations suivantes.

1° Il n'est pas inutile d'abord de rappeler les faits suivants, bien qu'ils ressortent à l'évidence de notre exposé jusqu'ici.

Le groupe $\{|x, \alpha x|\}$ et ses diviseurs $\{|x, \alpha^{\omega} x|\}$ sont indépendants de la racine primitive α choisie (§ 23, 4°); étant donnée la manière dont ils se déduisent du groupe et des diviseurs précédents, le groupe $\{|\underline{x}, \underline{\alpha x}|\}$ et ses diviseurs $\{|\underline{x}, \underline{\alpha^d x}|\}$ sont évidemment indépendants aussi de la même racine primitive α.

Donc le système des caractéristiques principales, les colonnes de $3n$ caractéristiques, les rectangles de caractéristiques, les ensembles de caractéristiques principales (37) et (38) sont indépendants de la racine α. D'une façon plus précise, β étant une racine primitive de N différente de α, l'ensemble des triples $\underline{\beta^0}\;\underline{\beta^n}\;\underline{\beta^{2n}}$, $\underline{\beta^1}\;\underline{\beta^{n+1}}\;\underline{\beta^{2n+1}}$, ..., $\underline{\beta^{n-1}}\;\underline{\beta^{2n-1}}\;\underline{\beta^{3n-1}}$ est encore le système des caractéristiques principales (28), rangées seulement dans un autre ordre à part la première, la colonne de caractéristiques (29), le rectangle (31), les ensembles (37) et (38), écrits avec la racine β et des exposants a', b', c', sont des ensembles de caractéristiques identiques aux premiers, avec les caractéristiques disposées seulement dans un autre ordre, dès qu'ils ont avec ces premiers ensembles une caractéristique commune.

2° Les caractéristiques contenant l'élément 1 sont (30):

$$1, 2, 3;\; 1, 3, 4;\; 1, 4, 5;\; \ldots\ldots\ldots;\; 1, 3n-1, 3n. \tag{55}$$

L'une d'elles est une caractéristique principale; les $3(n-1)$ qui restent sont groupées trois à trois dans la même colonne de $3n$ caractéristiques, indépendante de la racine α avec laquelle on opère. Ayant choisi une racine primitive α de N, le système des caractéristiques principales s'écrit immédiatement; $\underline{\alpha^0}\;\underline{\alpha^n}\;\underline{\alpha^{2n}}$ est la caractéristique principale contenue dans (55). Pour toutes les racines primitives α de N, $\underline{\alpha^n}$ et $\underline{\alpha^{2n}}$ sont donc toujours *les mêmes deux entiers consécutifs* $\leqq 3n$.

Nous prenons ensuite l'une des caractéristiques (55) différente de $\underline{\alpha^0}\;\underline{\alpha^n}\;\underline{\alpha^{2n}}$, soit $\underline{\alpha^0}\;\underline{\alpha^b}\;\underline{\alpha^c}$. Les deux autres caractéristiques contenant l'élément 1 dans la colonne déterminée par $\underline{\alpha^0}\;\underline{\alpha^b}\;\underline{\alpha^c}$ sont $\underline{\alpha^{3n-b}}\;\underline{\alpha^0}\;\underline{\alpha^{c+3n-b}}$ et $\underline{\alpha^{3n-c}}\;\underline{\alpha^{b+3n-c}}\;\underline{\alpha^0}$. Nous prenons dans (55) une nouvelle caractéristique différente de ces trois dernières; nous éliminons de nouveau les deux caractéristiques de sa colonne contenant l'élément 1, et ainsi de suite.

Nous obtenons ainsi avec la plus grande facilité les caractéristiques de tête des $n-1$ colonnes de $3n$ caractéristiques et ces $n-1$ caractéristiques suffisent entièrement pour notre recherche.

3° Pour remonter des caractéristiques aux colonnes cycliques de *triples* qu'elles déterminent, l'opération est également très simple.

Les trois éléments d'une caractéristique $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$[47]), rangés par ordre de grandeur, $\alpha < \alpha' < \alpha''$, s'écrivent respectivement, en posant $\beta = \alpha + \alpha'$ (§ 16):

dans le cas où $\alpha + \alpha' = \alpha''$, $\quad \alpha,\ \beta - \alpha,\ \beta$; $\quad$ alors $\beta \leqq 3n$,
dans le cas où $\alpha + \alpha' + \alpha'' = N$, $\quad \alpha,\ \beta - \alpha,\ N - \beta$; alors $\beta > 3n$.

Les deux colonnes cycliques de triples *conjuguées*, déterminées par cette caractéristique sont donc (§ 13):

$$
\begin{array}{llll}
\text{dans le } 1^{\text{er}} \text{ cas} & \begin{array}{ccc} 0 & \alpha & \alpha'', \\ N\text{-}\alpha'' & N\text{-}\alpha' & 0, \\ N\text{-}\alpha & 0 & \alpha', \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & N\text{-}\alpha'' & N\text{-}\alpha, \\ \alpha & N\text{-}\alpha' & 0, \\ \alpha'' & 0 & \alpha', \end{array} & \\
 & & & (56) \\
\text{dans le } 2^{\text{ème}} \text{ cas} & \begin{array}{ccc} 0 & \alpha & N\text{-}\alpha'', \\ \alpha'' & N\text{-}\alpha' & 0, \\ N\text{-}\alpha & 0 & \alpha', \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & \alpha'' & N\text{-}\alpha, \\ \alpha & N\text{-}\alpha' & 0, \\ N\text{-}\alpha'' & 0 & \alpha'. \end{array} &
\end{array}
$$

Pour la colonne de triples, il est utile d'écrire les trois triples contenant l'élément 0, bien que chacun d'eux détermine immédiatement les deux autres. En effet, pour déterminer la transformée par la substitution $u = |x,\ \beta x|$ d'une colonne cyclique de triples donnée, il suffit d'appliquer cette substitution à un triple de la colonne, par exemple à l'un des triples contenant l'élément 0; le triple transformé contiendra encore l'élément 0 (§ 26). Ayant écrit pour chaque colonne les trois triples contenant l'élément 0, on reconnaît alors immédiatement la colonne transformée.

54. ***Cas*** $N = 7$, $n = 1$, $3n = 3$.

Il n'existe que la caractéristique 123; *elle est le système des caractéristiques principales* ($n = 1$):

$$\underline{\alpha^0}\ \underline{\alpha^n}\ \underline{\alpha^{2n}} = \underline{\alpha^0}\ \underline{\alpha^1}\ \underline{\alpha^2} = 123.$$

On a (§ 48): $n = 2^0 \cdot 1$, $\quad$ donc $a = 0$, $n_1' = 1$;

$$\mu_1' = \mu_{k'}' = 1\,; \quad \omega_1 = 2\,\mu_1 = 2^{a+1}\,\mu_1' = 2.$$

[47]) Nous reprenons *pour cet alinéa* la notation du § 16; $\alpha, \alpha', \alpha''$ sont ici trois nombres différents pris dans $1, 2, \ldots, 3n$, α n'étant pas nécessairement ce qu'il a été jusqu'ici et ce qu'il est plus loin, une racine primitive de N.

L'équation (53) se réduit à $2^{1-0-1} = x_1$, ou $x_1 = 1$.

Cet *unique* système cyclique de triples possède le diviseur métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^2 x|\}$, soit le *demi-groupe* métacyclique d'ordre $7 \cdot \frac{6}{2} = 21$ (§ 23, 1°). On sait d'ailleurs que le groupe qui appartient à ce système est plus étendu et sort du groupe métacyclique (note 44); il est d'ordre 168 [48]).

55. ***Cas*** $N = 13$, $n = 2$, $n - 1 = 1$, $3n = 6$, $\alpha = 2$.

Systèmes de caractéristiques.

Les caractéristiques contenant 1 sont:

123, 134, 145, 156.

Les restes absolus (§ 29): $\underline{2}^0$, $\underline{2}^1$, $\underline{2}^2$, $\underline{2}^3$, $\underline{2}^4$, $\underline{2}^5$,
sont respectivement: 1, 2, 4, 5, 3, 6.

Le système des caractéristiques principales est ($n = 2$):

$$\underline{2}^0\,\underline{2}^2\,\underline{2}^4,\ \underline{2}^1\,\underline{2}^3\,\underline{2}^5 = 134,\ 256.$$

La colonne ($n - 1 = 1$) de $3n = 6$ caractéristiques, avec la caractéristique de tête $123 = \underline{2}^0\,\underline{2}^1\,\underline{2}^4$, a pour colonne cyclique de ses exposants:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{matrix} \tag{57}$$

Les diviseurs d de $3n$, $\geqq 3$, sont 3 et 6.

$\boxed{d = 3}$ 014 réduit (mod 3) donne 011;

il n'y a donc pas de système appartenant à $d = 3$.

---

48) *A.*, p. 71.

$\boxed{d=6}$ Un système qui appartient à $d > 1$, contient une caractéristique qui n'est pas principale. Si le système Σ contient une caractéristique correspondant à l'un des triples (57), un système équivalent à Σ contient la caractéristique 123 correspondant au triple 014; or 014 a un élément commun avec chacun des autres triples (57). Il n'y a donc pas de système appartenant à $d = 6$.

Systèmes de triples.

$\boxed{d=1}$ On a (§ 48): $n = 2^1 . 1$, donc $a = 1$, $n'_1 = 1$;

$$\mu'_1 = \mu'_{k'} = 1 ; \quad \omega_1 = 2\,\mu_1 = 2^{a+1}\,\mu'_1 = 4.$$

L'équation (53) se réduit à $2^{2-1-1} = x_1$, ou $x_1 = 1$.

Cet *unique* système possède le diviseur métacyclique $\{|x, 1 + x|, |x, \alpha^4 x|\}$.

56. ***Cas N = 19,*** $n = 3$, $n - 1 = 2$, $3n = 9$, $\alpha = 2$.

Systèmes de caractéristiques.

Les caractéristiques contenant 1 sont:

123, 134, 145, 156, 167, 178, 189.

Les restes absolus: $\underline{2}^0$, $\underline{2}^1$, $\underline{2}^2$, $\underline{2}^3$, $\underline{2}^4$, $\underline{2}^5$, $\underline{2}^6$, $\underline{2}^7$, $\underline{2}^8$,
sont respectivement: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 7, 5, 9.

Le système des caractéristiques principales est ($n = 3$):

$\underline{2}^0\,\underline{2}^3\,\underline{2}^6$, $\underline{2}^1\,\underline{2}^4\,\underline{2}^7$, $\underline{2}^2\,\underline{2}^5\,\underline{2}^8 = 187, 235, 469.$

Les deux colonnes ($n - 1 = 2$) de $3n = 9$ caractéristiques ont pour caractéristiques de tête $123 = \underline{2}^0\,\underline{2}^1\,\underline{2}^4$ et $134 = \underline{2}^0\,\underline{2}^4\,\underline{2}^2$.

Les diviseurs d de $3n$, $\geqq 3$, sont 3 et 9.

$\boxed{d=3}$ 014 et 042, réduits (mod 3), donnent 011 et $\underline{012}$.

Il y a donc *un* système appartenant à $d = 3$.

$\boxed{d = 9}$ Les colonnes cycliques des exposants (mod $3n$) sont (43):

0	1	4		0	4	2		0	3	6
1	2	5		1	5	3		1	4	7
2	3	6		2	6	4		2	5	8
3	4	7		3	7	5				
4	5	8		4	8	6				
5	6	0		5	0	7				
6	7	1		6	1	8				
7	8	2		7	2	0				
8	0	3		8	3	1				

Pour obtenir les systèmes de caractéristiques *différents* appartenant à $d = 9$, il nous suffit évidemment (§ précédent, avant-dernier alinéa), d'obtenir dans ce tableau les systèmes de 3 triples sans élément répété contenant 014 et pris dans les 3 colonnes, puis les systèmes de 3 triples sans élément répété contenant 042 et pris dans les 2 dernières colonnes.

Avec 014 conviennent, de la 1ère colonne, 236, 782; de la 2ème colonne, 375; de la 3ème colonne, 258. Mais dans ces 4 triples, il n'y en a pas deux sans élément répété.

Avec 042 conviennent, de la 2ème colonne, 153, 375, 618, 831; de la 3ème colonne, aucun. On retrouve immédiatement le système 042, 375, 618, qui appartient à $d = 3$ et point d'autre.

Systèmes de triples.

$\boxed{d = 1 \text{ et } 3}$ $n = 3$; donc l'équation (50)-(53), commune aux cas $d = 1$ et $d = 3$, est dans ce cas l'équation (51) pour le cas $d = n$:

$$x_1 + 3\,x_2 = 2^{n-1} \text{ ou donc } x_1 + 3\,x_2 = 4. \tag{58}$$

Les deux solutions possibles sont $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ et $x_1 = 4$, $x_2 = 0$. Pour décider de cette alternative, par exemple dans le cas $d = 1$, très peu de temps suffit:

Les caractéristiques principales 178, 235, 469 déterminent les couples suivants de colonnes cycliques conjuguées (56); nous désignerons ces couples respectivement par (A, A'), (B, B'), (C, C') et les éléments 10, 11, ..., 18 par $0'$, $1'$, ..., $8'$:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 8 \\ 1' & 2' & 0 \\ 8' & 0 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 5 \\ 4' & 6' & 0 \\ 7' & 0 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 4 & 0' \\ 9 & 3' & 0 \\ 5' & 0 & 6 \end{array} \quad \text{ou} \quad A,\ B,\ C,$$

59

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1' & 8' \\ 1 & 2' & 0 \\ 8 & 0 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 4' & 7' \\ 2 & 6' & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 9 & 5' \\ 4 & 3' & 0 \\ 0' & 0 & 6 \end{array} \quad \text{ou} \quad A', B', C'.$$

On a (§ 48): $n = 2^0 . 3$; donc $a = 0$, $n_1' = 3$.

$$\mu_1' = 1, \ \omega_1 = 2\,\mu_1 = 2^{a+1}\,\mu_1' = 2,$$
$$\mu_2' = 3, \ \omega_2 = 2\,\mu_2 = 2^{a+1}\,\mu_2' = 6.$$

La première puissance de $|x, \alpha x|$ qui change en lui-même un système de triples formé au moyen des colonnes (59) est la puissance 2 ou la puissance 6. Formons la substitution:

$$|x, 2^2 x| = (1\,4\,6'\,7\,9\,7'\,1'\,6\,5)\ (2\,8\,3'\,4'\,8'\,5'\,3\,2'\,0')$$

En partant de la colonne A, cette substitution donne le cycle $(AC'B)$ ou (abc), en désignant par ces nouvelles lettres a, b, c, les colonnes A, C', B, dans l'ordre où elles se présentent dans le cycle trouvé. Soit a', b', c', les colonnes conjuguées à a, b, c; on aura aussi le cycle $(a'\ b'\ c')$[49]).

D'une part donc le système de triples a, b, c, est changé en lui-même par la substitution $|x, 2^2 x|$; d'autre part le système de triples a', b, c, par exemple, ne l'est pas, puisqu'il devient b', c, a. a', b, c n'est changé en lui-même que par la substitution $|x, 2^6 x|$. L'équation (58) n'a pas la solution $x_1 = 4$, $x_2 = 0$; elle a la solution $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Le système des caractéristiques principales détermine donc *deux* systèmes de triples différents qui ont les diviseurs métacycliques $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^2 x|\}$ et $\{|x, 1+x|, |x\,\alpha^6 x|\}$.

De même le système de caractéristiques qui appartient à $d = 3$, détermine aussi *deux* systèmes de triples différents qui ont les diviseurs $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^6 x|\}$ et $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^{18} x|\} = \{|x, 1+x|\}$.

---

49) La substitution $|x, \beta x|$ change deux colonnes conjuguées en deux colonnes conjuguées (§ 45, second alinéa).

57. ***Cas*** $\boldsymbol{N = 31}$, $n = 5$, $n - 1 = 4$, $3n = 15$, $\alpha = 3$.

Systèmes de caractéristiques.

Les caractéristiques contenant 1 sont:

123, 134, 145, 156, 167, 178, 189, 190′, 10′1′, 11′2′, 12′3′, 13′4′, 14′5′.

Les restes absolus: $\underline{3}^{0}$, $\underline{3}^{1}$, $\underline{3}^{2}$, $\underline{3}^{3}$, $\underline{3}^{4}$, $\underline{3}^{5}$, $\underline{3}^{6}$, $\underline{3}^{7}$, $\underline{3}^{8}$, $\underline{3}^{9}$, $\underline{3}^{0'}$, $\underline{3}^{1'}$, $\underline{3}^{2'}$, $\underline{3}^{3'}$, $\underline{3}^{4'}$,
sont respectivement: 1, 3, 9, 4, 2′, 5, 5′, 4′, 1′, 2, 6, 3′, 8, 7, 0′.

Le système des caractéristiques principales est ($n = 5$):

$$\underline{3}^{0}\,\underline{3}^{5}\,\underline{3}^{0'},\quad \underline{3}^{1}\,\underline{3}^{6}\,\underline{3}^{1'},\quad \underline{3}^{2}\,\underline{3}^{7}\,\underline{3}^{2'},\quad \underline{3}^{3}\,\underline{3}^{8}\,\underline{3}^{3'},\quad \underline{3}^{4}\,\underline{3}^{9}\,\underline{3}^{4'}$$
$$= \quad 1\,5\,6,\quad 3\,5'3',\quad 9\,4'8,\quad 4\,1'7,\quad 2'2\,0'.$$

Les 4 colonnes ($n - 1 = 4$) de $3n = 15$ caractéristiques ont pour caractéristiques de tête:

$$123 = \underline{3}^{0}\,\underline{3}^{9}\,\underline{3}^{1},\quad 134 = \underline{3}^{0}\,\underline{3}^{1}\,\underline{3}^{3},\quad 145 = \underline{3}^{0}\,\underline{3}^{3}\,\underline{3}^{5},\quad 11'2' = \underline{3}^{0}\,\underline{3}^{8}\,\underline{3}^{4}.$$

Les diviseurs d de $3n$, $\geqq 3$, sont 3, 5 et 15.

$\boxed{d = 3}$ 0 9 1, 0 1 3, 0 3 5, 0 8 4, donnent, réduits (mod 3):
0 0 1, 0 1 0, 0 0 2, $\underline{0\;2\;1}$.

Il y a donc *un* système appartenant à $d = 3$.

$\boxed{d = 5 = n}$ Les colonnes cycliques des exposants réduites (mod 5) sont:

0	4	1	0	1	3	0	3	0	0	3	4
1	0	2	1	2	4	1	4	1	1	4	0
2	1	3	2	3	0	2	0	2	2	0	1
3	2	4	3	4	1	3	1	3	3	1	2
4	3	0	4	0	2	4	2	4	4	2	3

La troisième est celle qui a deux fois l'élément 0 dans son triple de tête (§ 40); la première et la quatrième sont la paire de colonnes qui ont *la même colonne* réduite (mod n) (§ 40). Le tableau (40)-(41) se réduit donc ici à:

0	4	1	0	1	3
1	0	2	1	2	4
2	1	3	2	3	0
3	2	4	3	4	1
4	3	0	4	0	2

0, 1, 2, 3, 4,

la première colonne devant servir deux fois.

On a immédiatement et uniquement les *trois* systèmes (§ 40, dernier alinéa):

$$\begin{array}{lll} 0\,1\,4, & 2,\ 3, & \text{deux systèmes,} \\ 0\,1\,3, & 2,\ 4, & \text{un système.} \end{array} \tag{60}$$

$\boxed{d = 15 = 3n.}$ Ce cas est *le premier* qui ne demande plus un temps insignifiant. Je n'ai pas encore d'autre moyen de le traiter que celui que nous venons d'appliquer au cas $d = 9 = 3n$ du § précédent. C'est le procédé que j'ai employé dans *J.*, pour obtenir *tous* les systèmes de caractéristiques pour $N = 37$ et $N = 43$ (§ 52, premier et troisième alinéas).

On a donc les 5 colonnes cycliques des exposants (mod 15) (tableau (43)):

$$\begin{array}{ccccc} 0\ 9\ 1 & 0\ 1\ 3 & 0\ 3\ 5 & 0\ 8\ 4 & 0\ 5\ 0' \\ 1\ 0'\ 2 & 1\ 2\ 4 & 1\ 4\ 6 & 1\ 9\ 5 & 1\ 6\ 1' \\ 2\ 1'\ 3 & 2\ 3\ 5 & 2\ 5\ 7 & 2\ 0'\ 6 & 2\ 7\ 2' \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & 3\ 8\ 3' \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & 4\ 9\ 4' \\ 4'\ 8\ 0 & 4'\ 0\ 2 & 4'\ 2\ 4 & 4'\ 7\ 3 & \end{array}$$

Il faut obtenir dans ce tableau les systèmes de 5 triples sans élément répété formés:

1° avec le triple 091 et des triples pris dans les 5 colonnes,
2° " " " 013 " " " " " " 4 dernières colonnes,
3° " " " 035 " " " " " " 3 " " ,
4° " " " 084 " " " " " " 2 " " .

On trouve en plus des quatre systèmes appartenant à $d = 3$ et $d = 5$ déjà obtenus, *trois* systèmes appartenant à $d = 15$ (§ 43, premier alinéa).

Systèmes de triples.

$\boxed{d = 1 \text{ et } 3}$ On a (§ 48): $n = 2^0.5$, donc $a = 0$, $n_1' = 5$.

$$\mu_1' = 1,\ \mu_{k'}' = \mu_2' = 5.$$

L'équation (50)-(53) commune aux deux cas est:

$$2^{n-a-1} = x_1 + 5\,x_2 \qquad \text{ou} \qquad x_1 + 5\,x_2 = 2^4 \tag{61}$$

Les solutions possibles sont $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; $x_1 = 6$, $x_2 = 2$; $x_1 = 11$, $x_2 = 1$; $x_1 = 16$, $x_2 = 0$. Nous montrerons encore une fois d'après la partie correspondante du § précédent, pour le système appartenant à $d = 3$, comment on est fixé en quelques instants sur cette solution.

Le système est (§ 38):

$$\begin{array}{l} \underline{3^0}\,\underline{3^8}\,\underline{3^4},\ \ \underline{3^3}\,\underline{3^{1'}}\,\underline{3^7},\ \ \underline{3^6}\,\underline{3^{4'}}\,\underline{3^{0'}},\ \ \underline{3^9}\,\underline{3^2}\,\underline{3^{3'}},\ \ \underline{3^{2'}}\,\underline{3^5}\,\underline{3^1}, \\ = \quad 1\,1'2',\ \ 4\,3'4',\ \ 5'0'6,\ \ 2\,9\,7,\ \ 8\,5\,3. \end{array} \tag{62}$$

D'après (56), les paires de colonnes cycliques conjuguées correspondantes sont:[50])

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2' \\ 9' & 0'' & 0 \\ 0''' & 0 & 1' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 4 & 7' \\ 4' & 8' & 0 \\ 7'' & 0 & 3' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 6 & 6' \\ 5' & 1'' & 0 \\ 5'' & 0 & 0' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 9 \\ 2'' & 4'' & 0 \\ 9'' & 0 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 3 & 8 \\ 3'' & 6'' & 0 \\ 8'' & 0 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 9' & 0''' \\ 1 & 0'' & 0 \\ 2' & 0 & 1' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 4' & 7'' \\ 4 & 8' & 0 \\ 7' & 0 & 3' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 5' & 5'' \\ 6 & 1'' & 0 \\ 6' & 0 & 0' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 2'' & 9'' \\ 2 & 4'' & 0 \\ 9 & 0 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 3'' & 8'' \\ 3 & 6'' & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{On a pour } d = 3,\ \omega_1 &= 2\,\mu_1\,d = 2^{a+1}\,\mu_1'\,d = 6, \\ \omega_2 &= 2\,\mu_2\,d = 2^{a+1}\,\mu_2'\,d = 30. \end{aligned}$$

Désignons les cinq colonnes de la première rangée par A, B, C, D, E; leurs conjuguées respectives par A', B', C', D', E'. La première puissance de $|x, \alpha x|$ qui change en lui-même un système de triples formé au moyen de ces colonnes est la puissance 6 ou la puissance 30. Formons la substitution:

$$|x, 3^6 x| = (16'842)(37'4''2'6)(90''0'58')(7''9''0'''5'3''(9'5''8''4'7)(6''3'2''1'1'')$$

En partant de la colonne A, elle donne le cycle $(ACE\,BD')$ ou $(abcde)$, en désignant de nouveau par a, b, c, d, e ces colonnes dans l'ordre où elles se présentent dans le cycle trouvé. a', b', c', d', e' étant les colonnes conjuguées, on a aussi le cycle $(a'\ b'\ c'\ d'\ e')$.

50) Nous continuons à désigner par $9', 0'', 1'', \ldots, 0'''$ les éléments 19, 20, 21, …, 30.

L'ensemble A, C, E, B, D' ou a, b, c, d, e est un système de triples; il est changé en lui-même par la substitution $|x, 3^6 x|$. Les autres systèmes de triples déterminés par (62) ne sont changés en eux-mêmes que par la substitution $|x, 3^{30} x| = |x, x|$. En effet ces systèmes sont les ensembles $a'b\,c\,d\,e$, $a\,b'c\,d\,e$, ..., $a'b'c\,d\,e$, $a'b\,c'd\,e$, ..., $a'b'c'd\,e$, ... ; on voit immédiatement qu'aucun d'eux n'est changé en lui-même par la substitution $|x, 3^6 x|$. Seul l'est, le système $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$, le conjugué du système $a\,b\,c\,d\,e$.

Puisque $x_1 = 1$, l'équation (61) a donc la solution $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Les système de caractéristiques appartenant à $d = 3$ détermine donc *quatre* systèmes de triples différents; l'un a le diviseur métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^6 x|\}$, les trois autres n'ont que le groupe cyclique $\{|x, 1+x|\}$.

Il en est de même du système des caractéristiques principales, les diviseurs étant $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^2 x|\}$ et $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^{10} x|\}$.

$\boxed{d = 5 = n}$ L'équation (51) est ici $x_1 + 3x_2 = 2^4$. (63)

Le nombre $x_1 + x_2$ est au moins 6 pour la solution $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ et au plus 16 pour la solution $x_1 = 16$, $x_2 = 0$ (§ 47, 3°). Les trois systèmes de caractéristiques (60) ont la même constitution: un *carré* de caractéristiques (§ 40) et deux caractéristiques principales. A priori, il est probable déjà, qu'ils déterminent chacun le même nombre de systèmes de triples différents avec les mêmes diviseurs, plus simplement, que la solution de l'équation (63) est la même pour chacun.

Nous déterminerons encore cette solution pour l'un d'eux; choisissons le troisième. Le système est:

$$\begin{array}{l} \underline{3^0}\,\underline{3^1}\,\underline{3^3},\quad \underline{3^5}\,\underline{3^6}\,\underline{3^8},\quad \underline{3^{0'}}\,\underline{3^{1'}}\,\underline{3^{3'}};\quad \underline{3^2}\,\underline{3^7}\,\underline{3^{2'}},\quad \underline{3^4}\,\underline{3^9}\,\underline{4^{4'}}, \\ = 1\,3\,4,\quad 5\,5'\,1',\quad 6\,3'\,7;\quad 9\,4'\,8,\quad 2'\,2\,0'. \end{array} \tag{64}$$

Les colonnes cycliques conjuguées correspondantes sont:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 4 \\ 7'' & 8'' & 0 \\ 0''' & 0 & 3 \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 0 & 5 & 6' \\ 5' & 0'' & 0 \\ 6'' & 0 & 1' \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 0 & 6 & 3' \\ 8' & 4'' & 0 \\ 5'' & 0 & 7 \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 0 & 8 & 7' \\ 4' & 2'' & 0 \\ 3'' & 0 & 9 \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 2' \\ 9' & 1'' & 0 \\ 9'' & 0 & 0' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 7'' & 0''' \\ 1 & 8'' & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 0 & 5' & 6'' \\ 5 & 0'' & 0 \\ 6' & 0 & 1' \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 0 & 8' & 5'' \\ 6 & 4'' & 0 \\ 3' & 0 & 7 \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 0 & 4' & 3'' \\ 8 & 2'' & 0 \\ 7' & 0 & 9 \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 0 & 9' & 9'' \\ 2 & 1'' & 0 \\ 2' & 0 & 0' \end{array}$$

On a (§ 47, 3°): $\omega_1 = 2n = 10, \quad \omega_2 = 6n = 30$.

La première puissance de $|x, \alpha x|$ qui change en lui-même un système de triples formé au moyen de ces colonnes est la puissance 10 ou la puissance 30. Reprenons les mêmes notations que ci-dessus et formons la substitution:

$$|x, 3^{10} x| = (15''5)\,(33'5')\,(984')\,(7''4''1')\,(9'0'2)\,(6''0'''6)\,(6'8''8')\,(7'2''3'')\,(0''47)\,(9''2'1'').$$

En partant de la colonne A, elle donne la permutation $(ACB')\,(D)\,(E)$ (notes 7 et 27) ou $(abc)\,(d)\,(e)$, en désignant encore par a, b, c, d, e ces colonnes dans l'ordre où elles se présentent dans les cycles trouvés. On a aussi la permutation $(a'b'c')\,(d')\,(e')$.

L'ensemble a, b, c, d, e est un système de triples; il est changé en lui-même par la substitution $|x, 3^{10} x|$. Les ensembles $a\,b\,c\,d'\,e$, $a\,b\,c\,d\,e'$, $a\,b\,c\,d'\,e'$ sont aussi des systèmes de triples invariants par cette substitution. Par contre, les autres systèmes de triples déterminés par (64): $a'\,b\,c\,d\,e$, $a'\,b\,c\,d'\,e$, ..., $a\,b'\,c\,d\,e$, $a\,b'\,c\,d'\,e$, ..., ne sont invariants que par la substitution $|x, 3^{30} x| = |x, x|$.

On a $d = 5$; donc seules les puissances 5, 10, 15, ... de $|x, 3\,x|$ peuvent changer un système de triples déterminé par (64) en un système de triples déterminé par (64) (théorème 8, § 45). La puissance $|x, 3^5 x|$ change chacun des quatre systèmes $a\,b\,c\,d\,e$, $a\,b\,c\,d'\,e$, $a\,b\,c\,d\,e'$, $a\,b\,c\,d'\,e'$ dans le système conjugué (§ 46). Ces quatre systèmes sont donc différents.

La solution cherchée est donc $x_1 = 4$, $x_2 = 4$. Il suffirait maintenant d'écrire les deux autres systèmes (60), les colonnes cycliques conjuguées qu'ils déterminent, et d'appliquer, pour chacun, la substitution $|x, 3^{10} x|$ à l'une des trois premières colonnes et à chacune des deux dernières, directes ou conjuguées, pour constater immédiatement que tout se passe de la même manière pour ces deux autres systèmes. Il serait d'ailleurs facile d'en établir la raison.

Chacun des trois systèmes de caractéristiques appartenant à $d = 5$ détermine ainsi *huit* systèmes de triples différents: quatre qui possèdent le diviseur métacyclique $\{|x, 1 + x|, |x, \alpha^{10} x|\}$ et quatre autres qui n'ont que le groupe cyclique $\{|x, 1 + x|\}$.

$\boxed{d = 15}$ Chacun des trois systèmes de caractéristiques appartenant à $d = 15$ détermine 2^4 systèmes de triples différents, qui possèdent uniquement le groupe cyclique $\{|x, 1 + x|\}$ (§ 47, 1°).

58. ***Cas*** $\boldsymbol{N = 37}$, $n = 6$, $n - 1 = 5$, $3n = 18$, $\alpha = 2$.

Nous prendrons encore ce cas; mais nous ne ferons que la recherche des systèmes de caractéristiques et jusqu'au diviseur $d = 9$. Ce dernier diviseur servira d'exemple pour l'un des deux cas qui ne se sont pas encore présentés, sur les quatre cas considérés au chapitre IV. $d = 9$, $n = 6$ est le cas où d et n ont un p. g. c. d. $\delta > 1$, autre que d ou n (§ 44). Pour un exemple du cas restant, celui du diviseur d de n, $< n$ et $\neq 3$, (§ 42), il faut aller jusqu'à $N = 61$, pour $d = 5$. On obtient immédiatement 5 systèmes de caractéristiques différents.

Systèmes de caractéristiques.

Nous n'écrirons plus que les exposants de la racine 2:

Exposants:	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	0′,	1′,	2′,	3′,	4′,	5′,	6′,	7′.
Restes absolus:	1,	2,	4,	8,	6′,	5,	0′,	7′,	3,	6,	2′,	3′,	1′,	5′,	7,	4′,	9,	8′.

Le système des caractéristiques principales est:

Exposants:	0 6 2′,	1 7 3′,	2 8 4′,	3 9 5′,	4 0′ 6′,	5 1′ 7′.
Caractéristiques:	1 0′ 1′,	2 7′ 5′,	4 3 7,	8 6 4′,	6′ 2′ 9,	5 3′ 8′.

Les caractéristiques de tête des 5 colonnes de 18 caractéristiques sont:

Caractéristiques:	1 2 3,	1 3 4,	1 4 5,	1 5 6,	1 7 8.	
Exposants:	0 1 8,	0 8 2,	0 2 5,	0 5 9,	0 4′ 3.	(65)

Les diviseurs d de $3n$, > 1, sont 3, 6, 9, 18.

$\boxed{d = 3}$ Les triples (65), réduits (mod 3), donnent:

$\underline{0\ 1\ 2}$, 0 2 2, 0 2 2, 0 2 0, 0 2 0.

Il y a *un* système appartenant à $d = 3$.

$\boxed{d = 6 = n}$ Le tableau (40)-(41) des $n-3$ colonnes réduites (mod 6) qu'il suffit d'écrire, est (§ précédent, même cas):

0 1 2	0 2 5	0 1 4	
1 2 3	1 3 0	1 2 5	
2 3 4	2 4 1	2 3 0	0, 1, 2, 3, 4, 5,
3 4 5	3 5 2	3 4 1	
4 5 0	4 0 3	4 5 2	
5 0 1	5 1 4	5 0 3	

la dernière colonne devant servir deux fois.

Avec le triple 0 1 2 conviennent le triple 3 4 5 ou les éléments 3, 4, 5, d'où *deux* systèmes; le premier est le système précédent qui appartient à $d = 3$.

Avec le triple 0 2 5 conviennent le triple 3 4 1 ou les éléments 1, 3, 4, d'où *trois* systèmes.

Avec le triple 0 1 4 conviennent les éléments 2, 3, 5, d'où *deux* systèmes.

$\boxed{d = 9}$ Le *p. g. c. d.* $\delta = 3$. Le triple 0 5 9 réduit (mod 9) donne 0 5 0; les autres triples (65) réduits (mod 9) donnent les colonnes:

0	1	8	0	8	2	0	2	5	0	5	3	
1	2	0	1	0	3	1	3	6	1	6	4	
2	3	1	2	1	4	2	4	7	2	7	5	
3	4	2	3	2	5	3	5	8	3	8	6	
4	5	3	4	3	6	4	6	0	4	0	7	(66)
5	6	4	5	4	7	5	7	1	5	1	8	
6	7	5	6	5	8	6	8	2	6	2	0	
7	8	6	7	6	0	7	0	3	7	3	1	
8	0	7	8	7	1	8	1	4	8	4	2	

D'après le § 44, I et avant-dernier alinéa, il nous faut d'abord trouver dans ce tableau les systèmes de 3 triples contenant les 9 éléments 0, 1, ..., 8, formés:

1° avec le triple 0 1 8 et des triples pris dans les 4 colonnes,
2° " " " 0 8 2 " " " " " " 3 dernières colonnes,
3° " " " 0 2 5 " " " " " " 2 " "
4° " " " 0 5 3 " " " " " la dernière colonne.

On trouve les systèmes: 0 1 8, 3 4 2, 6 7 5,
0 1 8, 4 3 6, 2 7 5,
0 8 2, 4 3 6, 5 7 1,
0 8 2, 5 4 7, 1 3 6.

Le premier est le système qui appartient à $d = 3$ déjà obtenu deux fois; les deux derniers sont équivalents.

D'après le § 44, II et avant-dernier alinéa, il nous faut ensuite trouver dans le tableau des colonnes (66) auquel nous ajoutons les éléments réduits (mod 3) (47):

$$\mathbf{0,\ 1,\ 2,} \tag{67}$$

les systèmes de m triples (66) et de l éléments (67) remplissant les conditions :

1° $m + l = 3$;
2° l'ensemble ne contient pas deux fois le même élément;
3° aucun élément des triples n'est congru (mod 3) à un des l éléments (67).

$l = 0$ est traité (§ 44, dernier alinéa); $l = 3$ est le système des caractéristiques principales. Il nous suffit de prendre pour $l = 1$, l'élément **0** et pour $l = 2$, le couple **0,1**.

1° Soit $l = 1$ et l'élément **0**; d'après la troisième condition, nous enlevons des colonnes (66) les triples contenant les éléments 0, 3 ou 6. Il reste des trois dernières colonnes :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2 & 1 & 4 & & 2 & 4 & 7 & & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 4 & 7 & & 5 & 7 & 1 & & 5 & 1 & 8 \\ 8 & 7 & 1 & & 8 & 1 & 4 & & 8 & 4 & 2 \end{array} \qquad (68)$$

Les systèmes de deux triples ($m = 2$) sans élément commun, possibles avec ces triples (68), sont les trois suivants, équivalents par la substitution (036) (147) (258) :

$$\begin{array}{ll} 2\,4\,7, & 5\,1\,8, \\ 5\,7\,1, & 8\,4\,2, \\ 8\,1\,4, & 2\,7\,5. \end{array}$$

2° Soit $l = 2$ et le couple **0,1**; d'après la troisième condition, nous enlevons des colonnes (66) les triples contenant les éléments 0, 3, 6 et 1, 4, 7. Il ne reste rien.

Il y a donc pour $N = 37$, *trois* systèmes de caractéristiques appartenant à $d = 9$; nous en avons trouvé *un* appartenant à $d = 3$ et *six* appartenant à $d = 6$. Il en resterait à trouver *vingt-un* qui appartiennent à $d = 18$.

59. Dans ce dernier paragraphe, nous donnons, dans les quatre tableaux suivants, les résultats obtenus jusqu'ici, dans cette recherche des systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour les premiers nombres des deux formes $6n + 1$ et $6n + 3$, par les méthodes que nous avons exposées.

Les trois premiers tableaux se rapportent aux nombres *premiers* de la forme $6n+1$, jusqu'à $N=43$. Le premier donne le nombre des systèmes de caractéristiques différents et le nombre des systèmes cycliques de triples différents; le second, l'appartenance des systèmes de caractéristiques aux diviseurs de $3n$; le troisième, les diviseurs du groupe métacyclique que possèdent les systèmes cycliques de triples. Le quatrième tableau est pris dans le mémoire du P. B. Kaufmann (§ 5, notes 21 et 22). Il y donne les résultats obtenus par lui pour les premiers nombres de la forme $6n+3$, jusqu'à $N=33$, en regard de ceux que j'avais obtenus pour les premiers nombres de la forme $6n+1$, 25 compris, jusqu'à $N=31$.

I. $\Sigma=$ nombre des systèmes de caractéristiques différents.
$S=$ nombre des systèmes cycliques de triples différents.

$N=7$,	$n=1$,	$\Sigma=1$,	$S=1$
$N=13$,	$n=2$,	$\Sigma=1$,	$S=1$
$N=19$,	$n=3$,	$\Sigma=2$,	$S=4$
$N=31$,	$n=5$,	$\Sigma=8$,	$S=80$
$N=37$,	$n=6$,	$\Sigma=32$,	$S=820$
$N=43$,	$n=7$,	$\Sigma=157$,	$S=9380$.

II. Jusqu'à $N=43$, les diviseurs d de $3n$, $\geqq 3$, sont uniquement des formes 3, n, $\frac{3n}{2}$ (n pair), $3n$.

$N=$	7,	13,	19,	31,	37,	43,	
$n=$	1,	2,	3,	5,	6,	7,	
$d=3$;	—,	—,	1,	1,	1,	1	système de caractéristiques
$d=n$;	—,	—,	$\underline{1}$[51]),	3,	6,	15	systèmes „ „
$d=\frac{3n}{2}$ (n pair);	—,	—,	—,	—,	3,	—	„ „ „
$d=3n$;	—,	—,	—,	3,	21,	140	„ „ „

III. ω est un entier pair (§ 23, 1°); $\frac{\varphi(N)}{\omega}$ est un entier impair (§ 23, 2°).

Pour N premier, $\varphi(N)=N-1$. ω et $\frac{N-1}{\omega}$ sont donc deux diviseurs

[51]) Le nombre est souligné parce que le système est déjà compté à la ligne précédente. De même aux deux dernières lignes du tableau III, p. suivante, les nombres 1 et 2 sont soulignés parce que ce sont les systèmes déjà comptés chaque fois sous $\omega=2n$.

complémentaires de $N-1$, dont l'un, ω, est pair et l'autre, $\frac{N-1}{\omega}$, est impair. Les quatre couples suivants:

$$(1,\ 6n),\quad (2,\ 3n),\quad (3,\ 2n),\quad (6,\ n) \tag{69}$$

sont des couples de diviseurs complémentaires pour chaque $N-1=6n$. Le premier et le troisième conviennent toujours, avec $\omega=6n$ et $\omega=2n$; le second et le quatrième ne conviennent que pour n *impair*, avec $\omega=2$ et $\omega=6$.

Jusqu'à $N=43$, un seul couple de diviseurs complémentaires de $N-1$ convient, qui n'est pas dans les couples (69): le couple (4, 9) pour $N=37$. *Un* système cyclique de triples possède le diviseur métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^4 x|\}$ pour $N=37$.

$N=$	7,	13,	19,	31,	37,	43,	
$n=$	1,	2,	3,	5,	6,	7,	
$\omega=6n$;	—,	—,	1,	63,	777,	9249	systèmes de triples
$\omega=2n$;	1,	1,	2,	15,	42,	129	„ „ „
$\omega=2$ (n impair);	$\underline{1}$,[51])	—,	1,	1,	—,	1	„ „ „
$\omega=6$ (n impair);	—,	—,	$\underline{2}$,[51])	1,	—,	1	„ „ „

IV. Dans ce tableau, Σ est le nombre de *tous* les systèmes de caractéristiques; la notion de systèmes de caractéristiques *différents*, en dehors de $N=6n+1$ premier, n'est pas encore établie. S est comme plus haut le nombre des systèmes cycliques de triples différents. S' est le nombre de ces systèmes qui n'ont que le groupe cyclique $\{|x, 1+x|\}$; nous sommes certains[52]) que ce groupe est aussi celui qui *appartient* à ces systèmes (note 44). S'' est le nombre des systèmes de triples à qui appartient un groupe qui sort du groupe métacyclique; l'ordre de ce

[52]) Du fait du moyen élémentaire des *trains* de H.-S. White que nous avons employé pour différencier ces systèmes de triples. C'est ce moyen intéressant, qui dévoile en quelque sorte d'une manière immédiate et graphique le degré de symétrie du système de triples (voir *A.*, troisième partie, p. 81), mais qui est à peine applicable déjà aux cas $N=37$ et 43, à cause du temps qu'il exigerait, qui nous a donné pour les systèmes de triples du tableau IV chaque fois le groupe qui *appartient* à ce système. Par contre pour les systèmes de triples pour $N=37$ et 43 (tableau III), je ne puis pas dire si les diviseurs métacycliques trouvés sont effectivement les groupes qui appartiennent à ces systèmes, autrement dit si éventuellement, comme pour $N=7$ et $N=31$ (tableau IV), l'un ou l'autre de ces systèmes de triples n'est pas invariant par d'autres substitutions que celles du groupe métacyclique.

groupe est donné dans la parenthèse. Pour $N = 31$, le système de triples sous S'' est celui qui a le diviseur métacyclique $\{ |x, 1 + x|, |x, \alpha^6 x| \}$; il est déterminé par le système de caractéristiques qui appartient à $d = 3$.

$N = 6n + 1$ et $6n + 3$		Σ	S	S'	S''
$n = 1$	$N = 7$	1	1	—	$1_{(168)}$
	$N = 9$	0	0	—	—
$n = 2$	$N = 13$	1	1	—	—
	$N = 15$	1	2	—	$1_{(20.160)}$
$n = 3$	$N = 19$	4	4	1	—
	$N = 21$	4	7	—	$2_{\binom{1008}{504}}$
$n = 4$	$N = 25$	15	12	12	—
	$N = 27$	9	8	8	—
$n = 5$	$N = 31$	64	80	63	$1_{(9.999.360)}$
	$N = 33$	50	84	78	—

(Reçu le 4 septembre 1931)