

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 3 (1931)

Artikel: Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche.
Autor: Hopf, H. / Rinow, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-4688>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche

Von H. HOPF, Zürich und W. RINOW, Berlin

Die Differentialgeometrie „im Großen“ beschäftigt sich mit Eigenschaften „ganzer“ Flächen, d. h. solcher, die sich nicht durch Hinzufügung neuer Flächenstücke oder Punkte vergrößern lassen. Zu ihnen gehören alle geschlossenen Flächen. Bei einer offenen, unberandeten, mit einer überall regulären inneren Differentialgeometrie versehenen Fläche dagegen erhebt sich stets die Frage, ob sie bereits derart „vollständig“ ist, daß sie ein für die Betrachtung „im Großen“ geeigneter Gegenstand ist.

Die nachstehenden Ausführungen befassen sich mit der Frage, wie man diese „Vollständigkeit“ präzisieren kann und wie es zweckmäßig ist, dies zu tun. Die oben angedeutete Forderung der Nichtfortsetzbarkeit zu einer größeren Fläche leidet an zwei Mängeln: erstens ist — wenigstens uns — nicht bekannt, wie man sie durch innere geometrische Eigenschaften der vorgelegten Fläche feststellen kann; zweitens ist die durch sie ausgezeichnete Flächenklasse vom praktischen Standpunkt aus zu groß, insofern sie Flächen enthält, auf denen eine Reihe schöner und wichtiger Sätze — z. B. der Satz von der Verbindbarkeit zweier Punkte durch eine kürzeste Linie — nicht gilt.

Beiden Übelständen läßt sich abhelfen, indem man die in Betracht zu ziehende Flächenklasse durch eine stärkere Vollständigkeitsforderung einschränkt. Wir werden vier Möglichkeiten für eine solche Forderung angeben und zeigen, daß sie sämtlich einander äquivalent sind. Die durch sie ausgezeichneten Flächen sind diejenigen, die „vollständige metrische Räume“ im Sinne von Fréchet-Hausdorff¹⁾ sind.

1. *Differentialgeometrische Flächen. Fortsetzbarkeit.* Wir stellen zunächst einige bekannte Grundbegriffe zusammen.

Unter einer „topologischen“ Fläche verstehen wir einen zusammenhängenden topologischen Raum, in dem es ein abzählbares vollständiges System von Umgebungen — im Sinne von Hausdorff²⁾ — gibt, von welchen eine jede sich eineindeutig und stetig auf das Innere eines

¹⁾ Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (1914), S. 315 ff. — Mengenlehre (1927), S. 103 ff.

²⁾ Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 7. Kap., § 1; 8. Kap., §§ 1—3.

Kreises der euklidischen Ebene oder, was dasselbe ist, auf die ganze Ebene abbilden läßt³⁾). Statt von „kompakten“ und „nichtkompakten“⁴⁾ sprechen wir von „geschlossenen“ und „offenen“ Flächen. Ob die Flächen in den drei- oder überhaupt in einen mehrdimensionalen Raum eingebettet sind, ist gleichgültig; es wird sich durchaus um „innere“ Eigenschaften handeln.

In jeder der erwähnten, die topologische Fläche definierenden, euklidischen Umgebungen läßt sich auf mannigfache Weise ein euklidisches Koordinatensystem einführen. Ist diese Einführung so vorgenommen, daß die Koordinaten der zu verschiedenen Umgebungen gehörigen Systeme dort, wo die Umgebungen etwa übereinandergreifen, stets durch eine analytische Transformation mit von Null verschiedener Funktionaldeterminante auseinander hervorgehen, so wird dadurch die topologische zu einer „analytischen“ Fläche, auf der der analytische Charakter von Funktionen und Kurven in bezug auf die betrachteten ausgezeichneten Koordinatensysteme zu verstehen ist; alle Koordinatensysteme, die aus diesen durch analytische Transformationen mit von Null verschiedener Funktionaldeterminante hervorgehen, dürfen und sollen ebenfalls im Sinne dieser Analytizität als „ausgezeichnet“ gelten.

Eine analytische Fläche wird dadurch zu einer „differentialgeometrischen“, daß in jedem der, die Analytizität definierenden, ausgezeichneten Koordinatensysteme reelle analytische Funktionen $g_{11}, g_{12} = g_{21}, g_{22}$ der Koordinaten gegeben sind, die die folgenden beiden Eigenschaften haben: die zugehörige quadratische Form $\sum g_{ik} u_i u_k$ ist positiv definit; sind x_1, x_2 bzw. \bar{x}_1, \bar{x}_2 die Koordinaten in zwei übereinandergreifenden Koordinatensystemen, g_{ik} bzw. \bar{g}_{ik} die zugehörigen Funktionen, so hängen die g_{ik} mit den \bar{g}_{ik} derart zusammen, daß $\sum g_{ik} dx_i dx_k = \sum \bar{g}_{ik} d\bar{x}_i d\bar{x}_k$ ist⁵⁾). Auf einer solchen differentialgeometrischen Fläche läßt sich die Länge einer Kurve in bekannter Weise unabhängig vom Koordinatensystem als Integral über die Wurzel aus der eben betrachteten quadratischen Differentialform definieren. Von den bekannten Sätzen, die in der damit erklärten Differentialgeometrie gelten, sei an die Tat-

³⁾ Daß diese Definition der Fläche mit derjenigen, die die Fläche aus Dreiecken aufbaut, identisch ist, ist zuerst von *Radó* bewiesen worden: Ueber den Begriff der Riemannschen Fläche, Acta . . . , Szeged, II, (1925).

⁴⁾ *Hausdorff*, Grundzüge der Mengenlehre, S. 230.

⁵⁾ Jede topologische Fläche läßt sich, — was für diese Arbeit übrigens logisch unwesentlich ist, — zu einer differentialgeometrischen machen, denn sie läßt sich bekanntlich sogar zu einer euklidischen oder nicht-euklidischen „Raumform“ machen, d. h. mit einer Differentialgeometrie konstanten Krümmungsmaßes versehen; s. z. B. *Koebe*, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen, Sitzungsber. Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-math. Klasse, Berlin 1927, S. 164 ff.

sache erinnert, daß es von jedem Punkt aus in jeder Richtung — der Begriff „Richtung durch einen Punkt“ ist bereits auf der „analytischen“ Fläche sinnvoll — eine und nur eine geodätische Linie gibt, und daß diese analytisch von Anfangspunkt und -richtung und Länge abhängt⁶⁾.

Jedes echte Teilgebiet G einer differentialgeometrischen Fläche F ist, wie sich unmittelbar aus den Definitionen ergibt, selbst eine differentialgeometrische Fläche; wir nennen F eine „Fortsetzung“ von G . Allgemeiner definieren wir: F heißt eine Fortsetzung der differentialgeometrischen Fläche F' , wenn es ein echtes Teilgebiet G von F gibt, auf welches F' eineindeutig und längentreu abgebildet werden kann. Damit ist zugleich der Sinn der Aussagen erklärt, daß eine differentialgeometrische Fläche F' fortsetzbar oder daß sie nicht fortsetzbar ist. Die Fortsetzbarkeit und Nichtfortsetzbarkeit sind „innere“ differentialgeometrische Eigenschaften; d. h. diejenige, die F' zukommt, kommt auch jeder Fläche F'' zu, auf welche F' eineindeutig und längentreu abgebildet werden kann. Wir bezeichnen im folgenden die Gesamtheit der differentialgeometrischen, nicht fortsetzbaren Flächen als die Klasse \mathfrak{F}_0 .

2. *Das Abtragbarkeitspostulat.* Ist G ein echtes Teilgebiet der Fläche F , so besitzt G einen Randpunkt x ; um x gibt es eine Umgebung U , die ganz von den von x ausgehenden geodätischen Linien bedeckt wird, und da U Punkte von G enthält, existiert somit ein geodätischer Bogen B , der einen gewissen Punkt y von G mit x verbindet. Hat B die Länge b , so liefert mithin die Abtragung der Länge b auf dem durch B bestimmten, von y ausgehenden geodätischen Strahl keinen Punkt von G . Damit ist gezeigt, daß es auf jeder fortsetzbaren Fläche einen geodätischen Strahl gibt, auf dem man nicht jede Strecke von seinem Anfangspunkt aus abtragen kann, oder, anders ausgedrückt, daß die Gesamtheit \mathfrak{F}_1 der Flächen, auf denen diese Abtragungen unbeschränkt möglich sind, in \mathfrak{F}_0 enthalten ist: $\mathfrak{F}_0 \supset \mathfrak{F}_1$. Dabei ist also \mathfrak{F}_1 die Klasse der Flächen, die das folgende „Abtragbarkeitspostulat“ erfüllen: *Auf jedem geodätischen Strahl läßt sich von dessen Anfangspunkt aus jede Strecke abtragen*⁷⁾.

⁶⁾ Das bedeutet: ist ein geodätischer Bogen vom Punkt $x = x_0$ aus in der Richtung $\varphi = \varphi_0$ von der Länge $a = a_0$ gegeben, so existieren für hinreichend kleine Umgebungen von x_0 , φ_0 , a_0 geodätische Bögen, deren Endpunkte und -richtungen sowie höheren Ableitungen in den Endpunkten analytische Funktionen von x , φ , a sind. Dabei ist Analytizität von Punkten, Richtungen usw. immer in bezug auf irgendwelche ausgezeichnete Koordinatensysteme zu verstehen.

⁷⁾ Für den Spezialfall konstanter Krümmung vergl. man: *Koebe*, wie oben, 2. Mitteilung, Berlin 1928, S. 345 ff., besonders S. 349—350; *H. Hopf*, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, Math. Annalen 95 (1925), S. 313 ff., besonders S. 315; sowie die historischen Bemerkungen von Koebe, a. a. O. S. 346—347.

3. *Das Unendlichkeitspostulat.* Unter einer „divergenten Linie“ auf einer beliebigen Fläche F soll das eindeutige und stetige Bild eines geradlinigen Strahls (mit Einschluß seines Anfangspunktes) verstanden werden, falls jeder divergenten Punktfolge⁴⁾ des Strahls eine auf F divergente Punktfolge entspricht; statt des Strahls kann man natürlich auch eine Strecke mit Einschluß ihres Anfangs- und Ausschluß ihres Endpunktes zugrunde legen. Das „Unendlichkeitspostulat“ soll lauten: *Jede divergente Linie ist unendlich lang*⁸⁾. Die Klasse der Flächen, die dieses Postulat erfüllen, heiße \mathfrak{F}_2 . Wir behaupten vorläufig: $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$; (später werden wir $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$ beweisen). Unsere Behauptung wird bewiesen sein, sobald wir gezeigt haben, daß auf einer Fläche, die nicht zu \mathfrak{F}_1 gehört, ein abbrechender geodätischer Strahl, d. h. ein solcher, auf dem man nicht jede Strecke abtragen kann und der somit eine endliche Länge hat, in dem eben festgestellten Sinne divergiert. Dabei ist der geodätische Strahl g als das Bild der durch $0 \leq s < a$ bestimmten, einseitig offenen s -Strecke aufzufassen, wobei s die vom Anfangspunkt y von g gemessene Bogenlänge und a die obere Grenze der von y auf g abtragbaren Längen ist.

Wir beweisen die behauptete Divergenz von g indirekt: gäbe es auf der s -Strecke eine divergente Folge, d. h. eine Folge s_i mit $\lim s_i = a$, für welche die entsprechenden Punkte x_i auf F nicht divergierten, so hätten diese einen Häufungspunkt z , und wir dürfen, indem wir allenfalls zu einer Teilfolge übergehen, annehmen, daß $z = \lim x_i$ ist. Ferner dürfen wir, indem wir, falls nötig, noch einmal zu einer Teilfolge übergehen, annehmen, daß die von den x_i nach y weisenden Richtungen der Linie g gegen eine Richtung im Punkte z konvergieren. h sei der in dieser Richtung von z ausgehende geodätische Strahl; auf ihm ist es möglich, eine Strecke c abzutragen, die wir $< a$ wählen. Für fast alle i — nämlich sobald $s_i \geq c$ ist — kann man die Strecke c von x_i aus in Richtung auf y auf g abtragen; die Richtungselemente e_i in den Endpunkten dieser Bögen konvergieren gegen das Richtungselement e von g in dem Punkt $s = a - c$. Andererseits konvergieren diese Bögen infolge der regulären Abhängigkeit der geodätischen Linien von ihren Anfangselementen⁶⁾ gegen den von z aus auf h abgetragenen Bogen der Länge c , und e ist daher das Endelement dieses Bogens; dabei entspricht die nach z weisende Richtung wachsendem s . Mithin liegt z auf g , und zwar im Abstand a von y ; da von z in jeder Richtung eine geodätische Linie ausläuft, kann man aber g sogar noch über z hinaus verlängern — im Widerspruch zu der Definition von a .

⁸⁾ Für den Spezialfall konstanter Krümmung s. Koebe, wie unter ⁵⁾, S. 184—185.

4. *Die differentialgeometrischen Flächen als metrische Räume.* Zwei Punkte x, y einer differentialgeometrischen Fläche lassen sich stets durch einen Weg von endlicher Länge verbinden; denn zunächst kann man eine Kette euklidischer, mit ausgezeichneten Koordinatensystemen versehener Umgebungen U_1, U_2, \dots, U_n so finden, daß $x \subset U_1, y \subset U_n$ ist und daß die Durchschnitte $U_i \cdot U_{i+1}$ nicht leer sind; ist dann $x_i \subset U_i \cdot U_{i+1}, x = x_0, y = x_n$, so gibt es in U_i immer einen Weg endlicher Länge von x_{i-1} nach x_i , und die Summe dieser Wege ist eine Verbindung endlicher Länge von x mit y . Die untere Grenze der Längen aller Wege von x nach y ist daher stets eine endliche, nicht negative Zahl $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, die wir die „Entfernung“ der Punkte x, y nennen. Sie hat die folgenden drei Eigenschaften: 1) $\rho(x, x) = 0$; 2) $\rho(x, y) > 0$ für $x \neq y$; 3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$; von ihnen bedarf wohl nur die zweite eines Beweises: in einer Umgebung von x führe man (ausgezeichnete) euklidische Koordinaten u_1, u_2 ein und betrachte in dieser euklidischen Geometrie einen Kreis vom Radius R um x , der den Punkt y ausschließt, so daß jeder Weg von x nach y einen Punkt y' mit dieser Kreislinie gemein hat; bezeichnet dann c das Minimum von $\sqrt{\sum g_{ik} u_i' u_k'}$ unter der Nebenbedingung $u_1'^2 + u_2'^2 = 1$ in der abgeschlossenen Kreisscheibe, das wegen der Definitheit der Fundamentalform positiv ist, so hat in unserer Differentialgeometrie jeder Weg von x nach y' mindestens die Länge cR , folglich ist erst recht $\rho(x, y) \geq cR > 0$.

Die Entfernungsfunktion ρ erfüllt also die drei Axiome der „metrischen Räume“⁹⁾. Wir haben uns aber noch davon zu überzeugen, daß der auf Grund dieser Metrik definierte Umgebungsbegriff auf der als metrischer Raum aufgefaßten Fläche F mit dem ursprünglichen topologischen Umgebungsbegriff auf F zusammenfällt, oder daß, anders ausgedrückt, die Aussagen $x = \lim x_i$ und $\lim \rho(x_i, x) = 0$ miteinander identisch sind. — Wenn die Folge x_i nicht gegen x konvergiert, so gibt es außerhalb eines gewissen euklidischen Kreises vom Radius R um x unendlich viele x_i , und für diese ist, wie wir oben sahen, $\rho(x_i, x) > cR > 0$; also ist in diesem Fall gewiß nicht $\lim \rho(x_i, x) = 0$. Ist andererseits $x = \lim x_i$, so liegen fast alle x_i in einem solchen festen Kreis vom Radius R ; bezeichnet C das Maximum von $\sqrt{\sum g_{ik} u_i' u_k'}$ unter der Nebenbedingung $u_1'^2 + u_2'^2 = 1$ in der abgeschlossenen Kreisscheibe und $r(x, y)$ die euklidische Entfernung im Sinne der $u_1 - u_2$ — Geometrie, so ist $\rho(x_i, x) \leq Cr(x_i, x)$; da $\lim r(x_i, x) = 0$ ist, ist mithin auch $\lim \rho(x_i, x) = 0$. — Damit ist die Auffassung der differentialgeometrischen Fläche als metrischer Raum vollständig begründet.

⁹⁾ Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, S. 290 ff.; Mengenlehre, S. 94.

5. *Das Vollständigkeits- und das Kompaktheits-Postulat in metrischen Räumen.* Den in Nr. 2 und 3 aufgestellten Vollständigkeitsforderungen stellen wir jetzt zwei Forderungen ähnlichen Inhalts an die Seite, die sich auf beliebige metrische Räume beziehen und sich somit nach dem Ergebnis von Nr. 4 für differentialgeometrische Flächen aussprechen lassen.

Nennt man in einem metrischen Raum eine Punktfolge x_i eine „Fundamentalfolge“, falls die Entfernungen $\rho(x_i, x_j)$ das Cauchysche Kriterium erfüllen, d. h. falls es zu jedem positiven ε eine Zahl $N(\varepsilon)$ derart gibt, daß aus $i, j > N(\varepsilon)$ stets $\rho(x_i, x_j) < \varepsilon$ folgt, so ist leicht zu sehen, daß jede konvergente Folge eine Fundamentalfolge ist. Der Raum heißt nun „vollständig“, wenn hiervon die Umkehrung gilt, wenn also jede Fundamentalfolge konvergiert, mit anderen Worten, wenn das folgende „Vollständigkeitspostulat“ erfüllt ist: *Bilden die Punkte x_i eine Fundamentalfolge, so gibt es einen Punkt x , gegen den sie konvergieren*¹⁾. (Z. B. ist die euklidische Ebene vollständig, eine offene euklidische Kreisscheibe, als Raum betrachtet, unvollständig.)

Zu einer ähnlichen, aber mit dieser nicht identischen, Forderung gelangt man, indem man — analog wie man eben die Identität der topologischen und der metrischen Konvergenz postulierte — verlangt, daß in dem betrachteten metrischen Raume „kompakt“ dasselbe bedeutet wie „beschränkt“, daß also der „Satz von Bolzano-Weierstraß“ gilt. Dabei nennen wir, wie üblich, eine Punktmenge in unserem Raume „kompakt“, wenn sie keine unendliche, in dem Raume divergente Folge enthält, und „beschränkt“, wenn die Entfernungen ihrer Punktepaare eine endliche obere Schranke besitzen. In jedem metrischen Raum ist jede kompakte Menge beschränkt, da aus $\lim \rho(x_i, y_i) = \infty$ leicht folgt, daß wenigstens eine der Folgen x_i, y_i divergent sein muß. Dagegen braucht im allgemeinen nicht jede beschränkte Menge kompakt zu sein, und zwar nicht einmal in vollständigen Räumen; dies zeigt folgendes Beispiel: in der euklidischen Ebene bezeichne $r(x, y)$ die gewöhnliche Entfernung; man definiere eine neue Metrik durch $\rho(x, y) = \min(1, r(x, y))$; der dadurch gegebene metrische Raum ist, wie man leicht sieht, vollständig und selbst beschränkt, aber nicht kompakt¹⁰⁾. Ist aber andererseits in einem metrischen Raum jede beschränkte Menge kompakt, so ist er gewiß vollständig, da ja eine Fundamentalfolge — in

¹⁰⁾ Ein anderes Beispiel eines vollständigen Raumes, in dem der Satz von Bolzano-Weierstraß nicht gilt, ist der Hilbertsche Raum; er ist vollständig (s. Hausdorff, Grundzüge ..., S. 317), aber die Punktfolge $(1, 0, 0, \dots)$, $(0, 1, 0, \dots)$, $(0, 0, 1, \dots)$, ... ist beschränkt und divergent. Wegen des gegenseitigen Verhältnisses der Begriffe Kompaktheit und Beschränktheit vergl. man auch Hausdorff, Mengenlehre, S. 107 ff.

einem beliebigen Raum — stets beschränkt ist und höchstens einen Häufungspunkt hat, d. h. entweder konvergiert oder divergiert, diese zweite Möglichkeit in unserem speziellen Raum aber ausgeschlossen ist. Somit wird das Vollständigkeitspostulat für metrische Räume durch das „Kompaktheitspostulat“ noch verschärft, welches so lautet: *Jede beschränkte Menge ist kompakt*¹¹⁾.

6. *Das gegenseitige Verhältnis der fünf Flächenklassen; die Existenz kürzester Verbindungen.* — Werden die differentialgeometrischen Flächen gemäß Nr. 4 als metrische Räume aufgefaßt, so liefern die beiden soeben besprochenen Postulate zwei Flächenklassen \mathfrak{F}_3 und \mathfrak{F}_4 durch die Festsetzung, daß \mathfrak{F}_3 diejenigen Flächen enthält, die das Vollständigkeits-, \mathfrak{F}_4 diejenigen, die das Kompaktheitspostulat erfüllen, nach dem Vorstehenden ist dann $\mathfrak{F}_4 \subset \mathfrak{F}_3$. Bezüglich der Stellung dieser Klassen zu den früher behandelten \mathfrak{F}_0 , \mathfrak{F}_1 , \mathfrak{F}_2 stellen wir vorläufig fest, daß $\mathfrak{F}_3 \subset \mathfrak{F}_2$ ist. Dies beweisen wir, indem wir zeigen, daß eine divergente Linie endlicher Länge stets eine divergente Fundamentalfolge enthält. In der Tat: ist x_i eine divergente Folge auf der Linie L von der endlichen Länge a und bezeichnet a_i die Bogenlänge auf L vom Anfangspunkt bis x_i , so existiert $\lim a_i = a$; folglich bilden die Zahlen a_i und infolge von $\rho(x_i, x_j) \leq |a_i - a_j|$ auch die Punkte x_i eine Fundamentalfolge. — Wir haben also bezüglich der fünf betrachteten Klassen differentialgeometrischer Flächen bisher die folgenden Inklusionen festgestellt:

$$(I) \quad \mathfrak{F}_0 \supset \mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2 \supset \mathfrak{F}_3 \supset \mathfrak{F}_4;$$

(die geschlossenen Flächen gehören trivialerweise zu \mathfrak{F}_4 , also zu jeder dieser Klassen). Wir werden nun weiter zeigen:

*Satz I: Die Klassen \mathfrak{F}_1 , \mathfrak{F}_2 , \mathfrak{F}_3 , \mathfrak{F}_4 sind miteinander identisch*¹²⁾.

Satz II: Die Klasse \mathfrak{F}_0 umfaßt mehr Flächen als die durch den Satz I gekennzeichnete Klasse der „vollständigen“ Flächen, d. h. es gibt Flächen, die zwar unvollständig — im Sinne irgend eines unserer vier Postulate —, aber trotzdem nicht fortsetzbar sind.

Beim Beweise von Satz I werden wir uns auf folgenden Hilfssatz stützen:

Hilfssatz: Auf einer Fläche der Klasse \mathfrak{F}_1 existiert zwischen je zwei

¹¹⁾ Hiermit ist das (für den Spezialfall konstanter Krümmung formulierte) „verschärfte Unendlichkeitspostulat“ bei Koebe, wie oben, 6. Mitteilung, Berlin 1930, S. 29, identisch.

¹²⁾ Für den Spezialfall konstanter Krümmung ist diese Identität an der unter ¹¹⁾ genannten Stelle bewiesen; der Beweis bezieht sich aber nur auf diesen Spezialfall.

Punkten a, b stets ein geodätischer Bogen, der eine kürzeste Verbindung von a und b ist, d. h. die Länge $\rho(a, b)$ hat.

Wenn sowohl dieser Hilfssatz als der Satz I bewiesen sein werden, werden wir zugleich folgenden Satz bewiesen haben:

Satz III: Auf jeder vollständigen Fläche¹³⁾ lassen sich je zwei Punkte durch eine geodätische kürzeste Linie verbinden.

Dagegen wird durch Angabe eines Beispiels der folgende Satz bewiesen werden, in dem auf Grund von Satz III der Satz II enthalten ist:

Satz IIIa: Es gibt nicht-fortsetzbare Flächen, auf denen sich nicht je zwei Punkte durch eine kürzeste Linie verbinden lassen.

Wir werden nun in Nr. 7 den Hilfssatz, in Nr. 8 den Satz I (und damit den Satz III) beweisen und in Nr. 9 Beispiele angeben, aus denen die Richtigkeit der Sätze IIIa und II ersichtlich ist; sodann werden wir in Nr. 10 dem Inhalt der Sätze III und IIIa noch einige andere Tatsachen an die Seite stellen, die zwar auf allen vollständigen, aber nicht auf allen nicht-fortsetzbaren Flächen gelten, und die zur Rechtfertigung des Standpunktes beitragen sollen, daß den differentialgeometrischen Betrachtungen im Großen die Klasse der vollständigen, aber nicht die weitere Klasse der nicht-fortsetzbaren Flächen zugrunde zu legen sei.

7. *Beweis des Hilfssatzes.* Wir werden diesen Beweis dadurch erbringen, daß wir auf einer beliebigen Fläche, über deren Zugehörigkeit zu einer der verschiedenen Klassen wir nichts voraussetzen, zwei Punkte a, b und eine Folge von a mit b verbindenden Kurven betrachten, deren Längen gegen $\rho(a, b)$ konvergieren; eine geeignet ausgewählte Teilfolge wird ein Grenzgebilde liefern, das entweder ein geodätischer und kürzester Weg von a nach b oder eine von a ausgehende geodätische Linie ist, auf der man nicht jede Strecke abtragen kann. Da auf den Flächen der Klasse \mathfrak{F}_1 diese zweite Möglichkeit ausgeschlossen ist, existiert auf ihnen also eine kürzeste Verbindung von a und b . Dieser Beweis lehnt sich eng an den bekannten Hilbert-Carathéodoryschen Existenzbeweis an¹⁴⁾.

a) C_v seien a mit b verbindende Wege endlicher Längen $L(C_v)$, und es sei $\lim L(C_v) = \rho(a, b)$. Wir betrachten sie in einer solchen Parameterdarstellung, daß $x_v(t)$ denjenigen Punkt von C_v bezeichnet, der die

¹³⁾ Unter einer „vollständigen“ Fläche wird von nun an immer eine solche verstanden, die der Klasse $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_4$ angehört.

¹⁴⁾ Hilbert, Ueber das Dirichletsche Prinzip, Jahresber. d. Deutschen Math. Verein. VIII (1899), und Crelles Journal 130 (1905). — Carathéodory, Ueber die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen, Math. Annalen 62 (1906), §§ 10, 11.

von a nach b durchlaufene Kurve C_ν im Verhältnis $t:1-t$ teilt; es ist also $0 \leq t \leq 1$ und $x_\nu(0) = a$, $x_\nu(1) = b$ für alle ν . Die Länge des Bogens von $x_\nu(t_1)$ bis $x_\nu(t_2)$ auf C_ν soll mit $L_\nu(t_1, t_2)$ bezeichnet werden; da $L_\nu(t_1, t_2) = |t_1 - t_2| \cdot L_\nu(0, 1)$ ist und die $L_\nu(0, 1) = L(C_\nu)$ gegen ihre untere Grenze $\rho(a, b) = k$ konvergieren, gibt es positive Konstanten k, K mit

$$(2) \quad k |t_1 - t_2| \leq L_\nu(t_1, t_2) \leq K |t_1 - t_2|$$

für alle ν .

Es sei $\tau_i (i = 1, 2, \dots)$ eine auf der Strecke $0 \leq t \leq 1$ überall dichte abzählbare Menge von t -Werten. Aus den C_ν wählen wir eine Teilfolge von Kurven C_ν^1 so aus, daß die auf ihnen liegenden, zum Parameter τ_1 gehörigen Punkte $x_\nu^1(\tau_1)$ entweder divergieren oder gegen einen Punkt $x(\tau_1)$ konvergieren; aus ihr wählen wir eine Teilfolge von Kurven C_ν^2 aus, so daß die auf ihnen liegenden, zu τ_2 gehörigen Punkte $x_\nu^2(\tau_2)$ entweder divergieren oder gegen einen Punkt $x(\tau_2)$ konvergieren; so fortschreitend definieren wir eine Folge C_ν^n für jedes n . Die „Diagonalfolge“ C_1^1, C_2^2, \dots hat dann die Eigenschaft, daß für jedes i die Punktfolge $x_\nu^i(\tau_i)$ entweder divergiert oder gegen einen Punkt $x(\tau_i)$ konvergiert. — Wir schreiben nun statt C_ν^i wieder C_ν und statt $x_\nu^i(t)$ wieder $x_\nu(t)$.

b) Für beliebiges t bestehen nur die folgenden beiden Möglichkeiten: entweder divergiert die Folge $x_\nu(t)$ oder es gibt ein positives δ , so daß für $|t' - t| < \delta$ die Folge $x_\nu(t')$ gegen einen Punkt $x(t')$ konvergiert. Beweis: Die Folge $x_\nu(t)$ divergiere nicht; dann gibt es eine konvergente Teilfolge: $\lim x_{\nu'}(t) = y$. U sei eine kompakte offene Umgebung von y , r eine so kleine positive Zahl, daß aus $\rho(y, z) \leq r$ immer $z \subset U$ folgt; r existiert, da es andernfalls außerhalb von U eine Punktfolge z_i mit $\lim \rho(z_i, y) = 0$ geben würde, was nach Nr. 4 unmöglich ist. τ sei ein solcher unter den Werten τ_i , daß $K|t - \tau| < r$ ist; dann liegen infolge von (2) fast alle Punkte $x_{\nu'}(\tau)$ in U ; wegen der Kompaktheit von U besitzt diese Folge daher einen Häufungspunkt; da somit die Folge $x_{\nu'}(\tau)$ nicht divergiert, konvergiert sie.

Wir beweisen nun zunächst die Konvergenz der ganzen Folge $x_\nu(t)$. $\varepsilon > 0$ sei gegeben; das eben betrachtete τ dürfen wir als so gewählt annehmen, daß $K|t - \tau| < \frac{\varepsilon}{4}$ ist. Da die Punkte $x_{\nu'}(\tau)$ infolge ihrer Konvergenz eine Fundamentalfolge bilden, gibt es ein $N(\varepsilon)$ so, daß für $\nu' > \nu > N(\varepsilon)$ immer $\rho(x_{\nu'}(\tau), x_\nu(\tau)) < \frac{\varepsilon}{4}$ ist; infolge der Konvergenz

der Folge $x_{\nu'}(t)$ gegen y dürfen wir $N(\varepsilon)$ überdies so annehmen, daß für $\nu' > N(\varepsilon)$ immer $\rho(y, x_{\nu'}(t)) < \frac{\varepsilon}{4}$ ist. Aus $\rho(y, x_{\nu}(t)) \leq \rho(y, x_{\nu'}(t)) + \rho(x_{\nu'}(t), x_{\nu'}(\tau)) + \rho(x_{\nu'}(\tau), x_{\nu}(\tau)) + \rho(x_{\nu}(\tau), x_{\nu}(t))$ folgt dann $\rho(y, x_{\nu}(t)) < \varepsilon$ für $\nu > N(\varepsilon)$; das bedeutet: $\lim x_{\nu}(t) = y$.

Damit ist unter der Voraussetzung, daß die Folge $x_{\nu}(t)$ nicht divergiert, deren Konvergenz gegen einen Punkt $y = x(t)$ bewiesen. Ist nun $\delta = \frac{r}{K}$ und $|t' - t| < \delta$, so folgt aus (2), daß fast alle Punkte $x_{\nu}(t')$ in U liegen; (U und r haben dieselben Bedeutungen wie bisher). Infolge der Kompaktheit von U ist daher die Folge $x_{\nu}(t')$ nicht divergent; daher muß sie, wie soeben für den Wert t gezeigt wurde, gegen einen Punkt $x(t')$ konvergieren.

Als unmittelbare Folge aus der somit bewiesenen Behauptung b) formulieren wir:

b') Die Menge A derjenigen Werte t , für die die Folgen $x_{\nu}(t)$ konvergieren, ist eine offene und, da sie 0 und 1 enthält, nicht leere Teilmenge der Strecke $0 \leq t \leq 1$; für jeden nicht zu A gehörigen Wert divergiert die Folge $x_{\nu}(t)$. (Diese Menge darf leer sein.)

c) Ist $t = \lim t_i$, $t_i \in A$ ($i = 1, 2, \dots$), $t \notin A$, so divergiert die Folge $x(t_i)$. Beweis: Hätte die Folge $x(t_i)$ einen Häufungspunkt y , so gäbe es wieder ein solches $r > 0$, daß alle Punkte z mit $\rho(z, y) \leq r$ in einer kompakten Umgebung U von y lägen; man könnte ein festes i so wählen, daß $\rho(y, x(t_i)) < \frac{r}{3}$ und $K |t_i - t| < \frac{r}{3}$, also nach (2)

$\rho(x_{\nu}(t_i), x_{\nu}(t)) < \frac{r}{3}$ für alle ν wäre. Dann wäre $\rho(y, x_{\nu}(t)) \leq \rho(y, x(t_i)) + \rho(x(t_i), x_{\nu}(t_i)) + \rho(x_{\nu}(t_i), x_{\nu}(t)) < \frac{2}{3}r + \rho(x(t_i), x_{\nu}(t_i))$; für fast alle ν wäre daher $\rho(y, x_{\nu}(t)) < r$, also $x_{\nu}(t) \in U$; die Folge $x_{\nu}(t)$ hätte wegen der Kompaktheit von U einen Häufungspunkt — im Widerspruch zu ihrer vorausgesetzten Divergenz.

d) Sind $t_1, t_2 \in A$, so ist $\rho(x(t_1), x(t_2)) = \lim L_{\nu}(t_1, t_2)$. Beweis: Die Folge $L_{\nu}(t_1, t_2)$ ist durch (2) beschränkt, hat also wenigstens einen Häufungswert. Ein solcher kann wegen $\rho(x_{\nu}(t_1), x_{\nu}(t_2)) \leq L_{\nu}(t_1, t_2)$ und $\lim \rho(x_{\nu}(t_1), x_{\nu}(t_2)) = \rho(x(t_1), x(t_2))$ nicht $< \rho(x(t_1), x(t_2))$ sein. Da das Analoge für die Häufungswerte von $L_{\nu}(0, t_1)$ und $L_{\nu}(t_2, 1)$ gilt, so würde aber andererseits aus der Existenz eines Häufungswertes von

$L_v(t_1, t_2)$, der $> \rho(x(t_1), x(t_2))$ wäre, die Existenz eines Häufungswertes von $L_v(0, 1) = L_v(0, t_1) + L_v(t_1, t_2) + L_v(t_2, 1)$ folgen, der $> \rho(a, x(t_1)) + \rho(x(t_1), x(t_2)) + \rho(x(t_2), b) \geq \rho(a, b)$, also $> \rho(a, b)$ wäre, was wegen $\rho(a, b) = \lim L_v(0, 1)$ ausgeschlossen ist.

e) Die durch $x(t)$ vermittelte Abbildung von A ist eineindeutig und stetig. Beweis: Aus (2) und d) folgt $k|t_1 - t_2| \leq \rho(x(t_1), x(t_2)) \leq K|t_1 - t_2|$. Aus der ersten dieser Ungleichungen ist die Eineindeutigkeit, aus der zweiten die Stetigkeit ersichtlich.

f) Sind $t_1, t_2, t_3 \subset A$ und ist $t_1 < t_2 < t_3$, so ist

$$\rho(x(t_1), x(t_2)) + \rho(x(t_2), x(t_3)) = \rho(x(t_1), x(t_3)).$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus d) und $L_v(t_1, t_2) + L_v(t_2, t_3) = L_v(t_1, t_3)$.

g) Gilt für je drei Punkte x, y, z eines einfachen stetigen Bogens B , von denen y zwischen x und z liegt, die Gleichung $\rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, z)$, so ist B geodätisch und stellt für je zwei seiner Punkte eine kürzeste Verbindung dar. Beweis: Um jeden Punkt y der Fläche gibt es eine Umgebung $V(y)$ mit folgender Eigenschaft: je zwei Punkte von $V(y)$ lassen sich durch eine und nur eine kürzeste Linie verbinden, und diese ist geodätisch¹⁵⁾. Es sei $y \subset B$; x, z seien solche Punkte von B , daß y zwischen ihnen und daß der Teilbogen von x bis z ganz in $V(y)$ liegt; y' bezeichne einen beliebigen Punkt dieses Teilbogens. Sind $g(xy')$, $g(y'z)$, $g(xz)$ die kürzesten Verbindungen zwischen den betreffenden Punkten, so sind ihre Längen $\rho(x, y')$, $\rho(y', z)$, $\rho(x, z)$; infolge der vorausgesetzten additiven Eigenschaft von ρ hat daher auch der Weg $g(xy') + g(y'z)$ die Länge $\rho(x, z)$, und wegen der Einzigkeit der kürzesten Verbindung von x und z fällt er mit $g(xz)$ zusammen. Folglich liegt y' auf $g(xz)$; läßt man nun y' auf B von x nach z laufen, so erkennt man, daß der so durchlaufene Bogen von B mit $g(xz)$ zusammenfällt. Mithin ist B in der Umgebung eines beliebigen Punktes y , also überall, geodätisch.

Zugleich haben wir erkannt, daß jeder Teilbogen von B , der ganz in einer Umgebung $V(y)$ liegt, kürzeste Verbindung zwischen seinen Endpunkten ist. Nun kann man, wenn x und z feste Punkte auf B sind, den Bogen von x bis z mit endlich vielen $V(y_i)$ bedecken; man kann ihn daher in endlich viele Teilbögen $x_i x_{i+1}$ mit $x = x_0, z = x_n$ einteilen, die sämtlich kürzeste Verbindungen zwischen ihren Endpunkten sind, also die Längen $\rho(x_i, x_{i+1})$ haben. Die Gesamtlänge von x bis z ist

¹⁵⁾ Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung (1909), § 33.

daher $\Sigma \rho(x_i, x_{i+1}) = \rho(x, z)$ — wegen der vorausgesetzten Additivität von ρ —; d. h. der Bogen ist eine kürzeste Verbindung von x und z .

h) Wenn die Menge A derjenigen t -Werte, für die die Folgen $x_\nu(t)$ konvergieren, mit der ganzen Strecke von 0 bis 1 identisch ist, so ist ihr durch $x(t)$ vermitteltes Bild nach e) ein a mit b verbindender einfacher Bogen; nach f) und g) ist dieser geodätisch und eine kürzeste Verbindung von a und b .

Wenn es t -Werte gibt, die nicht zu A gehören, so gibt es unter ihnen, da A nach b') offen, die Komplementärmenge von A also abgeschlossen ist, einen kleinsten t^* ; da 0 und 1 zu A gehören, ist $0 < t^* < 1$. A' sei der durch $0 \leq t < t^*$ bestimmte Teil von A . Durch die Abbildung $x(t)$ entspricht A' gemäß e), f), g) eine geodätische Linie G' mit der Eigenschaft, daß ihre Bögen von a bis zu den Punkten $x(t)$, da sie kürzeste Verbindungen ihrer Endpunkte sind, die Längen $\rho(a, x(t))$ haben; alle diese Längen sind nach f) kleiner als $\rho(a, b)$, also beschränkt; L' sei ihre obere Grenze. Wir behaupten, daß man die Länge L' nicht auf G' von a aus abtragen kann. Wäre dies nämlich möglich, gäbe es also auf G' einen Punkt x^* , so daß die Bogenlänge auf G' von a bis x^* gleich L' wäre, so würde eine Punktfolge $x(t_i)$, die einer beliebigen von unten her gegen t^* konvergierenden Folge t_i entspricht, gegen x^* konvergieren; das ist unmöglich, da eine solche Folge $x(t_i)$ nach c) divergieren muß.

Damit ist der Beweis beendet: wir haben entweder eine kürzeste Verbindung von a und b oder eine (von a ausgehende) geodätische Linie gefunden, auf der man nicht jede Länge abtragen kann.

8. *Beweis des Satzes I.* Infolge der Inklusionen (I) genügt es, die Inklusion $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_4$ zu beweisen. Man muß also folgendes zeigen: ist M eine beschränkte Menge auf der zu der Klasse \mathfrak{F}_1 gehörigen Fläche F , so ist M kompakt.

Aus der vorausgesetzten Beschränktheit von M folgt, daß es, wenn a ein Punkt von F ist, eine Konstante K gibt, so daß $\rho(a, x) < K$ für alle $x \in M$ ist. Nach dem Hilfssatz kann man a mit jedem dieser Punkte x durch einen geodätischen Bogen von der Länge $\rho(a, x)$ verbinden. Versteht man unter N die Menge derjenigen Punkte, die man erhält, indem man auf den von a ausgehenden geodätischen Strahlen alle Längen abträgt, die $\leq K$ sind, so ist daher $M \subset N$, und es genügt, die Kompaktheit von N zu beweisen.

Aus jeder unendlichen Teilmenge N' von N kann man eine solche unendliche Teilfolge x_i auswählen, daß Anfangsrichtungen und Längen geo-

dätischer Bögen g_i , die a mit den x_i verbinden und deren Längen $\leq K$ sind, gegen eine Grenzrichtung und eine Grenzlänge $k \leq K$ konvergieren. Da F zur Klasse \mathfrak{F}_1 gehört, läßt sich diese Länge k auf dem durch die Grenzrichtung bestimmten, von a ausgehenden geodätischen Strahl abtragen. Der sich bei dieser Abtragung ergebende Punkt y ist dann infolge der regulären Abhängigkeit der geodätischen Linien von den Anfangselementen⁶⁾ Häufungspunkt der Folge x_i , also der Menge N' .

9. *Unvollständige, nicht-fortsetzbare Flächen.* E' sei die durch die Herausnahme eines Punktes, etwa des Nullpunktes, aus der euklidischen Ebene E entstandene Fläche, F_0 die universelle Ueberlagerungsfläche von E' , die man sich nach Art der Riemannschen Fläche des Logarithmus über E' ausgebreitet denken kann. F_0 wird dadurch zu einer differentialgeometrischen Fläche, daß man die in Umgebungen jedes Punktes von E' definierte euklidische Differentialgeometrie von E mittels der Ueberlagerungsbeziehung auf Umgebungen der Punkte von F_0 überträgt. Das Krümmungsmaß dieser Differentialgeometrie von F_0 ist überall Null. Die geodätischen Linien sind die Ueberlagerungslinien der in E' verlaufenden Geraden und Geradenstücke. Sind x, y zwei Punkte in E , auf deren Verbindungsstrecke der Nullpunkt liegt, x_0, y_0 zwei die Punkte x, y überlagernde Punkte in F_0 , so existiert in F_0 keine geodätische Linie, die x_0 mit y_0 verbindet; denn eine solche müßte über einem x mit y in E' verbindenden Geradenstück liegen, und ein solches ist nicht vorhanden, da der Nullpunkt nicht zu E' gehört. Da eine kürzeste Verbindung immer geodätisch sein muß, existiert mithin zwischen x_0 und y_0 keine kürzeste Verbindung¹⁶⁾.

Um nun den Satz IIIa — und damit nach Satz III den Satz II — zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß F_0 nicht fortsetzbar ist.

Zu diesem Zwecke stellen wir zunächst zwei Eigenschaften von F fest: A) Unter den von einem beliebigen Punkt x_0 von F_0 ausgehenden Richtungen gibt es genau eine von der Art, daß man auf dem zugehörigen geodätischen Strahl nicht jede Länge abtragen kann. B) Diejenigen Punkte von F_0 , für welche die kleinste, nicht in jeder Richtung von ihnen aus abtragbare Länge einen festen Wert a hat, bilden eine einfache offene Linie. — Die Richtigkeit beider Aussagen ist unmittelbar

¹⁶⁾ Führt man in E die komplexe Variable z ein, bildet man dann F_0 durch $u + iv = \log z$ eineindeutig auf eine $u-v$ -Ebene ab und überträgt man dadurch die Differentialgeometrie von F_0 in diese Ebene, so ist das Linienelement dieser Differentialgeometrie $ds^2 = e^{2u}(du^2 + dv^2)$. Die Extremalen des zu dieser Differentialform gehörigen Variationsproblems sind also die durch die logarithmische Abbildung gelieferten Bilder der Geraden bzw. Geradenstücke der punktierten Ebene E' . Man vergl. *Carathéodory*, Sui campi di estremali uscenti da un punto ..., Boll. Unione Mat. Ital. 1923 (II), S. 81 ff.

ersichtlich: die in A) genannte singuläre Richtung durch einen Punkt x_0 von F_0 entspricht der Richtung in E , die von dem x_0 entsprechenden Punkt x nach dem Nullpunkt zeigt, und die in B) genannte offene Linie ist die Ueberlagerung des Kreises mit dem Radius a um den Nullpunkt in E .

Nun schließen wir indirekt weiter: angenommen, F_0 wäre auf ein echtes Teilgebiet G einer Fläche H eineindeutig und isometrisch abgebildet, dann hätte G einen Randpunkt z und z eine Umgebung U von der Art, daß man je zwei ihrer Punkte durch einen und nur einen geodätischen kürzesten Bogen verbinden kann¹⁵⁾. Ist dann z' ein von z verschiedener Punkt in U , x ein zu G gehöriger Punkt von U , der nicht auf der durch die kürzeste Verbindung zz' bestimmten geodätischen Linie liegt, so sind die Richtungen der kürzesten Verbindungen xz und xz' voneinander verschieden; da man auf dem durch die erste Richtung bestimmten geodätischen Strahl die Länge xz nicht innerhalb G abtragen kann, kann man nach A) auf dem durch die zweite Richtung bestimmten Strahl jede Länge innerhalb G abtragen; folglich gehört z' zu G . Mithin müßten alle Punkte von U außer z zu G gehören. a sei nun eine so kleine positive Zahl, daß man die Länge a auf den von z ausgehenden geodätischen Strahlen innerhalb U abtragen kann. Die sich dabei ergebenden Punkte haben die Eigenschaft, daß man von ihnen aus nicht in jeder Richtung auf den geodätischen Strahlen die Länge a abtragen kann und daß a die kleinste derartige Länge ist; da sie, wie wir eben sahen, zu G gehören, müßten sie also nach B) einer einfachen offenen Linie angehören. Andererseits bilden sie aber eine einfach geschlossene Linie, da zu jeder von z ausgehenden Richtung genau eine von ihnen gehört. Aus diesem Widerspruch folgt die Falschheit der Annahme, daß F_0 fortsetzbar sei.

F_0 hat also die in Satz III a ausgesagten Eigenschaften. Andere, ähnliche Flächen F_{-1} und F_{+1} mit den gleichen Eigenschaften erhält man, indem man statt der euklidischen Ebene E eine hyperbolische Ebene H oder eine Kugel S zugrunde legt. Im ersten Fall bleiben die vorstehenden Ueberlegungen wörtlich ungeändert, und man gelangt zu einer Fläche F_{-1} , die konstantes negatives Krümmungsmaß besitzt, nicht fortsetzbar ist und auf der man nicht je zwei Punkte durch eine kürzeste Linie verbinden kann. Im zweiten, sphärischen Fall hat man nur geringfügige Modifikationen vorzunehmen: S' entsteht durch Herausnahme von *zwei* Punkten aus S , und F_{+1} ist die universelle Ueberlagerungsfläche von S' ; in der oben unter B) formulierten Eigenschaft treten an Stelle einer offenen Linie zwei zueinander fremde offene Linien auf. Im übrigen

bleibt aber alles unverändert, und man gelangt zu einer Fläche F_{+1} , die konstantes positives Krümmungsmaß besitzt, nicht fortsetzbar ist, und auf der man nicht je zwei Punkte durch eine kürzeste Linie verbinden kann. Auch F_{+1} ist, ebenso wie F_0 und F_{-1} , als universelle Ueberlagerungsfläche des zweifach zusammenhängenden ebenen Gebietes homöomorph der Ebene.

10. *Weitere Bemerkungen über vollständige und nicht-fortsetzbare Flächen.* Es ist nunmehr festgestellt, daß die Klasse \mathfrak{F}_0 der nicht-fortsetzbaren Flächen tatsächlich mehr Flächen umfaßt als die Klasse \mathfrak{F}_1 der vollständigen Flächen, und daß der Satz von der Verbindbarkeit je zweier Punkte durch eine kürzeste Linie — also einer der Hauptsätze der Differentialgeometrie im Großen — zwar innerhalb der Klasse \mathfrak{F}_1 , aber nicht ausnahmslos innerhalb der Klasse \mathfrak{F}_0 Gültigkeit besitzt. Ähnlich verhält es sich bei anderen Fragen der Differentialgeometrie im Großen, und zwar soll hier auf diejenigen Fragen hingewiesen werden, die sich auf den *Zusammenhang der Eigenschaften „im Kleinen“ mit denen „im Großen“* beziehen. Die einfachsten, und bereits klassischen, hierhergehörigen Sätze sind die über die euklidischen und nicht-euklidischen „Raumformen“, d. h. die Flächen konstanter Krümmung. Der Hauptsatz aus diesem Kreis lautet:

Satz IV: Die einzigen vollständigen, einfach zusammenhängenden Flächen konstanter Krümmung sind die euklidische Ebene, die hyperbolische Ebene und die Kugel.

Sowohl der Beweis dieses Satzes darf als bekannt gelten wie die Tatsache, daß man weiter durch Untersuchung der Bewegungsgruppen in den drei genannten Geometrien zu der Aufzählung aller, auch der mehrfach zusammenhängenden, vollständigen Flächen konstanter Krümmung gelangt¹⁷⁾.

Beim Beweise des Satzes IV muß die Eigenschaft der „Vollständigkeit“ in irgend einer Form benutzt werden; die „Nicht-Fortsetzbarkeit“ ist für die Gültigkeit des Satzes eine zu schwache Voraussetzung. Denn aus der Existenz der in Nr. 9 betrachteten Flächen F_0 , F_{-1} , F_{+1} ist ersichtlich:

Satz IVa: Es gibt außer den in Satz IV genannten drei Flächen noch andere einfach zusammenhängende nicht-fortsetzbare Flächen kon-

¹⁷⁾ Beweise dieser im wesentlichen von *Klein* und *Killing* stammenden Sätze, findet man in der unter ⁵⁾ genannten Arbeit von Koebe und in der unter ⁷⁾ genannten Arbeit von Hopf.

stanter Krümmung, und zwar sowohl für verschwindende wie für negative wie für positive Krümmung¹⁸⁾).

Insbesondere sei die folgende, durch die Existenz von F_{+1} bewiesene Tatsache hervorgehoben:

Satz IVb: Es gibt offene, nicht-fortsetzbare Flächen konstanter positiver Krümmung.

Dagegen sind die einzigen vollständigen Flächen konstanter positiver Krümmung bekanntlich die Kugel und die elliptische Ebene¹⁷⁾; diese Tatsache kann man dadurch noch wesentlich verschärfen, daß man die Voraussetzung der Konstanz der Krümmung durch eine schwächere ersetzt. Es gilt nämlich

Satz V: Eine vollständige Fläche, deren Krümmung überall größer als eine positive Konstante ist, ist geschlossen.

*Beweis*¹⁹⁾: Ist auf der Fläche F die Krümmung überall größer als die positive Konstante $\frac{1}{k^2}$, so liegt — infolge eines bekannten Sturmschen Satzes — auf jedem geodätischen Bogen, der länger als πk ist, ein zum Anfangspunkt des Bogens konjugierter Punkt; folglich ist ein Bogen der angegebenen Länge nicht kürzeste Verbindung zwischen seinen Endpunkten.

Ist nun F vollständig, und sind a, b beliebige Punkte auf F , so gibt es nach Satz III einen kürzesten geodätischen Weg von a nach b ; da dessen Länge nach dem eben Gesagten $\leq \pi k$ ist, ist $\rho(a, b) \leq \pi k$; da a, b willkürlich sind, hat F einen endlichen Durchmesser, ist also, als metrischer Raum betrachtet, beschränkt und mithin, da das Kompaktheitspostulat erfüllt ist, kompakt, d. h. geschlossen.

Aus dem Beweise ergibt sich unmittelbar folgender

*Zusatz 1*²⁰⁾: Ist die Krümmung der vollständigen Fläche F überall $\geq \frac{1}{k^2} > 0$, so ist der Durchmesser von F höchstens πk .

¹⁸⁾ Wie man alle, auch die nicht vollständigen, Flächen konstanter Krümmung bestimmen kann, geht aus der demnächst in der „Mathematischen Zeitschrift“ erscheinenden Arbeit von W. Rinow, Ueber Zusammenhänge zwischen der Differentialgeometrie im Großen und im Kleinen (§ 2, Bemerkung zum Satz 3) hervor.

¹⁹⁾ Man vergl. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I (1921), § 84: Satz von Bonnet über den Durchmesser einer Eifläche. Unser Beweis ist mit dem dortigen fast identisch; jedoch setzt letzterer gerade die von uns zu beweisende Geschlossenheit der Fläche voraus.

²⁰⁾ Man vergl. die unter ¹⁹⁾ zitierte Stelle, beachte aber den Unterschied in der Definition des Durchmessers: dort wird er mittels der räumlichen Entfernung, bei uns mittels des Entfernungsbegriffs auf der Fläche erklärt.

Ferner gilt der

Zusatz 2: Eine vollständige Fläche, deren Krümmung überall größer als eine positive Konstante ist, ist entweder der Kugel oder der projektiven Ebene homöomorph.

Denn nach Satz V muß die Fläche geschlossen, und nach dem bekannten Satz über die *Curvatura integra* geschlossener Flächen²¹⁾ muß ihre Eulersche Charakteristik positiv sein; die einzigen Flächen mit positiver Charakteristik sind die beiden genannten.

Der Satz V mit seinen Zusätzen einerseits, der Satz IV b andererseits zeigen zur Genüge, daß bei den vollständigen Flächen der Einfluß der differentialgeometrischen Eigenschaften „im Kleinen“ auf die Gestalt der Fläche „im Großen“ wesentlich stärker ist als im allgemeinen bei den nicht-fortsetzbaren Flächen; diese Tatsache wird besonders in einer nächstens erscheinenden Arbeit von W. Rinow weitere Bestätigungen finden²²⁾.

²¹⁾ *Blaschke*, a. a. O., § 64.

²²⁾ Wie unter ¹⁸⁾; besonders die Sätze 2 und 11 sowie die auf Satz 2 bezüglichen Bemerkungen in der Einleitung.

(Eingegangen den 8. Juli 1931)