

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 3 (1931)

**Artikel:** Sur les périodes des intégrales de première espèce attachée à une variété algébrique.  
**Autor:** Rham, Georges de  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-4683>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur les périodes des intégrales de première espèce attachées à une variété algébrique

par GEORGES DE RHAM, Lausanne

Dans son Mémoire sur les fonctions abéliennes, Riemann a établi, relativement aux périodes des intégrales de première espèce, des formules importantes que M. W. V. D. Hodge<sup>1)</sup> a étendues récemment au cas des intégrales  $n^{\text{uples}}$  attachées à une variété algébrique à  $n$  dimensions. Je vais montrer ici que ces formules peuvent se déduire rapidement d'un théorème de ma thèse<sup>2)</sup>.

1. Rappelons d'abord quelques propriétés d'Analysis situs relatives à une variété close et orientable  $V$ , à un nombre pair  $2n$  de dimensions. Soient

$$c_1, c_2, \dots, c_r$$

un système fondamental de cycles (ou champs d'intégration fermés) à  $n$  dimensions et

$$F(x, y) = \sum_{i, k} a_{i, k} x_i y_k$$

le nombre d'intersections (indice de Kronecker) des deux cycles

$$c = \sum_i x_i c_i \quad \text{et} \quad \sum_i y_i c_i.$$

$F(x, y)$  est une forme bilinéaire, à coefficients entiers, symétrique pour  $n$  pair, alternée pour  $n$  impair et son discriminant vaut  $\pm 1$ .

Soit maintenant  $\omega$  l'élément d'une intégrale multiple d'ordre  $n$ , régulière en tout point de  $V$  et satisfaisant aux conditions d'intégrabilité. On peut trouver des nombres  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) tels que

$$\int_c \omega = F(x, \xi) \quad \text{quels que soient les } x.$$

Ces nombres  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$  sont d'ailleurs les périodes de  $\omega$  relativement à des cycles  $d_1, d_2, \dots, d_r$  qui forment un autre système fondamental.

<sup>1)</sup> Journal of the London Math. Soc., October 1930, p. 283.

<sup>2)</sup> Journal de math. pures et appl. 1931 (sous presse).

Soit  $w$  un autre élément d'intégrale analogue à  $\omega$ ,  $\eta_i$  sa période relative à  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Le produit extérieur  $w\omega$  donne une intégrale d'ordre  $2n$ , et l'on a l'égalité fondamentale

$$(1) \quad \int_V w\omega = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} F(\xi, \eta).$$

Cette égalité est un cas particulier d'un théorème, qu'on trouvera dans ma thèse (§ 27), qui permet de calculer les périodes d'une intégrale égale au produit de deux autres lorsqu'on connaît les périodes de ces dernières et les tableaux d'intersections de la variété.

2. Considérons maintenant une variété algébrique, à  $n$  dimensions complexes et à *singularités ordinaires*. Il lui correspond une variété close et orientable  $V$ , à  $2n$  dimensions réelles, à laquelle on peut appliquer ce qui précède.

Quel que soit le point  $M$  de  $V$ , on peut trouver un système de coordonnées curvilignes complexes,  $z_j = x_j + iy_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), valable dans un domaine contenant  $M$ . Une intégrale  $n^{\text{up}}\text{le}$  est analytique et régulière en  $M$ , si, au voisinage de  $M$ , son élément est de la forme

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_1 dz_2 \dots, dz_n,$$

$f$  étant holomorphe en  $M$ . Les conditions d'intégrabilité sont automatiquement vérifiées, et le produit de deux tels éléments est toujours nul (cela découle tout de suite des propriétés des formes différentielles extérieures).

Cela posé, supposons que, dans l'égalité (1),  $\omega$  et  $w$  soient des éléments d'intégrales analytiques et régulières en tout point de  $V$ , c'est-à-dire des intégrales de première espèce; l'égalité donne

$$(2) \quad F(\xi, \eta) = 0.$$

Supposons en second lieu que  $w$  soit l'intégrale imaginaire conjuguée (non analytique!) de l'intégrale de première espèce  $\omega$ , et soit, au voisinage de  $M$ ,

$$\omega = f(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n, \quad w = \bar{f}(z_1, \dots, z_n) \bar{dz}_1 \dots \bar{dz}_n;$$

un calcul simple nous donne

$$w\omega = i^{n^2} 2^n |f|^2 dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n.$$

Si l'élément de volume  $dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n$  est positif, ce que nous pouvons supposer, il sera encore positif, comme on sait, pour tout autre système de coordonnées complexes et quel que soit le point  $M$ . On voit alors que l'intégrale au premier membre de (1), débarrassée du facteur  $i^{n^2}$ , est essentiellement positive et (1) nous donne en définitive

$$(3) \quad i^n F(\xi, \bar{\xi}) > 0.$$

3. La relation (2) et l'inégalité (3), obtenues pour la première fois par Riemann pour  $n = 1$  et par M. Hodge pour  $n$  quelconque (il n'a toutefois donné (3) que pour  $n$  impair), donnent lieu à diverses conséquences, classiques pour  $n = 1$ . Sans y insister, terminons par une remarque sur leurs démonstrations. La partie importante consiste au fond à établir l'égalité (1), bien que ni Riemann, ni M. Hodge, ne l'aient énoncée explicitement. L'idée essentielle de M. Hodge (voir le paragraphe 4 de son Mémoire) peut même fournir une démonstration différente de la mienne et peut-être plus simple du théorème général dont (1) n'est qu'un cas très particulier.

(Reçu le 8 mai 1931)