

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 3 (1931)

**Artikel:** Sur les valeurs moyennes des fonctions réelles définies pour toutes les valeurs de la variable.  
**Autor:** Plancherel, M. / Pólya, G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-4680>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur les valeurs moyennes des fonctions réelles définies pour toutes les valeurs de la variable

Par M. PLANCHEREL et G. PÓLYA, Zurich

1. Soit  $f(x)$  une fonction réelle, définie pour toutes les valeurs réelles de la variable  $x$  et intégrable, p. ex. au sens de M. Lebesgue, dans tout intervalle fini. Si la limite

$$(I) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{x-R}^{x+R} f(u) du = \varphi(x)$$

existe, nous la nommerons la *valeur moyenne de  $f(x)$  au point  $x$* . En général, la valeur moyenne n'existe en aucun point; et si elle existe en un point particulier, elle peut ne pas exister en d'autres points. (P. ex. le point  $x = 0$  joue un rôle exceptionnel pour la fonction impaire  $f(x) = \frac{d}{dx} [(e^x + e^{-x}) \cos x]$ .)

*Si la valeur moyenne existe pour toutes les valeurs de  $x$ , elle est forcément une **fonction linéaire** de  $x$ .*

Nous avons été amenés à ce théorème qui nous paraît curieux, par des considérations sur la théorie de la chaleur; nous exposerons ces considérations, en leur laissant leur caractère heuristique, au n° 2. La démonstration rigoureuse utilise un théorème de M. Baire sur les fonctions qui sont limites de fonctions continues; elle sera donnée au n° 3. Enfin, au n° 4, nous ferons quelques remarques sur le problème analogue pour les fonctions de plusieurs variables.

2. Envisageons la propagation de la chaleur dans un corps homogène et isotrope. La température est une fonction des coordonnées rectangulaires  $x, y, z$  et du temps  $t$ ; désignons-la par

$$U = U(x, y, z; t)$$

et écrivons l'équation de la propagation de la chaleur sous la forme

$$(2) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial U}{\partial t},$$

en faisant un choix convenable d'unités.

Si nous envisageons le mouvement de la chaleur dans un corps illimité, l'allure des solutions sera bien différente de celle que nous rencontrons en observant des corps de dimensions finies plongés dans un milieu de température constante. D'abord, une solution, existant pour  $t = 0$ , peut cesser d'exister au bout d'un laps de temps fini, comme dans l'exemple

$$U = \frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{\frac{x^2-t}{2(1-t)}} \cos \frac{x}{1-t}$$

pour  $t = 1$ . Puis, une solution, existant pour  $t \geq 0$ , peut ne tendre vers aucune limite définie pour  $t \rightarrow \infty$ , comme dans l'exemple

$$U = e^x \cos (x + t).$$

Mais, si nous supposons que

$$U(x, y, z; 0) = f(x, y, z)$$

croît moins vite que  $e^{\varepsilon(x^2+y^2+z^2)}$  pour  $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$  quel que soit le nombre positif  $\varepsilon$ , il existe une solution pour  $t \geq 0$ , à savoir celle donnée par Laplace

$$(3) \quad U = (2\pi t)^{-\frac{3}{2}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2+v^2+w^2}{2t}} f(x+u, y+v, z+w) du dv dw.$$

Puis si nous supposons que la température initiale a une valeur moyenne en chaque point, c. à. d. qu'en posant

$$\frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq R^2} f(x+u, y+v, z+w) du dv dw = f_R(x, y, z)$$

$$(4) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} f_R(x, y, z) = \varphi(x, y, z)$$

existe pour chaque système de valeurs  $x, y, z$ , il est facile de voir que

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} U(x, y, z; t) = \varphi(x, y, z);$$

pour la démonstration on écrira (3) sous la forme

$$U(x, y, z; t) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2t}} r^2 f_r(x, y, z) dr$$

et on utilisera (4) en faisant usage de raisonnements familiers. Nous pouvons exprimer (5) en disant qu'il existe une distribution limite de la température.

Il est naturel de penser que cette distribution limite correspond à un état stationnaire de température, c. à. d. qu'elle satisfait à l'équation de Laplace qu'on obtient de (2) en remplaçant le second membre par zéro. C'est ainsi que nous avons été amenés à penser que de la seule hypothèse de l'existence de la valeur moyenne (4) on pourrait conclure que cette valeur moyenne est forcément une fonction *harmonique* dans tout l'espace. Voici le théorème qui, spécialisé pour le cas d'une dimension, donne la proposition énoncée au n° 1. Il nous semble qu'en rendant rigoureux le raisonnement intuitif précédent on devrait introduire des hypothèses supplémentaires; pour les éviter nous choisissons une toute autre voie.

3. Observons que pour un intégrand quelconque

$$\int_{(x-h)-R}^{(x-h)+R} + \int_{(x+h)-R}^{(x+h)+R} = \int_{x-(R+h)}^{x+(R+h)} + \int_{x-(R-h)}^{x+(R-h)}.$$

Appliquons cela à la fonction  $f(x)$ , divisons les deux membres par  $2R$  (ou  $2(R+h)$  ou  $2(R-h)$ ), fixons  $x$  et  $h$  et faisons tendre  $R$  vers  $+\infty$ ; nous obtenons à la limite, en vertu de (1),

$$\varphi(x-h) + \varphi(x+h) = 2\varphi(x).$$

C'est l'équation fonctionnelle des fonctions linéaires; en changeant les variables, on peut l'écrire aussi

$$(6) \quad \varphi(x) + \varphi(y) = 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

En posant

$$(7) \quad \varphi(x) - \varphi(0) = \psi(x),$$

nous aurons pour  $\psi(x)$  une équation correspondante à (6) et en outre  $\psi(0) = 0$ , d'où on tire

$$\psi(x) = 2 \psi\left(\frac{x}{2}\right),$$

donc

$$(8) \quad \psi(x) + \psi(y) = \psi(x + y).$$

C'est l'équation à laquelle satisfont les fonctions linéaires homogènes  $\psi(x) = cx$ ,  $c$  constante. On sait d'ailleurs <sup>1)</sup> que chaque fonction  $\psi(x)$ , qui satisfait à (8) sans être linéaire, est discontinue en chaque point  $x$  (et même en chaque point  $x$  sa borne supérieure est  $+\infty$  et sa borne inférieure  $-\infty$ ).

Mais, en vertu de (7) et (1),  $\psi(x)$  est la limite des fonctions continues

$$\psi_n(x) = -\varphi(0) + \frac{1}{2n} \int_{x-n}^{x+n} f(u) du \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

l'intégrale étant une fonction continue de ses limites. Donc, en vertu d'un théorème fondamental de M. Baire <sup>2)</sup>, l'ensemble des points de discontinuité de  $\psi(x)$  n'a pas de point intérieur. Ainsi  $\psi(x)$ , ne pouvant être une solution discontinue de l'équation (8), en est une solution continue, donc linéaire, c. q. f. d.

4. Alors que pour les fonctions d'une seule variable il nous a suffi de supposer l'existence de la moyenne en chaque point, nous n'avons réussi à traiter le cas des fonctions de plusieurs variables qu'en faisant une hypothèse supplémentaire dont la nécessité reste problématique. Nous nous bornerons à étudier les fonctions de deux variables; le cas général de  $n$  variables se traiterait d'une manière analogue.

Soit  $f(x, y)$  une fonction réelle, définie pour toutes les valeurs réelles des variables  $x, y$  et intégrable au sens de Lebesgue dans tout domaine borné. Si la valeur moyenne de  $f$  dans un cercle de rayon  $R$  et de centre  $(x, y)$

<sup>1)</sup> G. Hamel, Mathem. Annalen 60 (1905) 459—462.

<sup>2)</sup> R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues (Paris, 1905).

$$(9) \quad f_R(x, y) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} f(x + r \cos \delta, y + r \sin \delta) r dr d\delta$$

a une limite

$$(10) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} f_R(x, y) = \varphi(x, y)$$

nous appellerons  $\varphi(x, y)$  la *valeur moyenne* de  $f$  au point  $(x, y)$ .

Si la valeur moyenne  $\varphi(x, y)$  existe pour toutes les valeurs de  $(x, y)$ , et si, de plus, il existe une fonction positive  $\psi(x, y)$ , intégrable dans tout domaine borné et une fonction positive  $R_0(x, y)$ , bornée dans tout domaine borné, telles que

$$(11) \quad |f_R(x, y)| \leq \psi(x, y), \text{ pour } R \geq R_0(x, y),$$

alors  $\varphi(x, y)$  est une fonction harmonique régulière dans le plan.

Nous établirons cette proposition en montrant que  $\varphi(x, y)$  vérifie partout l'équation fonctionnelle des fonctions harmoniques

$$(12) \quad \frac{1}{\pi \rho^2} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \varphi(x + r \cos \delta, y + r \sin \delta) r dr d\delta = \varphi(x, y).$$

L'intégrale double de  $\varphi$  étant une fonction d'ensemble absolument continue, toute fonction  $\varphi$ , qui vérifie (12) dans tout le plan, est partout continue. De plus, si elle diffère d'une constante, elle ne peut avoir ni maximum ni minimum dans aucun domaine ouvert. Si donc  $K$  est un cercle quelconque et  $\varphi^*$  la fonction harmonique régulière dans  $K$ , qui prend sur le contour de  $K$  les mêmes valeurs que  $\varphi$ , la fonction  $\varphi - \varphi^*$  est continue dans  $K$  et sur son contour; elle satisfait dans  $K$  à l'équation fonctionnelle, est nulle sur le contour de  $K$ , n'a donc pas d'extrémum différent de zéro dans  $K$ . Elle est donc identiquement nulle dans  $K$ . Ceci montre que toute fonction  $\varphi$ , qui vérifie (12) partout, est harmonique régulière dans tout le plan.

La fonction  $f_R(x, y)$  définie par (9) est une fonction continue de  $(x, y)$ , car l'intégrale double de  $f$  est une fonction d'ensemble absolument continue. De l'hypothèse de l'existence de  $\varphi(x, y)$  partout, il résulte que c'est une fonction mesurable, puisque limite de fonctions continues; de (11) découle que  $\varphi$  est intégrable dans tout domaine borné  $D$  et que

(13)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_D f_R(x, y) dx dy = \iint_D \lim_{R \rightarrow \infty} f_R(x, y) dx dy = \iint_D \varphi(x, y) dx dy.$$

Pour établir l'équation fonctionnelle (12) partons de l'expression

$$(14) \quad \mathcal{F}(R) = \frac{1}{\pi \rho^2} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} f_R(x + r \cos \delta, y + r \sin \delta) r dr d\delta$$

dont la limite pour  $R \rightarrow \infty$  est, en vertu de (13), le premier membre de (12). En transformant cette expression, nous verrons que sa limite est aussi égale au second membre de (12). En remplaçant dans (14)  $f_R$  par sa valeur (9),  $\mathcal{F}(R)$  devient l'intégrale quadruple

$$\frac{1}{\pi \rho^2 \cdot \pi R^2} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} f(x + r \cos \delta + s \cos \theta, y + r \sin \delta + s \sin \theta) r s dr d\delta ds d\theta.$$

Introduisons deux nouvelles variables  $t, \chi$  définies par

$$(15) \quad \begin{aligned} t \cos \chi &= r \cos \delta + s \cos \theta \\ t \sin \chi &= r \sin \delta + s \sin \theta \end{aligned}$$

et effectuons dans l'intégrale quadruple un changement de variables, en prenant  $r, \delta, t, \chi$  comme nouvelles variables indépendantes. Le déterminant fonctionnel  $\frac{\partial(r, \delta, s, \theta)}{\partial(r, \delta, t, \chi)}$  est égal à  $\frac{t}{s}$ . Donc,

$$\mathcal{F}(R) = \frac{1}{\pi \rho^2 \cdot \pi R^2} \int_0^{R+\rho} \int_0^{2\pi} t dt d\chi f(x + t \cos \chi, y + t \sin \chi) \iint_{D(t, \chi)} r dr d\delta,$$

en désignant par  $D(t, \chi)$  la multiplicité à deux dimensions formée des points  $(r, \delta, s, \theta)$  de l'espace à 4 dimensions qui appartiennent au domaine fermé

$$(16) \quad 0 \leq r \leq \rho, \quad 0 \leq \delta \leq 2\pi, \quad 0 \leq s \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

et pour lesquels les quantités  $t, \chi$  définies par (15) ont les valeurs données. L'interprétation géométrique des relations (15) et (16) dans un système de coordonnées polaires montre que  $D(t, \chi)$  s'obtient en prenant les points de coordonnées polaires  $(r, \delta)$  qui appartiennent à la fois au cercle  $(0 \leq r \leq \rho, 0 \leq \delta \leq 2\pi)$  de rayon  $\rho$  et de centre à l'origine et au cercle  $(0 \leq s \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$  de rayon  $R$  et de centre au point de coordonnées polaires  $(t, \chi)$ . Comme  $r dr d\delta$  est précisément l'élément d'aire en coordonnées polaires,  $\iint_{D(t, \chi)} r dr d\delta$  est l'aire de la partie commune aux deux cercles. Cette aire est indépendante de  $\chi$ . Désignons-la par  $S(t)$ . On a

$$S(t) = \pi \rho^2, \quad 0 \leq t \leq R - \rho.$$

$S(t)$  est continue et décroissante dans  $R - \rho \leq t \leq R + \rho$ ; elle est nulle pour  $t = R + \rho$ .

$\mathcal{F}(R)$  se décompose ainsi en deux parties

$$\mathcal{F}_1(R) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{R-\rho} \int_0^{2\pi} f(x + t \cos \chi, y + t \sin \chi) t dt d\chi,$$

$$\mathcal{F}_2(R) = \frac{1}{\pi \rho^2 \cdot \pi R^2} \int_{R-\rho}^{R+\rho} \int_0^{2\pi} f(x + t \cos \chi, y + t \sin \chi) S(t) t dt d\chi.$$

$\mathcal{F}_1(R)$  est égale à  $\left(\frac{R-\rho}{R}\right)^2 f_{R-\rho}(x, y)$  et tend vers  $\varphi(x, y)$  lorsque  $R \rightarrow \infty$ .

Pour calculer  $\mathcal{F}_2(R)$  introduisons la fonction

$$F(t) = \int_0^{2\pi} f(x + t \cos \chi, y + t \sin \chi) d\chi$$

qui, en vertu d'un théorème de Fubini, existe presque partout, est intégrable et telle que

$$\int_\alpha^\beta F(t) t dt = \int_\alpha^\beta \int_0^{2\pi} f(x + t \cos \chi, y + t \sin \chi) t dt d\chi, \quad 0 \leq \alpha < \beta.$$

Le second théorème de la moyenne donne

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(R) &= \frac{1}{\pi \rho^2 \cdot \pi R^2} \int_{R-\rho}^{R+\rho} S(t) F(t) t dt \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{R-\rho}^{\xi} F(t) t dt, \quad R - \rho \leq \xi \leq R + \rho \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(R) &\leq \frac{1}{\pi R^2} \text{maximum}_{R-\rho \leq \xi \leq R+\rho} \left| \int_0^{\xi} F(t) t dt - \int_0^{R-\rho} F(t) t dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi R^2} \text{maximum}_{R-\rho \leq \xi \leq R+\rho} | \pi \xi^2 f_{\xi}(x, y) - \pi (R - \rho)^2 f_{R-\rho}(x, y) |. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{F}_2(R) = 0$ , c'est-à-dire  $\lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{F}(R) = \varphi(x, y)$ .  $\varphi$  est donc une solution de l'équation fonctionnelle (12).

(Reçu le 20 mars 1931)