Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 3 (1931)

Artikel: Ueber das Hurwitzsche Problem der Bestimmung der Anzahl

Riemannscher Flächen von gegebener Verzweigungsart.

Autor: Weyl, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4679

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ueber das Hurwitzsche Problem der Bestimmung der Anzahl Riemannscher Flächen von gegebener Verzweigungsart

Von H. WEYL, Göttingen (Aus einem Briefe an Herrn W. Saxer, Zürich)

Für die von der mathematisch-physikalischen Abteilung der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich vorbereitete Ausgabe der mathematischen Abhandlungen von A. Hurwitz hatten Sie mir die Arbeit Math. Ann. 39: Ueber Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten, zur Durchsicht überwiesen. Ich bemerkte sogleich, daß mit den heute zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln der Gruppencharaktere die Aufgabe der Anzahlbestimmung durchsichtiger, allgemeiner und vollständiger gelöst werden könne, als es Hurwitz damals, 1891, gelungen war. Erst nachträglich wurde ich darauf aufmerksam, daß Hurwitz selbst die Gruppencharaktere, nachdem ihre Theorie von Frobenius entwickelt worden war, auf sein Problem angewandt hat: Math. Ann. 55, 1902, S. 53. Jedoch kommt man zu den durchsichtigsten Formeln erst, wenn man alle Klassen simultan behandelt und nicht, wie das Hurwitz tut, sich auf den Fall einfacher Verzweigungen, d. i. die Klasse der Transpositionen beschränkt. Gestatten Sie mir, Ihnen diese Formeln hier samt ihrer Begründung kurz zusammenzustellen.

I. \mathfrak{g} sei die symmetrische Gruppe der Permutationen von n Ziffern, h ihre Ordnung = n!. Es seien Klassen \mathfrak{f}_1 , \mathfrak{f}_2 , ..., \mathfrak{f}_w konjugierter Elemente von \mathfrak{g} in der Anzahl w und in bestimmter Reihenfolge vorgegeben. Solange man von der Forderung absieht, daß die n-blättrige Riemannsche Fläche zusammenhängend sein soll, und ferner absieht von der Willkürlichkeit der Numerierung der n Blätter, ist die von Hurwitz gesuchte Anzahl keine andere als die Anzahl N der Lösungen der Gleichung

$$(1) S_1 S_2 \dots S_m = 1,$$

wenn für das Element s_i von \mathfrak{g} vorgeschrieben ist, da \mathfrak{G} es der Klasse \mathfrak{k}_i entnommen werden soll. Diese Fragestellung enthält nichts, was sie an die spezielle symmetrische Permutationsgruppe \mathfrak{g} bindet; sie sei

darum hier behandelt für eine beliebige endliche abstrakte Gruppe g. Die Anzahl der Lösungen von

$$s_1 s_2 \dots s_m = s$$
, s_i in f_i ,

heiße N_s . Sie ist offenbar nur abhängig von der Klasse \mathfrak{k} , welcher s angehört, und werde darum in ihrer Abhängigkeit von \mathfrak{k} mit $N(\mathfrak{k})$ bezeichnet. Denn aus einer Lösung für s erhält man eine solche für das konjugierte Element $r^{-1} s r$, indem man jedes s_i durch das entsprechende $r^{-1} s_i r$ ersetzt.

Ist $s \to U(s)$ eine irreduzible Darstellung des Grades g und vom Charakter $\chi(s) = \chi(f)$, so ist die über alle Elemente t einer Klasse f erstreckte Summe der U(t) ein Multiplum $\zeta(f) \cdot E$ der Einheitsmatrix E, weil sie mit allen U(s) vertauschbar ist:

(2)
$$\sum_{t \text{ in } f} U(t) = \zeta(f) \cdot E.$$

Bedeutet n(f) die Anzahl der Elemente t in f, so liefert die Spur der Gleichung (2) sofort als den Wert des Proportionalitätsfaktors

$$\zeta(\mathbf{f}) = \frac{n(\mathbf{f}) \chi(\mathbf{f})}{g}.$$

Bildet man die Summe

$$\sum U(s_1 s_2 \ldots s_w) = \sum U(s_1) U(s_2) \ldots U(s_w),$$

in welcher die s_i unabhängig voneinander je ihre Klasse f_i durchlaufen, so erhält man rechts die Einheitsmatrix, multipliziert mit dem Faktor $\zeta(f_1)$ $\zeta(f_2)$... $\zeta(f_w)$, links aber

$$\sum_{s} N_{s} \cdot U(s) = \sum_{f} N(f) \cdot \zeta(f) E.$$

Folglich ist

$$\frac{1}{g}\sum_{\mathbf{f}}n\left(\mathbf{f}\right)\chi\left(\mathbf{f}\right)N\left(\mathbf{f}\right)=\zeta\left(\mathbf{f}_{i}\right)\ldots\zeta\left(\mathbf{f}_{w}\right).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $g \cdot \chi(\mathbf{f}^{-1})$ und summiert alsdann über alle primitiven Charaktere χ , so ergibt sich wegen der Vollständigkeitsrelation für die Charaktere:

$$N(\mathbf{f}) = \frac{1}{h} \sum_{\mathbf{X}} \left\{ g \chi(\mathbf{f}^{-1}) \cdot \prod_{i} \zeta(\mathbf{f}_{i}) \right\},$$

insbesondere

(3)
$$\frac{N}{h} = \sum_{\chi} \left(\frac{g}{h}\right)^2 \zeta(\tilde{\mathbf{f}}_1) \dots \zeta(\tilde{\mathbf{f}}_w) .$$

Die Zahlen $\zeta(\mathfrak{k})$ sind stets ganz algebraisch.

2. Dies Ergebnis werde spezialisiert für die symmetrische Permutationsgruppe \mathfrak{g} der Ordnung h=n!. Hier gehört jede irreduzible Darstellung zu einem Symmetrieschema, dessen Zeilenlängen v_i den Bedingungen genügen

(4)
$$\nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots, \quad \nu_1 + \nu_2 + \ldots = n.$$

Ist c mit den Komponenten c(s) der zugehörige Youngsche Symmetrieoperator 1), so ist

$$\chi(s) = \frac{g}{n!} \sum_{r} c(r^{-1} s r) \quad \text{oder} \quad \chi(\mathfrak{f}) = \frac{g}{n(\mathfrak{f})} \cdot \sum_{t \text{ in } \mathfrak{f}} c(t),$$
$$\zeta(\mathfrak{f}) = \sum_{t \text{ in } \mathfrak{f}} c(t).$$

Der Grad g des Charakters berechnet sich aus der über alle n! Permutationen s zu erstreckenden Summe

$$\frac{n!}{g} = \sum_{s} c(s) c(s^{-1}).$$

Hurwitz interessiert sich für den Fall, daß $\mathfrak{k}_1 = \ldots = \mathfrak{k}_w = \mathfrak{k}$ die Klasse der Transpositionen ist. Für eine Transposition s ist c(s) = +1 oder -1, je nachdem sie zwei Ziffern in derselben Zeile oder in derselben Spalte vertauscht, sonst aber = 0. Werden die Spaltenlängen des Schemas mit ν_1^* , ν_2^* , ... bezeichnet, so ist darum $\zeta(\mathfrak{k})$ für die Klasse \mathfrak{k} der Transpositionen gleich

$$\zeta = \left\{ \frac{\nu_1 (\nu_1 - 1)}{2} + \frac{\nu_2 (\nu_2 - 1)}{2} + \ldots \right\} - \left\{ \frac{\nu_1^* (\nu_1^* - 1)}{2} + \frac{\nu_2^* (\nu_2^* - 1)}{2} + \ldots \right\}.$$

¹⁾ H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2. Aufl., 1931, S. 315.

Zu jedem Schema gehört ein duales, das aus ihm durch die Vertauschung der Zeilen mit den Spalten entsteht, demnach zu jedem primitiven Charakter χ ein dualer χ^* , derart daß

$$\chi^*(\mathbf{f}) = \operatorname{sgn}(\mathbf{f}) \cdot \chi(\mathbf{f}), \quad g^* = g$$

gilt; sgn (f) ist = \pm 1, je nachdem die Klasse aus geraden oder ungeraden Permutationen besteht. Die Formel (3) ergibt daher N= 0, außer wenn

$$\prod_{i=1}^{w} \operatorname{sgn}(\mathbf{f}_{i}) = +1$$

ist. Diese Tatsache wird gewöhnlich in der Form ausgesprochen, daß die gesamte Verzweigungszahl gerade sein muß.

Die eleganteste Berechnung der Charaktere der Permutationsgruppe resultiert nach *Frobenius* aus ihrer Verbindung mit der kontinuierlichen Gruppe aller linearen Transformationen. 2) Von einer festen Anzahl ϱ von Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho}$ stellt man sich die Potenzsummen her

$$\sigma_m = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_p^m.$$

Besteht die Klasse f aus denjenigen Permutationen, die k_1 ziffernfremde Zykeln der Ordnung 1, k_2 der Ordnung 2, ... enthalten $(1 k_1 + 2 k_2 + ... = n)$, so setze man

$$\sigma\left(\mathbf{f}\right) = \sigma_1^{k_1} \ \sigma_2^{k_2} \ \dots.$$

Gehört der primitive Charakter χ zu dem Symmetrieschema mit den Zeilenlängen $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots \geq \nu_\rho$, so kennzeichne man das Schema durch die fallende Reihe ganzer nicht-negativer Zahlen:

$$h_1 = \nu_1 + (\varrho - 1), \ldots, h_{\varrho-1} = \nu_{\varrho-1} + 1, h_{\varrho} = \nu_{\varrho} + 0.$$

Dann gilt

$$\sum_{\mathfrak{k}} \frac{n(\mathfrak{k})}{n!} \chi(\mathfrak{k}) \, \sigma_{1}^{k_{1}} \, \sigma_{2}^{k_{2}} \, \ldots = \frac{\left| x^{h_{1}}, \ldots, x^{h_{p}} \right|}{\left| x^{p-1}, \ldots, 1 \right|}$$

(die Zeilen der Determinante entstehen aus der hingeschriebenen, indem für x sukzessive die Variablen x_1, x_2, \ldots, x_p genommen werden). Der $\frac{1}{2}$ 1. c., S. 292 u. 335.

Grad g des Charakters drückt sich mit Hilfe des Differenzenproduktes D der Ziffern h_1, \ldots, h_p in der Gestalt aus

(5)
$$\frac{g}{n!} = \frac{D(h_1, \ldots, h_p)}{h_1! \ldots h_p!}.$$

Darum haben wir schließlich

(6)
$$\sum_{\mathbf{f}} \zeta(\mathbf{f}) \, \sigma(\mathbf{f}) = L_{(h)}(x) = \frac{h_1! \dots h_p!}{D(h_1, \dots, h_p)} \cdot \frac{|x^{h_1}, \dots, x^{h_p}|}{|x^{p-1}, \dots, 1|}.$$

Wenn aber das Symmetrieschema mehr als ϱ Zeilen enthält, ist die Summe (6) gleich Null.

Die oben N genannte Zahl der Lösungen der Gleichung

$$s_1 s_2 \ldots s_w = I$$

in der s_i eine Permutation von n Ziffern sein soll, die der vorgeschriebenen Klasse f_i entstammt, werde jetzt genauer mit

$$(7) N = f_n(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots, \mathfrak{k}_w)$$

bezeichnet. Wir brauchen w Sätze von je ϱ Variablen, welche durch einen darübergesetzten Index 1, 2, ..., w unterschieden werden. An Stelle der Anzahlen (7) benutzen wir jetzt die Zusammenfassung

(8)
$$\sum_{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\ldots} \frac{f_n(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\ldots)}{n!} \stackrel{1}{\sigma}(\mathbf{f}_1) \stackrel{2}{\sigma}(\mathbf{f}_2) \ldots$$

und erhalten dafür nach (3) und (6) die über alle möglichen Symmetrieschemen von höchstens ϱ Zeilen zu erstreckende Summe

$$\sum \left(\frac{D(h_1,\ldots,h_p)}{h_1!\ldots h_p!}\right)^2 L_{(h)}(x)^2 L_{(h)}(x)^2 \ldots$$

Das Polynom (8) bestimmt die darin als Koëffizienten auftretenden Anzahlen f_n (f_1 , f_2 , ...) eindeutig, wenn $\varrho \geq n$ gewählt ist; denn dann sind die ersten n Potenzsummen der Variablen x algebraisch unabhängig. Es ist aber zweckmäßig, formal die verschiedenen Anzahlen n = 0, 1, 2, ... additiv zusammenzufassen und aus den Bestandteilen (8) die "erzeugende Funktion"

(9)
$$F(x^{1}, x^{2}, ...) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{f}_{1}, \mathbf{f}_{2}, ...} \frac{\mathbf{I}}{n!} f_{n}(\mathbf{f}_{1}, \mathbf{f}_{2}, ...) \overset{1}{\sigma}(\mathbf{f}_{1}) \overset{2}{\sigma}(\mathbf{f}_{2}) ...,$$

zu bilden, in welcher das Glied n = 0 per definitionem gleich I sein soll. Man hat dann zur Bestimmung der Anzahlen f_n die Gleichung

(10)
$$F = \sum \left(\frac{D(h_1, \dots, h_p)}{h_1! \dots h_p!} \right)^2 L_{(h)}(x)^2 L_{(h)}(x) \dots;$$

rechts ist über alle ganzen Zahlen h_t zu summieren, welche die Ungleichungen

$$h_1 > h_2 > ... > h_0 \ge 0$$

erfüllen.

3. Diese Zusammenfassung zu einer erzeugenden Funktion ist nun auch geeignet, um aus den Riemannschen Flächen der vorgegebenen Verzweigungsart die zusammenhängenden auszuscheiden, d. h. die Anzahl

$$\varphi_n(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_w)$$

derjenigen Lösungen $\{s_i\}$ von (1) zu bestimmen, für welche die aus s_1, s_2, \ldots, s_w erzeugte Permutationsgruppe transitiv ist. Entsprechend (9) bilden wir die erzeugende Funktion

(II)
$$\Phi(x, x, ...) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ...} \frac{\varphi_n(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ...)}{n!} \sigma(\mathbf{f}_1) \sigma(\mathbf{f}_2) ...$$

und behaupten, daß die Gleichung

$$(12) F = e^{\Phi} oder \varPhi = \lg F$$

besteht. Dazu führt eine ganz elementare kombinatorische Betrachtung³). Die Ziffern von I bis n seien auf r getrennte Reihen von bzw. n', n'', ..., $n^{(r)}$ Ziffern verteilt:

(13)
$$n^{(i)} \ge 1$$
, $n' + n'' + ... + n^{(r)} = n$.

Eine Permutation s, welche nur Ziffern innerhalb der einzelnen Reihen vertauscht, hat die Form

³⁾ Analog verfährt Hurwitz, Math. Ann. 55 (1902), 61-65.

$$(14) s = s' s'' \dots s^{(r)},$$

wo s' eine Vertauschung der n' Ziffern der ersten Reihe ist, s'' eine Vertauschung der n'' Ziffern der zweiten Reihe und so fort. Wir suchen jetzt diejenigen Lösungen von (1), bei welchen alle s_i nur die Ziffern unserer Reihen untereinander vertauschen, aber die aus s_1, s_2, \ldots, s_w erzeugte Gruppe innerhalb jeder dieser Ziffernreihen transitiv ist. Nennen wir ihre Anzahl $\varphi(n', n'', \ldots, n^{(r)})$, so ist offenbar

(15)
$$\varphi(n', \ldots, n^{(r)}) = \sum \varphi_{n'}(f_1', f_2', \ldots) \ldots \varphi_{n^{(r)}}(f_1^{(r)}, f_2^{(r)}, \ldots),$$

wo die Summe sich über die möglichen Zerlegungen von f₁, f₂, ... gemäß den Gleichungen

(16)
$$\begin{cases} \mathbf{f}_{1} = \mathbf{f}_{1}' \; \mathbf{f}_{1}'' \; \dots \; \mathbf{f}_{1}^{(r)}, \\ \mathbf{f}_{2} = \mathbf{f}_{2}' \; \mathbf{f}_{2}'' \; \dots \; \mathbf{f}_{2}^{(r)}, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

erstreckt. f_i ist hier natürlich eine Klasse von Permutationen der in der ersten Reihe liegenden n' Ziffern, entsprechend f_i und so fort, und die Gleichungen sind in demselben Sinne zu verstehen wie die Zerlegung (14). Nun liefert eine einfache Abzählung für $n \ge 1$:

$$f_n = \sum_{r=1, \dots, r!} \frac{1}{r!} \sum_{n'! = n''! \dots = n^{(r)}!} \varphi(n', n'', \dots, n^{(r)}).$$

In der inneren Summe gelten die Beschränkungen (13). Mit der Abkürzung

$$\frac{1}{n!}\varphi_n = \varphi_n^*, \quad \frac{1}{n!}f_n = f_n^*$$

ist daher nach (15):

(17)
$$f_n^* = \sum_{r=1,...,r!} \frac{1}{r!} \sum \varphi_{n'}^*(\tilde{\mathfrak{t}}_1', \tilde{\mathfrak{t}}_2', \ldots) \ldots \varphi_{n}^*(r) (\tilde{\mathfrak{t}}_1^{(r)}, \tilde{\mathfrak{t}}_2^{(r)}, \ldots).$$

Die innere Summe erstreckt sich über die durch (13) gebundenen $n', n'', \ldots, n^{(r)}$, sowie über die Zerlegungen (16). Mit

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}' \mathfrak{k}'' \dots \mathfrak{k}^{(r)}$$
 ist $\sigma(\mathfrak{k}) = \sigma(\mathfrak{k}') \sigma(\mathfrak{k}'') \dots \sigma(\mathfrak{k}^{(r)})$.

Darum läßt sich die Rekursionsformel (17) zusammenfassen zu der behaupteten Gleichung

$$F = \mathbf{I} + \sum_{r=1,\dots} \frac{\mathbf{I}}{r!} \, \mathbf{\Phi}^r \,.$$

Umgekehrt kann die Gleichung

$$\Phi = \lg F = \lg (1 + F') = \sum_{r=1, \dots} \frac{(-1)^{r-1}}{r} F'^r$$

sofort wieder in eine solche umgesetzt werden, die φ_n aus f_n zu berechnen gestattet:

(18)
$$\varphi_n^*(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots) = \sum_{r=1,\ldots} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \sum_{r=1,\ldots} f_{n'}^*(\mathbf{f}_1', \mathbf{f}_2', \ldots) \ldots f_{n(r)}^*(\mathbf{f}_1^{(r)}, \mathbf{f}_2^{(r)}, \ldots)$$

mit den gleichen Summationsbedingungen wie in (17).

4. Um linke und rechte Seite der Gleichung (10) möglichst direkt vergleichen zu können, muß man die rechts auftretende symmetrische Funktion

$$\frac{|x^{h_1}, \ldots, x^{h_{\rho}}|}{|x^{\rho-1}, \ldots, x^{\rho}|} = X(x)$$

der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{\rho}$ durch die Potenzsummen σ_m ausdrücken. Das geschieht folgendermaßen. Das Reziproke des "charakteristischen Polynoms"

$$\omega(z) = (I - x_1 z) (I - x_2 z) ... (I - x_p z)$$

werde in der Umgebung von z = 0 in eine Potenzreihe entwickelt

$$\frac{1}{\omega(z)} = \pi_0 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \ldots = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \pi_i z^i.$$

Aus der Cauchyschen Gleichung

(19)
$$\left|\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{I}-x_{\iota}y_{\varkappa}}\right| = \frac{D\left(x_{1}, \ldots, x_{\varrho}\right) D\left(y_{1}, \ldots, y_{\varrho}\right)}{\prod\limits_{\iota, \varkappa=1, \ldots, \varrho} \left(\mathbf{I}-x_{\iota}y_{\varkappa}\right)}$$

ergibt sich dann 4)

(20)
$$X(x) = |\pi_{h-\rho+1}, \ldots, \pi_{h-1}, \pi_h|$$

(die ρ Zeilen der Determinante rechts entstehen dadurch, daß man h der Reihe nach gleich h_1, \ldots, h_{ρ} nimmt). Es ist andererseits

$$\lg \frac{1}{\omega(z)} = \sum_{t} \lg \frac{1}{1 - x_t z} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t} \frac{x_t^n z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{n} z^n.$$

Die π lassen sich also in (20) durch die σ ganzrational ausdrücken mit Hilfe der Gleichung

$$\pi_0 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \ldots = \exp\left(\frac{\sigma_1}{I} z + \frac{\sigma_2}{2} z^2 + \ldots\right).$$

Für die niedrigsten Fälle w = 1 und 2 ist die Bestimmung der Zahlen φ_n^* trivial. Es ist aber ganz instruktiv, unsere Formeln hier durch die Berechnung von Φ zu bestätigen.

(w = 1). Die Formel (5) für den Grad g entsteht aus der Gleichung 5)

$$\sigma_{1}^{n} = \sum g \cdot X(x),$$

indem man fragt, mit welchem Koëffizienten g das Glied $x_1^{h_1}$... $x_p^{h_p}$ in dem Polynom

$$\sigma_1^n \cdot D(x_1, \ldots, x_p)$$

vorkommt. Wird auch noch über n = 0, I, 2, ... summiert, so erhält man daher

$$F = \sum \frac{D(h_1, \dots, h_p)}{h_1! \dots h_p!} \frac{|x^{h_1}, \dots, x^{h_p}|}{|x^{p-1}, \dots, 1|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_1^n}{n!} = e^{\sigma_1}$$

und darum

$$\Phi = \lg F = \sigma_1$$
.

⁴⁾ H. Weyl, Math. Zeitschr. 23 (1925), 300.

b) H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2. Aufl., S. 337.

Das heißt: die einzige zusammenhängende Riemannsche Fläche, welche nur über einem Punkte der komplexen Ebene verzweigt ist (w = 1), ist die einblättrige Ebene selber (n = 1).

(w = 2). Nach der Cauchyschen Gleichung (19) gilt

$$\sum |x^{h_1}, \ldots, x^{h_p}| \cdot |y^{h_1}, \ldots, y^{h_p}| = \frac{|x^{p-1}, \ldots, x^{p-1}, \ldots, x^{p-1}, \ldots, x^{p-1}|}{\prod_{\iota, \kappa} (1 - x_{\iota} y_{\kappa})}$$

Bezeichnen wir daher im Falle w=2 die beiden Variablensätze von je ϱ Variablen mit x und y statt mit x, x, so läßt sich die Summe (10) auswerten und liefert:

$$F = \prod_{i, \kappa} \frac{1}{1 - x_i y_{\kappa}},$$

mithin

$$\Phi = \sum_{\iota, \chi} \lg \frac{1}{1 - \chi_{\iota} y_{\chi}} = \sum_{\iota, \chi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{\iota}^{n} y_{\chi}^{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{n}(x) \sigma_{n}(y)}{n}.$$

 $\sigma_n(x)$, $\sigma_n(y)$ ist die n^{te} Potenzsumme der x bzw. y. Die Formel für Φ enthält das triviale Resultat: Für eine zusammenhängende n-blättrige Riemannsche Fläche, die nur über zwei Punkten der komplexen Ebene verzweigt ist, muß die Vertauschung s der Blätter beim Umlauf um den ersten Verzweigungspunkt aus einem einzigen n-gliedrigen Zykel bestehen, während die entsprechende Vertauschung für den zweiten Verzweigungspunkt s^{-1} der gleichen Klasse angehört; die Zahl verschiedener solcher Zykeln ist $\frac{n!}{n}$.

Die Klasse f der Permutationen von n Ziffern, welche aus k_1 , k_2 , k_3 , ... Zykeln der Ordnung 1, 2, 3, ... besteht, liefert zur Verzweigungszahl den Beitrag (Multiplizität)

$$m(f) = 0 \cdot k_1 + 1 \cdot k_2 + 2 k_3 + ... = n - (k_1 + k_2 + k_3 + ...).$$

Das Geschlecht p des einzelnen Gliedes $\sigma(\mathbf{f}_1)$ $\sigma(\mathbf{f}_2)$... in F führt man danach ein durch die Gleichung

$$2p = m(\mathbf{f}_1) + m(\mathbf{f}_2) + ... + m(\mathbf{f}_w) - 2(n-1).$$

Wir haben oben aus der Formel (3) für N geschlossen, daß nur solche Glieder in F und darum in Φ vorkommen, für welche 2 p gerade ist;

denn sgn (f) ist $= (-1)^m$ (f). Eine brauchbare Formel sollte darüber hinaus das sonst auf topologischem, nicht auf gruppentheoretischem Wege abgeleitete Resultat ergeben, daß das Geschlecht p einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche notwendig ≥ 0 ist oder daß in p nur Glieder mit $p \geq 0$ vorkommen. Liefert sie dies in durchsichtiger Weise, so kann man auch hoffen, daß aus ihr die für p = 0 gültigen Verallgemeinerungen derjenigen einfachen Anzahlformeln hervorgehen, die Hurwitz Math. Ann. 39 (1891), 22, angibt. Ich stehe aber im Augenblick der Aufgabe noch ratlos gegenüber, meine Gleichungen (10), (12) für p0 so umzuformen, daß diese Dinge in Evidenz gesetzt werden. Wahrscheinlich müßte man dazu die (divergente) Summe p1 in ein Produkt verwandeln.

(Eingegangen den 14. März 1931)