

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 2 (1930)

**Artikel:** Ueber den Kappenkörper eines konvexen Körpers.  
**Autor:** Stoll, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-3609>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ueber den Kappenkörper eines konvexen Körpers

Von A. STOLL, Zürich

## Einleitung

Unter einem *konvexen Bereich* verstehe ich eine Punktmenge, die erstens im Endlichen abgeschlossen ist, d. h. alle endlichen Häufungspunkte enthält, und die zweitens mit zwei Punkten stets auch ihre ganze Verbindungsstrecke enthält. Ein solcher Bereich braucht weder endlich zu sein noch auch innere Punkte zu besitzen, z. B. beidseitig oder einseitig unbegrenzter Kreiszylinder, Streifen zwischen zwei parallelen Geraden (ebener konvexer Bereich), Gerade. Ist der konvexe Bereich endlich, so soll er je nach seiner Dimensionszahl heißen: *konvexer Körper* (mit inneren Punkten, dreidimensional), *Eibereich* (zweidimensional), *Strecke* (eindimensional), *Punkt* (nulldimensional). Schließlich bezeichne ich den Rand eines konvexen Körpers als *konvexe Fläche*, den Rand eines Eibereiches als *Eilinie*.

Als *Kappenkörper* bezeichne ich die kleinste konvexe Hülle eines endlichen konvexen Bereiches und eines diesem nicht angehörigen Punktes<sup>1)</sup>. Den zugrunde gelegten Bereich nenne ich *Grundkörper* (event. Grundbereich, Grundstrecke, wenn er keine inneren Punkte besitzt) und bezeichne ihn stets mit  $\mathfrak{G}$ , den zugrunde gelegten Punkt, den *Aufpunkt*, mit  $P$ . Den Kappenkörper bezeichne ich stets mit  $\mathfrak{K}$  oder  $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}, P)$ .

Der Kappenkörper setzt sich zusammen aus dem Grundkörper und einem *Ansatz*. Die Oberfläche des Grundkörpers zerfällt dadurch in einen vom Ansatz bedeckten und einen unbedeckten Teil. Denkt man sich den Aufpunkt leuchtend, so ist der bedeckte Teil beleuchtet, der unbedeckte im Schatten. Die gemeinsame Grenze beider Teile soll deshalb *Schattengrenze* heißen. Der unbedeckte Teil gehört gleichzeitig der Oberfläche des Kappenkörpers an. Der Rest dieser Oberfläche, der dem Ansatz allein angehört, soll *Kappe* heißen. Beide stoßen längs der Schattengrenze zusammen. Die Kappe bildet mit dem bedeckten Teil der Oberfläche des Grundkörpers eine geschlossene Fläche: die Oberfläche des Ansatzes.

<sup>1)</sup> Minkowski verwendet die Bezeichnung Kappenkörper in etwas allgemeinerer Weise, indem er nicht nur eine, sondern beliebig viele „Kappen“ zuläßt. Vergl. Theorie der konvexen Körper, Ges. Abh. II. S. 175.

Der Kappenkörper kann auch aufgefaßt werden als Gesamtheit aller Strecken, die im Aufpunkt entspringen und in einem Punkt des Grundkörpers enden. Der Ansatz wird dann gebildet von denjenigen dieser Strecken, die mit dem Grundkörper nur einen Punkt gemein haben. Die Kappe wird gebildet von allen Strecken, die im Aufpunkt entspringen, einen einzigen Punkt mit dem Grundkörper gemein haben und der Oberfläche des Kappenkörpers angehören. Die Gesamtheit der vom Aufpunkt verschiedenen Endpunkte dieser letzten Strecken ist die Schattengrenze, der Rand der Kappe.

Jeder Kappenkörper besitzt ein bestimmtes Volumen  $V$ , eine bestimmte Oberfläche  $O$  und ein bestimmtes Integral der mittleren Krümmung  $M$  (event. Kantenkrümmung). Denkt man sich den Grundkörper fest und den Aufpunkt  $P$  variabel, so sind  $V$ ,  $O$  und  $M$  Funktionen von  $P$ . Ich werde zeigen, daß *diese drei Punktfunctionen konvexe Niveaumäßigkeiten besitzen* (Sätze I—III). Dabei wird sich noch etwas mehr herausstellen, nämlich, daß  $V$ ,  $O$  und  $M$  als Funktionen von drei Variablen konvex sind. Ferner werde ich ihre Gradienten berechnen (Sätze IV—VI).

Als Hilfsmittel benötige ich einige Sätze über konvexe Funktionen von drei Variablen. Diesen ist daher das erste Kapitel gewidmet. Im zweiten Kapitel werden dann die Niveaumäßigkeiten untersucht und im letzten Kapitel die Gradienten berechnet und einige Beispiele gegeben.

Die vorliegende Arbeit wurde angeregt durch einen noch unveröffentlichten Satz von *Hurwitz* über die Flächensumme von Dreiecken, die von einer Anzahl fester Basisstrecken und einer gemeinsamen variablen Spitze aufgespannt werden; er wird in II 1 b formuliert und bewiesen. Nach Fertigstellung der Arbeit erhielt ich Kenntnis von zwei Sätzen von *Hirsch*, die sich im Anschluß an meine Resultate leicht beweisen lassen. Dem freundlichen Entgegenkommen von Herrn Professor Hirsch verdanke ich die Erlaubnis, die beiden Sätze hier mit meinen Beweisen erstmals zu veröffentlichen (III 6 f und g). Es sei ihm hiemit bestens verdankt. Auch meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. *G. Pólya* sei an dieser Stelle für die mannigfachen mir während der Arbeit zuteil gewordenen Aufmunterungen und Anregungen aufrichtig gedankt.

## I. Kapitel

### Ueber konvexe Funktionen von drei Variablen

**1. Definition.** Eine reelle Funktion  $U$  von drei Variablen  $x, y, z$  soll konvex heißen, wenn erstens in einem gewissen Bereich der  $x, y, z$  zu jedem Zahlentripel  $(x, y, z)$  ein bestimmter Zahlenwert

$$U = U(x, y, z)$$

gehört, und wenn zweitens, falls zwei Punkte  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  und  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  samt ihrer Verbindungsstrecke ganz zum Definitionsbereich gehören, für jeden Wert  $t$  des Intervalls  $0 < t < 1$  folgende Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} U\{(1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2, (1-t)z_1 + tz_2\} \\ \leq (1-t)U(x_1, y_1, z_1) + tU(x_2, y_2, z_2), \end{aligned} \quad (1)$$

oder kürzer

$$U\{(1-t)P_1 + tP_2\} \leq (1-t)U(P_1) + tU(P_2). \quad (1')$$

Der Begriff der konvexen Funktion dreier Variablen lässt sich auf den der konvexen Funktion einer Variablen zurückführen. Setzt man nämlich

$$U\{P_1 + t(P_2 - P_1)\} = u(t),$$

so ist  $u(t)$  eine im Intervall  $0 < t < 1$  konvexe Funktion der einen Variablen  $t$ .

*Zusätze:* a) Es ist klar, daß  $U$  auf  $P_1 P_2$  dann und nur dann linear ist, wenn in (1) für alle Werte von  $t$  im Intervall  $0 < t < 1$  das Gleichheitszeichen gilt.

b) Wenn  $U(x, y, z)$  in einem gewissen Bereich zweimal differenzierbar ist, so ist für die Konvexität in diesem Bereich notwendig und hinreichend, daß die quadratische Form

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta, \zeta) = & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \xi^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \eta^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \zeta^2 \\ & + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \xi \eta + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \eta \zeta + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \xi \zeta \end{aligned}$$

nicht negativ sei. In der Tat, ist  $P_1 P_2$  irgend eine ganz in dem fraglichen Bereich liegende Strecke und  $u(t)$  wie oben definiert, so ist

$$u''(t) = F(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

und also für alle  $t$  im Intervall  $0 < t < 1$   $u''(t) \geq 0$ , woraus bekanntlich die Konvexität von  $u(t)$  und damit die von  $U$  folgt.<sup>2)</sup>

<sup>2)</sup> Vergl. etwa *Pólya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze*, Bd I, S. 52, Aufg. 72.

Ist umgekehrt  $U$  konvex, so ist auf  $P_1 P_2$  bekanntlich  $u''(t) \geq 0$ , und da es zu jedem  $(\xi, \eta, \zeta)$  und zu jedem zulässigen  $P$  eine ganz dem Bereich angehörige Strecke  $P_1 P_2$  gibt, die  $P$  enthält und für welche

$$\xi : \eta : \zeta = (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)$$

ist, so folgt  $F(\xi, \eta, \zeta) \geq 0$  im ganzen Bereich.

Wenn die quadratische Form  $F(\xi, \eta, \zeta)$  sogar positiv definit ist, so gilt in der Ungleichung (1) nur das Zeichen  $<$ . Denn es ist dann auf jeder Strecke  $P_1 P_2$

$$u''(t) > 0. \text{<sup>3)</sup>}$$

**2. Erzeugung.** a) Da eine Drehung des Koordinatensystems oder eine Verschiebung des Anfangspunktes, allgemeiner, eine ganze lineare Transformation der Koordinaten das Teilverhältnis unverändert lässt, so bleibt die Ungleichung (1) auch in den neuen Koordinaten bestehen, d. h. *die Konvexität einer Funktion ist gegen ganze lineare Transformation der Koordinaten invariant*.

b) Die Ungleichung (1) bleibt bestehen, wenn man beide Seiten mit einer positiven Zahl multipliziert. Folgt: *Jedes positive Multiplum einer konvexen Funktion ist wieder konvex*.

c) Sind  $U_1$  und  $U_2$  zwei konvexe Funktionen, so folgt durch Addition der bezüglichen Ungleichungen: *Die Summe konvexer Funktionen ist wieder konvex*.

d) Wenn  $U_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , lauter konvexe Funktionen sind, und wenn der Grenzwert

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$$

existiert, so ist auch  $U$  konvex. Denn aus der Gültigkeit von (1) für die  $U_n$  folgt diejenige für  $U$ . Also: *Der Limes einer konvergenten Folge konvexer Funktionen ist wieder konvex*.

**3. Stetigkeit.** a) *Eine konvexe Funktion ist in jedem Quader, der ganz zum Definitionsbereich gehört, nach oben beschränkt*. In der Tat, zunächst hat die Funktion  $U$  in den Ecken des Quaders bestimmte Werte, der größte von ihnen sei  $M$ . Dann folgt aus (1), daß in jedem Punkt einer Quaderkante  $U \leq M$  ist. Nun ist jeder Punkt einer Quaderfläche innerer Punkt einer Strecke zwischen zwei passenden Kantenpunkten, so daß (1) auch hier  $U \leq M$  nach sich zieht. Und endlich ist jeder innere Punkt des Quaders innerer Punkt einer Strecke zwischen zwei passenden Randpunkten, so daß  $U \leq M$  für den vollen Quader gilt.

<sup>3)</sup> Vergl. etwa *Pólya-Szegő, Aufgaben und Lehrsätze*, Bd. I, S. 52, Aufg. 72.

b) Eine konvexe Funktion ist in jedem inneren Punkt ihres Definitionsbereiches stetig. Zum Beweise dient folgender

*Hilfssatz:* Ist  $v(t)$  eine konvexe Funktion und  $v(0) = 0$ , ferner mit  $h > 0$   $v(h)$  und  $v(-h)$  beide  $\leq M$ , so ist für jedes  $t$  zwischen  $-h$  und  $+h$

$$|v(t)| \leq |t| \frac{M}{h}. \quad (2)$$

In der Tat ist nach Definition und Voraussetzung für positive  $t$

$$v(t) \leq \frac{t}{h} v(h) \leq \frac{t}{h} M,$$

und für negative  $t$

$$v(t) \leq \frac{|t|}{h} v(-h) \leq |t| \frac{M}{h},$$

also für alle erlaubten  $t$

$$v(t) \leq |t| \frac{M}{h}. \quad (3)$$

Ferner ist

$$v(0) = 0 \leq \frac{1}{2} v(-t) + \frac{1}{2} v(t).$$

Daher können  $v(t)$  und  $v(-t)$  nicht beide negativ sein, und wenn eines negativ ist, so darf es nicht absolut größer sein als das positive. Ist nun  $v(t)$  positiv, so folgt (2) aus (3). Ist aber  $v(t)$  negativ, so muß  $|v(t)| \leq v(-t)$  sein, woraus mit (3) ebenfalls (2) folgt.

Nun kann man um jeden innern Punkt  $P$  eine ganz dem Definitionsbereich angehörende Kugel konstruieren. Ist sie genügend klein, so gilt nach a) überall in ihr  $U \leq M$ . Wählt man nun auf irgend einer Geraden durch  $P$  als Parameter  $t$  den Abstand von  $P$ , und setzt man

$$v(t) = u(t) - u(0),$$

so ist  $v(t)$  eine konvexe Funktion, für welche gemäß Hilfssatz bei genügend kleinem  $h$  gilt:

$$|u(t) - u(0)| \leq |t| \frac{M - u(0)}{h}.$$

Da dies für alle durch  $P$  gehenden Geraden gleichmäßig, d. h. mit dem gleichen  $h$  und  $M$ , gilt, folgt die Stetigkeit.

**4. Stückelung. Hebbare Singularitäten.** In gewissen Fällen lässt sich in einem Bereich  $\mathfrak{B}$  eine konvexe Funktion aus einzelnen konvexen Funktionen zusammenstückeln, die nur in getrennten aber paarweise längs Ebenen aneinanderstoßenden Teilbereichen von  $\mathfrak{B}$  definiert sind. Hiezu dienen die folgenden Sätze a) und b).

a) *Es seien  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  zwei entlang einer Ebene zusammenstossende Bereiche ohne gemeinsame innere Punkte. Ist dann eine Funktion  $U$  sowohl in  $\mathfrak{B}_1$  wie in  $\mathfrak{B}_2$  als konvexe Funktion definiert und außerdem im Innern des vereinigten Bereiches stetig und mit stetigem Gradienten versehen, so ist  $U$  auch im vereinigten Bereich konvex.*

Ist nämlich  $P_1$  ein Punkt in  $\mathfrak{B}_1$  und  $P_2$  ein Punkt in  $\mathfrak{B}_2$  und gehört ihre Verbindungsstrecke ganz dem vereinigten Bereich an, so setzt sich  $u(t)$  auf  $P_1 P_2$  aus zwei Funktionen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  zusammen, die links und rechts von der Trennungsebene als konvexe Funktionen definiert sind und stetig und mit stetiger Tangente in einander übergehen. So kommt die Behauptung auf eine analoge, geometrisch evidente, heraus, die konvexe Funktionen einer Variablen betrifft, und deren Beweis ich hier weglassen darf.

b) *Es sei  $\mathfrak{B}'$  ein Bereich, der aus  $\mathfrak{B}$  durch Wegnahme von endlich vielen Geraden entsteht, und es sei die Funktion  $U$  in  $\mathfrak{B}$  stetig und in  $\mathfrak{B}'$  konvex. Dann ist  $U$  auch in  $\mathfrak{B}$  konvex.*

Beweis: Es sei  $P_1 P_2$  eine Strecke in  $\mathfrak{B}$ . Liegt sie ganz in  $\mathfrak{B}'$ , so gilt die Ungleichung (1). Es können aber alle oder einzelne Punkte von ihr einer oder mehreren von den singulären Geraden angehören. Aber es gibt gewiß durch  $P_1 P_2$  eine Ebene, die außer event. der Geraden  $P_1 P_2$  selber keine singulären Geraden ganz enthält, da diese ja nur in endlicher Anzahl vorhanden sind. Aus dem gleichen Grunde lässt sich dann in dieser Ebene  $P_1 P_2$  so parallel verschieben, daß dabei kein neuer singulärer Punkt auftritt, daß also in jeder Phase der Verschiebung  $P_1 P_2$  ganz  $\mathfrak{B}'$  angehört. In jeder Phase gilt daher die Ungleichung (1). Schiebt man nun zurück, so gilt, da  $t$  dabei nicht geändert wird, und wegen der Stetigkeit, (1) auch in der Grenze, also für jedes  $P_1 P_2$  in  $\mathfrak{B}$ .

c) Der Satz b) lässt sich noch verschärfen insofern, als die Funktion  $U$  überhaupt nur in  $\mathfrak{B}'$  definiert zu sein braucht. Es gilt nämlich:

*Ist eine Funktion in einem Bereich  $\mathfrak{B}$  außerhalb endlich vieler Geraden definiert und konvex, so überall in  $\mathfrak{B}$ . (Die Singularitäten der Ausnahmegeraden sind „hebbar“.)*

Ich unterdrücke den Beweis dieses Satzes, da ich im Folgenden keinen Gebrauch davon mache.

**5. Konvexität der Niveaumengen.** Ist  $U$  eine überall konvexe Funktion und  $c$  eine Konstante, so bilden diejenigen Punkte  $P$ , für welche

$$U(P) \leqq c \quad (4)$$

gilt, einen konvexen Bereich. In der Tat, da  $U$  als konvexe Funktion stetig ist, ist die Punktmenge (4) im Endlichen abgeschlossen. Ferner folgt aus  $U(P_1) \leqq c$  und  $U(P_2) \leqq c$ , daß auch

$$U\{(1-t)P_1 + tP_2\} \leqq (1-t)c + tc = c$$

ist. Da im allgemeinen diejenigen Punkte, für welche  $U(P) = c$  ist, eine Fläche — Niveaumenge von  $U$  — erfüllen, so läßt sich dieser Sachverhalt etwas kürzer aber weniger präzise so ausdrücken: *Die Niveaumengen einer konvexen Funktion sind konvex*.

*Zusätze:* a) Eine konvexe Funktion braucht kein Minimum zu haben, wie das Beispiel  $U(x, y, z) = x$  zeigt. Wenn aber ein Minimum  $m$  vorhanden ist, dann bilden diejenigen Punkte, für die es angenommen wird, einen konvexen Bereich, den *Minimum-Bereich*  $U(P) = m$ .

b) Ist  $U(P_1) = c_1$  und  $U(P_2) = c_2 > c_1$ , so folgt aus (1) für jeden andern Punkt  $P$  der Strecke  $P_1P_2$ :  $U(P) < c_2$  unter Ausschluß der Gleichheit. Daraus folgt: *Die Niveaumengen haben keine verdickten Stellen*, genauer: ist  $U(P_2) = c_2 > m$ , so gibt es um  $P_2$  keine volle dreidimensionale Umgebung, für die ebenfalls  $U = c_2$  ist. Denn gäbe es eine solche Umgebung von  $P_2$ , so gäbe es auf der Verbindungsgeraden von  $P_2$  mit einem Punkte  $P_1$ , für den  $U(P_1) = c_1 < c_2$  ist, eine ganze Strecke, auf welcher  $U = c_2$  wäre, was eben ausgeschlossen ist. Demnach sind die *Niveaumengen zwiebelschalenförmig um einander gelegt* und umhüllen den event. Minimumsbereich als Kern.

c) *Die Niveaumengen sind sicher endlich, wenn  $U$  mit  $(x^2 + y^2 + z^2)$  ins Unendliche strebt.* Denn dann gibt es zu jedem  $c$  eine genügend große Kugel, so daß für alle Punkte außerhalb derselben  $U > c$  wird. Endliche Niveaumengen sind, da sie konvex sind, geschlossen.  $U$  besitzt dann sicher ein Minimum.

d) Ich sage kurz, eine Niveaumenge besitze keine *flachen Stellen*, wenn es keine Strecke gibt, die ganz in ihr enthalten ist. Eine solche Fläche hat also auch keine geradlinige Kante. Ist nun eine konvexe Funktion nirgends linear, so kann sie auch auf keiner Strecke konstant sein. Also:

Die Niveauflächen besitzen sicher keine flachen Stellen, wenn  $U$ , außer im Minimumsbereich, nirgends linear ist, d. h. wenn in (1) überall das Zeichen  $<$  gilt. Hiezu bemerke ich noch:

e) Aus 1 Zusatz a) folgt: Wenn eine Summe konvexer Funktionen linear ist, so ist jedes Glied linear. Denn wenn auch nur ein Glied nicht linear wäre, so müßte bei diesem Glied für mindestens ein  $t$ ,  $0 < t < 1$ , das Zeichen  $<$  gelten und folglich auch bei der Summe.

f) Wenn im Punkt  $P$  der Gradient von  $U(P)$  existiert, so ist er zur Normalen der Niveaufläche in  $P$  parallel. Im Minimumsbereich ist  $\text{grad } U$  gleich Null.

Es ist bekannt, daß bei einer konvexen Funktion  $u(t)$  einer Veränderlichen  $u'(t)$  nur dann an zwei verschiedenen Stellen  $t_1$  und  $t_2$  gleich sein kann, wenn  $u(t)$  im Intervall  $t_1 \dots t_2$  linear ist. Daraus folgt: Wenn eine konvexe Funktion in einem konvexen Bereich nirgends linear ist, so kann ihr Gradient in keinen zwei Punkten gleich sein. Denn wäre er das, etwa in  $P_1$  und  $P_2$ , so müßte auch seine Projektion auf die Gerade  $P_1 P_2$ , also  $u'(t)$ , in  $P_1$  und  $P_2$  gleich,  $u(t)$  also auf  $P_1 P_2$  linear sein, gegen die Voraussetzung.

Im Zusatz b) zu 1 wurde gezeigt, daß  $U(x, y, z)$  konvex und nirgends linear ist, wenn die quadratische Form  $F(\xi, \eta, \zeta)$  positiv definit ist. Nun folgt daraus weiter, daß  $\text{grad } U$  in keinen zwei Punkten gleich sein kann. Also: Ist die quadratische Form

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i \partial x_k} \xi_i \xi_k$$

für alle  $(x_1, x_2, x_3)$  eines konvexen Bereiches positiv definit, so ist daselbst  $\text{grad } U(x_1, x_2, x_3)$  in keinen zwei Punkten gleich. Die Gleichungen

$$y_i = \frac{\partial U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

liefern daher eine eindeutige Abbildung des  $x$ -Raumes auf den  $y$ -Raum. Hievon wird im Anhang Gebrauch gemacht.

## II. Kapitel

### Konvexität der Niveauflächen

**1. Summe von Abständen von Punkten, Geraden, Ebenen.** Die Funktion

$$U(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (5)$$

ist sicher konvex. Denn mit  $(1-t) = t_1 > 0, t = t_2 > 0$  ist die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \sqrt{(t_1 x_1 + t_2 x_2)^2 + (t_1 y_1 + t_2 y_2)^2 + (t_1 z_1 + t_2 z_2)^2} \\ & \leq t_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + t_2 \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \end{aligned}$$

nur ein analytischer Ausdruck für die bekannte Ungleichheitsbeziehung zwischen den Seiten eines Dreieckes. Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn

$$x_1 : y_1 : z_1 = x_2 : y_2 : z_2.$$

Der Ausdruck (5) für  $U(x, y, z)$  bedeutet den Abstand irgend eines Punktes  $P(x, y, z)$  vom Koordinatenursprung. Es ist klar, daß auch  $U(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , der Abstand irgend eines Punktes  $P$  von der  $z$ -Achse, und  $U(x, y, z) = |z|$ , sein Abstand von der  $xy$ -Ebene, konvexe Funktionen sind. Da aber Konvexität gegen Translation und Drehung des Koordinatensystems invariant ist, so gilt: *Der Abstand von irgend einem Punkt, einer Geraden oder einer Ebene ist eine konvexe Funktion.*

a) Nach den Erzeugungssätzen ist auch die Summe der Abstände von endlich vielen Punkten  $P_i(a_i, b_i, c_i), i = 1, 2, \dots, n$ , eine konvexe Funktion:

$$U(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2}.$$

Ihre Niveaupläne sind nicht nur konvex, sondern nach I 5c auch endlich, da  $U$  mit  $(x^2 + y^2 + z^2)$  unbegrenzt wächst.

Sie haben aber auch keine flachen Stellen. Dazu müßte nämlich  $U$  längs einer Strecke konstant und daher nach I 5e jedes Glied von  $U$  längs dieser Strecke linear sein, was nur möglich ist, wenn alle Punkte  $P_i$  mit  $P$  auf ein und derselben Geraden  $g$  liegen. Diese Bedingung ist jedoch nicht hinreichend. Vielmehr muß noch auf  $g$   $u'(t)$  in mehr als einem Punkte verschwinden. Es ist aber mit  $g$  als  $x$ -Achse:

$$u'(t) = \frac{\partial U}{\partial x} = \sum_i \frac{x - a_i}{|x - a_i|} = \sum_i \varepsilon_i,$$

wo  $\varepsilon_i = \pm 1$  ist, je nachdem  $P_i$  links oder rechts von  $P$  liegt.  $u'(t)$  kann daher nur dann in mehr als einem Punkte verschwinden, wenn die Anzahl der Punkte  $P_i$  gerade ist. Ist dies der Fall, und ist  $P_1 P_2$  die größte

Strecke auf  $g$ , welche eben so viele Punkte  $P_i$  links wie rechts läßt und keinen im Innern enthält, so ist auf ihr nicht nur  $u'(t)$ , sondern auch der Gradient von  $U$  gleich Null. Dieser ist nämlich:

$$\operatorname{grad} U = \sum_i e_i, \quad (6)$$

wo  $e_i$  den Einheitsvektor der Richtung  $\overrightarrow{P_i P}$  bedeutet. Da er ersichtlich nirgends sonst verschwinden kann, stellt  $P_1 P_2$  den Minimumsbereich von  $U$  dar.

Zusammenfassend ergibt sich: *die Abstandssumme eines variablen Punktes von endlich vielen Punkten  $P_i$  ist eine konvexe Funktion. Ihre Niveauplächen sind endlich und nirgends flach. Das Minimum (der sog. Verkehrsmittelpunkt) existiert und ist einzig, außer wenn die  $P_i$  in gerader Anzahl auf einer Geraden liegen.*

b) Mit dem Abstand  $p$  eines variablen Aufpunktes  $P$  von einer Geraden, die eine Strecke  $\alpha$  von der Länge  $\alpha$  trägt, ist auch das  $\frac{\alpha}{2}$ -fache von  $p$ , das ist die Fläche des durch  $\alpha$  und  $P$  bestimmten Dreiecks, eine konvexe Funktion von  $P$ . Durch Summierung über mehrere Grundstrecken folgt:

*Die Summe der Inhalte der durch einen variablen Aufpunkt  $P$  und endlich viele Grundstrecken  $\alpha_i$  bestimmten Dreiecksflächen*

$$F(P) = \frac{1}{2} \sum_i \alpha_i p_i \quad (7)$$

*ist eine konvexe Funktion.* Dies ist der in der Einleitung erwähnte Satz von *Hurwitz*<sup>4)</sup>.

Wenn  $P$  längs irgend einer Geraden  $g$  ins Unendliche rückt, so wächst mindestens ein  $p_i$  und damit  $F$  unbegrenzt, außer wenn alle  $\alpha_i$  zu  $g$  parallel sind. In diesem Falle ist  $F$  längs  $g$  konstant. Also: *Die Niveauplächen von  $F$  sind endlich oder Zylinder, je nachdem nicht alle oder alle Grundstrecken parallel sind.*

Das Minimum wird nach dem Vorigen sicher in einem endlichen Punkte erreicht, und zwar im allgemeinen in einem einzigen. Damit es in mehr als einem Punkt erreicht werde, ist nämlich notwendig, daß  $F$  längs einer geraden Strecke konstant, also jedes Glied von  $F$  linear sei. Dies ist

---

<sup>4)</sup> *A. Hurwitz, Nachgelassene Manuskripte*, Bibliothek der Eidg. Techn. Hochschule, Zürich.

aber nur möglich, wenn die Trägergeraden der Grundstrecken ein und dieselbe Gerade treffen. Doch ist dies nicht hinreichend. Wenn z. B. die Grundstrecken einem Geradenbündel angehören, so ist  $F$  in dessen Scheitel Null und überall sonst  $\neq 0$ . Wenn das Minimum in einem ebenen Bereich erreicht wird, gibt es ein ganzes Büschel von Geraden, deren jede die Trägergeraden aller Grundstrecken trifft. Dies ist nur möglich, wenn die Grundstrecken einer Ebene oder einem Geradenbündel angehören. Im letzteren Fall gibt es aber, wie schon gesagt, nur einen einzigen Minimum-Punkt. Mehr als zweidimensional kann der Minimumsbereich nicht sein. Denn sonst gäbe es ein Bündel von Geraden, deren jede alle Grundstreckenträger treffen würde, was nicht möglich ist, wenn die Grundstrecken keinem Geradenbündel angehören. Es gilt also: *Das Minimum von  $F$  wird im allgemeinen nur in einem einzigen Punkt erreicht. Der (konvexe) Minimumsbereich ist höchstens dann eindimensional, wenn die Grundstrecken einem Ebenenbüschel, und höchstens dann zweidimensional, wenn sie ein und derselben Ebene angehören.*

Für später sei hier gleich der Gradient von  $F$  angegeben. Ist  $-\mathbf{p}_i$  der Einheitsvektor der Normalen aus  $P$  auf  $a_i$ , so ist der Gradient der Fläche des durch  $a_i$  und  $P$  bestimmten Dreiecks, wie leicht ersichtlich, gleich  $\frac{1}{2} a_i \mathbf{p}_i$ , und daher

$$\text{grad } F = \frac{1}{2} \sum_i a_i \mathbf{p}_i. \quad (8)$$

Es sei  $k$  eine durch Streckenzüge  $s_n$  approximierbare Kurve und das durch  $k$  und  $P$  bestimmte Kegelmanststück soll einen bestimmten Flächeninhalt haben, genauer: wenn  $a_i^{(n)}$  die Strecken der  $n$ -ten Approximation,  $p_i^{(n)}$  die zugehörigen Abstände von  $P$  bedeuten, so soll der Limes

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n, \quad F_n = \frac{1}{2} \sum_i a_i^{(n)} p_i^{(n)}$$

existieren. Da die Näherungsfunktionen  $F_n$  konvex sind, ist es nach I 2d auch  $F$ . Hurwitz hat seinen Satz auch für diesen Grenzfall aufgestellt und direkt bewiesen, indem er zeigte, daß für jede Gerade  $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \geq 0$  ist.

c) Es seien  $f_i$  die Inhalte von endlich vielen beliebig im Raum verteilten ebenen Polygonen und  $h_i$  ihre Abstände von einem variablen Aufpunkt  $P$ . Da die  $h_i$  konvexe Funktionen sind, ist auch

$$V(P) = \frac{1}{3} \sum_i f_i h_i \quad (9)$$

konvex. Das heißt: *Die Summe der Volumina von endlich vielen Pyramiden mit festen Grundflächen und gemeinsamer variabler Spitze  $P$  ist eine konvexe Funktion von  $P$ .*

Wenn  $P$  längs irgend einer Geraden  $g$  ins Unendliche rückt, so wächst mindestens ein  $h_i$  und damit  $V$  unbegrenzt, außer wenn alle  $f_i$  zu  $g$  parallel sind. In diesem Falle ist  $V$  längs  $g$  konstant. Also: *Die Niveauflächen von  $V$  sind endlich oder prismatisch, je nachdem nicht alle oder alle Grundflächen zu einer Geraden parallel sind.*

Daß die Niveauflächen polyedrisch sind, folgt aus der Beschaffenheit des Gradienten. Bedeutet nämlich  $n_i$  den Einheitsvektor der Normalen der  $i$ -ten Grundfläche nach der Seite von  $P$  hin, so ist

$$\text{grad } V = \frac{1}{3} \sum_i f_i n_i. \quad (10)$$

Der Gradient ist also stückweise konstant und unstetig auf den Ebenen der Grundflächen. Er ist daher Null in einem ganzen räumlichen Bereich, sobald er in *einem* keiner Grundflächenebene angehörigen Punkte verschwindet.

Das Minimum von  $V$  wird sicher im Endlichen angenommen. Doch kann dies sowohl in einem einzigen Punkt wie auch in einem ganzen dreidimensionalen Bereich geschehen. Letzteres ist insbesondere dann der Fall, wenn die Grundflächen Seiten eines konvexen Polyeders sind. Es ist unmittelbar klar, daß das ganze Innere des Polyeders Minimumsbereich ist. Für jeden inneren Punkt sind die zugehörigen  $n_i$  sämtlich innere Normale. Der Gradient von  $V$  lässt dann eine einfache physikalische Deutung zu: Er ist der resultierende hydrostatische Druck einer überall unter gleichem Druck stehenden Flüssigkeit auf eine geschlossene Fläche und als solcher Null. Das ebene Analogon dieses Satzes lautet so: Sind  $a_i$  die Seiten eines ebenen geschlossenen Polygons  $P$  und  $n_i$  die zugehörigen inneren Normalen ( $|n_i| = 1$ ), so ist der Ausdruck  $\sum a_i n_i$ , erstreckt über alle Seiten von  $P$ , gleich Null. Dies ist allerdings evident; denn wenn man alle Vektoren  $a_i n_i$  im gleichen Sinne um  $90^\circ$  dreht, so erhält man

eine Vektorsumme, die direkt den Polygonzug  $\mathcal{P}$  darstellt und daher wegen dessen Geschlossenheit verschwindet. Diese beiden Sätze finden später Verwendung; ich werde mich auf den einen oder andern einfach als auf den „Satz vom hydrostatischen Druck“ beziehen.

Auch hier kann der Grenzübergang von Polygonen zu beliebigen ebenen oder gekrümmten Flächenstücken vollzogen werden, sofern nur die Existenz der Grenzfunktionen feststeht. Die Konvexität der Niveauflächen wird dadurch nach I 2 d nicht berührt.

d) Man kann ferner eine Seite jeder Grundfläche auszeichnen, indem man etwa eine weiße und eine schwarze Seite unterscheidet und die betreffenden Pyramiden nur dann mitrechnet, wenn sich die Spitze auf der weißen Seite ihrer Grundfläche befindet. Auch die so erhaltene Volumenfunktion ist konvex. Es genügt, den Nachweis für eine einzige Grundfläche zu erbringen. Ihre Ebene werde als  $xy$ -Ebene und die positive  $z$ -Achse auf der weißen Seite angenommen. Die Höhe  $h$  der durch diese Grundfläche und den Aufpunkt bestimmten Pyramide ist dann gegeben durch

$$h = h(P) = \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$

Auch diese Funktion ist konvex.

**2. Kappenkörper konstanten Volumens.** Aus 1 c) oder d) folgt nun der

*Satz I. Die Niveauflächen des Kappenkörpervolumens eines konvexen Grundkörpers sind konvex und endlich.*

*Beweis.* a) Ich nehme zuerst an, der Grundkörper  $\mathfrak{G}$  sei ein konvexes Polyeder. Wählt man dessen Seiten als Grundflächen von Pyramiden mit Spitze in  $P$ , so sind die Niveauflächen der Summe ihrer Volumina nach 1 c konvex. Die Niveauflächen von  $V$  sind aber damit identisch, da sich  $2V$  vom Gesamtvolumen dieser Pyramiden nur um das konstante Volumen des Grundkörpers unterscheidet.

Man kann aber den Kappenkörper  $\mathfrak{K}$  auch aufbauen aus dem konstanten Grundkörper und dem variablen Ansatz. Letzterer setzt sich aus denjenigen Pyramiden zusammen, deren Basisebenen den Aufpunkt vom Grundkörper trennen. Die Konvexität ihrer Volumenfunktion und damit diejenige von  $V$  folgt dann aus 1 d.

Ist der Grundkörper ein beliebiger konvexer Körper, so kann er bekanntlich durch konvexe Polyeder approximiert werden. Da für jede Approximation die Niveauflächen konvex sind, sind sie es auf Grund von I 2 d auch im Grenzfall.

b) Die Niveauflächen sind nach I 5 c endlich, wenn  $V(P)$  mit  $(x^2 + y^2 + z^2)$  unbegrenzt wächst. Da nun  $\mathfrak{G}$  als konvexer Körper innere Punkte besitzt, gibt es eine Kugel  $\mathfrak{k}$  von nicht verschwindendem Radius, die ganz in  $\mathfrak{G}$  enthalten ist. Der Kappenkörper von  $\mathfrak{k}$  und  $P$  ist ganz in  $\mathfrak{K}$  enthalten und enthält seinerseits ganz einen geraden Kreiskegel, dessen Grundkreis ein Großkreis von  $\mathfrak{k}$  und dessen Spitze  $P$  ist. Das Volumen dieses Kegels und damit  $V$  wächst aber mit der Entfernung des Aufpunktes vom Kugelmittelpunkt unbegrenzt.

**3. Kappenkörper konstanter Oberfläche.** Der Satz von Hurwitz legt folgenden Satz nahe:

*Satz II. Die Niveauflächen der Kappenkörperoberfläche eines konvexen, endlichen und mindestens zweidimensionalen Grundbereiches sind konvex und endlich.*

*Beweis.* Wie in der Einleitung besprochen wurde, setzt sich die Oberfläche  $O$  des Kappenkörpers aus der Kappe  $K$  und dem vom Ansatz unbedeckten Teil  $G$  der Oberfläche des Grundkörpers zusammen.

Ist  $\mathfrak{G}$  ein Eibereich, so ist Satz II eine unmittelbare Anwendung von I b, da  $G$  von  $P$  ganz unabhängig ist.

Ist aber  $\mathfrak{G}$  ein konvexer Körper, so ist die Schattengrenze und damit  $G$  mit  $P$  veränderlich. Daß dennoch die Funktion  $O$  stetig ist, ergibt sich direkt, ebenso die Endlichkeit der Niveauflächen. Nicht so die Konvexität. Um diese nachzuweisen gehe ich aus von einem konvexen Polyeder. Dabei nenne ich kurz Ebene resp. Gerade des Polyeders solche Ebenen oder Gerade, die eine Fläche oder Kante des Polyeders enthalten. Die Ebenen des Polyeders zerlegen den Raum außerhalb — er sei im Folgenden mit  $\overline{\mathfrak{G}}$  bezeichnet — in endlich viele endliche oder unendliche Zellen, in deren jeder die Schattengrenze und damit  $G$  konstant und daher die Funktion  $O(P)$  nach dem Hurwitzschen Satz konvex ist. Unter Voraussetzung durchgängiger Stetigkeit läßt sich dann mit Hilfe der Sätze in I 4 zeigen, daß  $O(P)$  auch im ungeteilten Raum  $\overline{\mathfrak{G}}$  konvex ist.

a) Stetigkeit. Es seien  $P$  und  $P'$  zwei benachbarte Punkte im Abstand  $\varepsilon$ ,  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{K}'$  die zugehörigen Kappenkörper,  $O$  und  $O'$  deren Oberflächen. Denkt man sich zu  $\mathfrak{K}$  den Parallelkörper konstruiert, der außer den Punkten von  $\mathfrak{K}$  noch die Punkte aller Kugeln vom Radius  $\varepsilon$ , deren Zentren in  $\mathfrak{K}$  liegen, enthält, so ist dessen Oberfläche gleich  $O + \varphi(\varepsilon)$ , wo  $\varphi(\varepsilon)$  positiv ist und mit  $\varepsilon$  gegen Null geht. Da auch  $\mathfrak{K}'$  im Parallelkörper liegt, so ist  $O' - O \leqq \varphi(\varepsilon)$ . Auf analoge Weise schließt man:

$O - O' \leqq p'(\varepsilon)$ , wo  $p'(\varepsilon)$  ebenfalls positiv ist und mit  $\varepsilon$  gegen Null geht. Da  $\varepsilon$  frei ist, ist damit die Stetigkeit erwiesen.

b) Konvexität.  $\mathfrak{G}$  sei ein konvexes Polyeder. Ich betrachte zwei benachbarte von den Zellen, in welche die Ebenen von  $\mathfrak{G}$  den Bereich  $\overline{\mathfrak{G}}$  zerteilen. In jeder von ihnen ist  $O(P)$  konvex und im vereinigten Bereich beider nach a) stetig und also nach I 4a daselbst auch konvex, wenn nur der Gradient von  $O$  stetig ist.

Dies ist aber in der Tat der Fall. Es seien  $S$  die zu einer Zelle gehörige Schattengrenze,  $a_i$  die Strecken, die sie zusammensetzen. Dann ist nach Formel (8) in I b

$$\text{grad } O = \frac{1}{2} \sum_i a_i \mathfrak{p}_i.$$

Es sei ferner  $\mathfrak{P}$  dasjenige Randpolygon von  $\mathfrak{G}$ , das in der Trennungsebene der beiden Zellen liegt,  $\Sigma_1$  derjenige Teil von  $\text{grad } O$ , der sich auf die Seiten von  $\mathfrak{P}$  bezieht, und  $\Sigma_2$  der Rest, also

$$\text{grad } O = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Wenn nun  $P$  durch die Trennungsebene in die Nachbarzelle hinübertritt ohne dabei eine Gerade von  $\mathfrak{G}$  zu treffen, so ändert sich  $\Sigma_2$  stetig. Dagegen wird die Resultante  $\Sigma_1$  ersetzt durch eine andere Resultante  $\Sigma'_1$ , deren Komponenten sich auf die übrigen Seiten von  $\mathfrak{P}$  beziehen. Aber auch dieser Ersatz geht in stetiger Weise vor sich, da  $\Sigma_1 = \Sigma'_1$  ist, wenn  $P$  in der Ebene von  $\mathfrak{P}$  (aber auf keiner Geraden von  $\mathfrak{G}$ ) liegt. Dann liegen nämlich die Komponenten von  $\Sigma_1$  und  $\Sigma'_1$  alle in der Ebene von  $\mathfrak{P}$  und zwar sind die der einen Resultanten nach dem Äusseren, die der anderen nach dem Inneren von  $\mathfrak{P}$  gerichtet. Nach dem Satz vom hydrostatischen Druck ist daher  $\Sigma'_1 - \Sigma_1 = 0$ .

Da nun  $O(P)$  im ganzen Bereich  $\overline{\mathfrak{G}}$  stetig und in dem Bereich, der daraus durch Wegnahme der endlich vielen Geraden von  $\mathfrak{G}$  entsteht, konvex ist, so ist es nach I 4b auch in  $\overline{\mathfrak{G}}$  konvex.

Der Uebergang zu einem beliebigen konvexen Körper geschieht analog wie beim Volumen auf Grund von I 2 d.

c) Endlichkeit der Niveaupläne. Sie ist gesichert, wenn  $O(P)$  für alle Punkte außerhalb einer genügend großen Kugel beliebig große Werte annimmt. Da nun  $\mathfrak{G}$  mindestens zweidimensional ist, gibt es einen Kreis  $\mathfrak{k}$  von endlichem Radius, der ganz in  $\mathfrak{G}$  enthalten ist.  $O(P)$  ist größer als die Oberfläche des durch  $\mathfrak{k}$  und  $P$  bestimmten Kappens.

körpers und diese wieder größer als die Fläche eines ganz in diesem Kappenkörper enthaltenen gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis ein Durchmesser von  $\mathfrak{k}$  und dessen Spitze  $P$  ist. Dieses Dreieck wird aber beliebig groß für alle Punkte außerhalb einer genügend großen Kugel.

#### 4. Kappenkörper mit konstantem Integral der mittleren Krümmung.

Es sei zunächst an die Bedeutung des Integrals der mittleren Krümmung erinnert.

Bei einer stetig gekrümmten Fläche versteht man darunter nach *Minkowski*<sup>5)</sup> das Flächenintegral ihrer mittleren Krümmung  $\frac{I}{2} \left( \frac{I}{R_1} + \frac{I}{R_2} \right)$ :

$$M = \int \frac{I}{2} \left( \frac{I}{R_1} + \frac{I}{R_2} \right) d\sigma. \quad (11)$$

Ist die Fläche konvex, so ist  $M$  nach demselben Autor auch gleich dem Integral ihrer Stützfunktion  $H$  erstreckt über die Einheitskugel (mit dem Oberflächenelement  $d\omega$ ):

$$M = \int H d\omega. \quad (12)$$

In dieser Form lässt sich  $M$  auf beliebige konvexe Körper übertragen. Ist insbesondere  $\mathfrak{P}$  ein Polyeder mit den Kantenlängen  $k_i$  und den zugehörigen Außenwinkeln  $\varkappa_i$ , so wird  $M$  gleich der sog. Kantenkrümmung<sup>6)</sup>:

$$M = \frac{I}{2} \sum_i k_i \varkappa_i, \quad (13)$$

wo die Summation über alle Kanten von  $\mathfrak{P}$  zu erstrecken ist. Reduziert sich der konvexe Körper auf einen Eibereich vom Umfang  $L$ , so wird:

$$M = \frac{\pi}{2} L. \quad (14)$$

Die Form (12) legt es nahe,  $M$  als Maß für die Menge der Ebenen zu verwenden, welche einen konvexen Körper treffen. Dies hat im An-

---

<sup>5)</sup> *H. Minkowski, Volumen und Oberfläche*, Ges. Abh. II, S. 241.

<sup>6)</sup> *J. Steiner, Ueber parallele Flächen*, Werke II, S. 175.

schluß an Crofton<sup>7)</sup> Pólya getan<sup>8)</sup>). Ich hebe von seinen Ausführungen als hier in Betracht fallend folgendes hervor:

Legt man eine Ebene fest durch die Länge  $p$  und die räumliche Richtung  $\omega$  des Lotes aus dem Koordinatenursprung auf die Ebene, so kann das Integral

$$\mu(\mathfrak{E}) = \int dp d\omega,$$

erstreckt über alle Ebenen einer bestimmten Menge  $\mathfrak{E}$ , als Maß dieser Ebenenmenge betrachtet werden. Wendet man es auf die Ebenen an, die einen konvexen Körper mit der Stützfunktion  $H$  treffen, so erhält man den Ausdruck (12). Das Maß  $\mu(\mathfrak{E})$  besitzt folgende Eigenschaften:

1. Es ist nicht negativ:  $\mu(\mathfrak{E}) \geq 0$ .
2. Es ist distributiv: Sind  $\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$  zwei gliedfremde Ebenenmengen, so ist  $\mu(\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2) = \mu(\mathfrak{E}_1) + \mu(\mathfrak{E}_2)$ .
3. Es ist bewegungsinvariant: Wird die Ebenenmenge  $\mathfrak{E}$  als starres System bewegt, so ändert sich  $\mu(\mathfrak{E})$  nicht.

Die Form des Integrals  $\mu(\mathfrak{E})$  zeigt, daß dieses Ebenenmaß die Dimension einer Linie hat. Als Folge davon kommt insbesondere folgendes in Betracht. Eine Figur  $\mathfrak{f}$  werde von einer Ebenenmenge  $\mathfrak{E}$  in einer bestimmten Weise getroffen und in derselben Weise werde eine zu  $\mathfrak{f}$  ähnliche Figur  $\mathfrak{f}'$  von der Ebenenmenge  $\mathfrak{E}'$  getroffen. Verhalten sich dann die linearen Abmessungen von  $\mathfrak{f}$  zu den entsprechenden von  $\mathfrak{f}'$  wie  $1:q$ , so ist

$$\mu(\mathfrak{E}') = q \mu(\mathfrak{E}).$$

Im Beweise des folgenden Satzes kommt es wesentlich darauf an, daß (12) Maß einer Ebenenmenge ist.

*Satz III. Die Niveauflächen des Integrals der mittleren Krümmung des Kappenkörpers eines endlichen konvexen Bereiches sind konvex, endlich und nirgends flach.*

*Beweis.* Der Satz gilt auch dann, wenn sich der Grundbereich auf einen einzigen Punkt reduziert, doch ist dieser Fall ohne Interesse.  $\mathfrak{G}$  soll daher mindestens eindimensional sein.

a) Es seien  $A$  und  $B$  zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke ganz außerhalb  $\mathfrak{G}$  liege. Sei ferner  $C$  ein innerer Punkt der Verbindungsstrecke  $AB$ :

$$C = pA + qB, \quad p, q > 0, \quad p + q = 1.$$

<sup>7)</sup> M. W. Crofton, On the Theory of Local Probability etc., Phil. Trans., Bd. 158, S. 181—199, (1868).

<sup>8)</sup> G. Pólya, Ueber geom. Wahrscheinlichkeiten, Sitzungsber. d. K. A. d. W., Bd. 126, S. 319—328, (1917).

Die zugehörigen Kappenkörper seien mit  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ , die bez. Werte von  $M$ , also die Maße der resp.  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  treffenden Ebenenmengen, mit  $a, b, c$  bezeichnet.

Von den Mengen  $a, b, c$  läßt sich je eine Teilmenge solcher Ebenen abspalten, welche die Strecke  $\overline{AB}$  nicht treffen. Diese drei Teilmengen sind gleich, es sei  $\tau$ . Beweis: Denkt man sich einen Kappenkörper, wie in der Einleitung geschildert, aus Strecken aufgebaut, so erkennt man, daß jede Ebene, welche den Aufpunkt vom Grundkörper trennt, den Kappenkörper treffen muß. Trifft nun eine Ebene den einen der drei Kappenkörper, etwa  $\mathfrak{A}$ , aber  $\overline{AB}$  nicht, so trifft sie entweder  $\mathfrak{G}$  selbst und damit auch  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$ , oder sie trennt  $A$  von  $\mathfrak{G}$ . Da sie aber  $A, B$  und  $C$  auf einerlei Seite läßt, so trennt sie auch  $B$  und  $C$  von  $\mathfrak{G}$  und trifft daher  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  auch.

Die Restmengen

$$\alpha = a - \tau, \beta = b - \tau, \gamma = c - \tau$$

enthalten nur noch solche Ebenen, die  $\overline{AB}$  treffen. Jede dieser Mengen läßt sich wieder in zwei Teile spalten, so daß die Ebenen des einen  $\overline{AC}$ , die des andern  $\overline{BC}$  treffen. Die  $\overline{AC}$  treffende Teilmenge kennzeichne ich durch den Index 1, die  $\overline{BC}$  treffende durch den Index 2:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2, \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

(Die Menge der beiden Teilen gemeinsamen Ebenen durch  $C$  ist von nur zweidimensionaler Mächtigkeit und daher ohne Einfluß).

Aus demselben Grunde wie oben bei  $\tau$  ist aber  $\alpha_2 = \gamma_2$  und  $\beta_1 = \gamma_1$ , und daher

$$\gamma = \alpha_2 + \beta_1.$$

Nun ist aber

$$\alpha_2 < p \alpha.$$

In der Tat, würde man  $\mathfrak{A}$  mit  $A$  als Zentrum im Verhältnis  $\overline{AB} : \overline{AC} = 1 : q$  ähnlich verkleinern, so wäre, wenn  $\alpha'_1$  das Maß derjenigen Ebenen, die  $\overline{AC}$  und das verkleinerte  $\mathfrak{A}$  treffen, bedeutet,  $\alpha'_1 = q \alpha$ . Aber es ist offenbar  $\alpha_1 > \alpha'_1$ , unter Ausschluß der Gleichheit, und daher  $\alpha_1 > q \alpha$ , also  $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 < p \alpha$ , wie behauptet. Ebenso ist

$$\beta_1 < q \beta.$$

Daraus folgt:

$$\gamma < p\alpha + q\beta,$$

und hieraus durch Addition von  $\tau$ :

$$c < p\alpha + q\beta.$$

Dies ist aber die Konvexitätseigenschaft.

Da in der letzten Ungleichung das Gleichheitszeichen ausgeschlossen ist, können die Niveauflächen keine flachen Stellen haben.

b) Die Endlichkeit der Niveauflächen ergibt sich wieder analog wie bei Volumen und Oberfläche. Jeder Kappenkörper enthält sicher ein Dreieck mit einer Ecke im Aufpunkt und der Gegenseite im Grundkörper. Nach (14) ist  $M$  dem Umfang dieses Dreiecks proportional und wächst daher unbegrenzt mit der Entfernung des Aufpunktes vom Grundkörper.

**5 Geschlossener Faden konstanter Fläche oder Länge.** Das ebene Analogon eines Kappenkörpers wird gebildet durch die kleinste konvexe Hülle eines Eibereiches und eines außerhalb aber in dessen Ebene gelegenen Aufpunktes  $P$ . Man kann sich diese Hülle realisiert denken durch einen geschlossenen Faden, der einmal um  $\mathfrak{E}$  gelegt ist und in  $P$  durch einen Stift gespannt wird.

a) Denkt man sich diesen Faden elastisch, und bewegt man den spannenden Stift  $P$  so, daß die von dem Faden umschlossene Fläche konstant bleibt, so erhält man das ebene Analogon zum Volumensatz I:

*Die Fläche der kleinsten konvexen Hülle eines Eibereiches  $\mathfrak{E}$  und eines außerhalb  $\mathfrak{E}$  jedoch in dessen Ebene variablen Aufpunktes  $P$  ist als Funktion von  $P$  konvex.*

Der Beweis kann auf verschiedene Arten geführt werden. Diese seien kurz skizziert.

Zunächst kann man den Satz als Spezialfall des Oberflächensatzes II auffassen, indem man als Grundbereich einen Eibereich nimmt, was ja erlaubt ist, und den Aufpunkt in dessen Ebene bannt. Die Niveaulinien in dieser Ebene sind als ebene Schnitte konvexer Niveauflächen selber konvex.

Ein direkter Beweis kann demjenigen des Volumensatzes nachgebildet werden. Dabei wird ein beliebiger Eibereich durch konvexe Polygone approximiert. Wählt man ein solches als Grundbereich, so kann man die Hüllfläche auf zweierlei Weise aufbauen. Nimmt man alle durch

den Aufpunkt und je eine Seite des Grundpolygons bestimmten Dreiecke und fügt noch die konstante Polygonfläche hinzu, so erhält man die doppelte Hüllfläche. Nimmt man aber außer der Polygonfläche nur diejenigen der genannten Dreiecke, deren Basis den Aufpunkt vom Grundpolygon trennt, so erhält man die Hüllfläche einfach. Im ersten Fall folgt die Konvexität aus 1b, im zweiten aus dem ebenen Analogon von 1d.

b) Man kann sich den geschlossenen Faden auch unelastisch, also von konstanter Länge denken, wie bei der bekannten Fadenkonstruktion der Ellipse. Nach Crofton ist der Umfang eines Eibereiches proportional dem Maß der Geraden die diesen Eibereich treffen. Daher ist der folgende Satz das ebene Analogon zu Satz III über das Integral der mittleren Krümmung:

*Der Umfang der kleinsten konvexen Hülle eines Eibereiches  $\mathfrak{E}$  und eines außerhalb  $\mathfrak{E}$  jedoch in dessen Ebene variablen Aufpunktes  $P$  ist eine konvexe Funktion von  $P$ .*

Der Satz kann im Anschluß an die früheren Ausführungen auf folgende drei Arten bewiesen werden, wie kurz angedeutet sei.

Erstens kann man ihn als Spezialfall des Satzes über das Integral der mittleren Krümmung betrachten. Man braucht nur als Grundbereich einen Eibereich zu nehmen, und den Aufpunkt in dessen Ebene zu bannen. Der Kappenkörper wird dann ebenfalls ein Eibereich, und sein Integral der mittleren Krümmung geht nach (14) bis auf einen Faktor in dessen Umfang über.

Zweitens kann man die Beweismethode eben dieses Satzes III sinngemäß auf den Fall der Ebene übertragen, indem man an Stelle des Ebenenmaßes das oben genannte Geradenmaß treten läßt.

Drittens kann der Beweis demjenigen des Oberflächensatzes nachgebildet werden. Als Grundbereich diene zunächst ein konvexes Polygon. Dessen verlängerte Seiten teilen seine Ebene in endlich viele Zellen ein. In jeder derselben ist der Umfang der Hülle im variablen Teil nichts anderes als die Abstandssumme des Aufpunktes von zwei festen Punkten und daher eine konvexe Funktion mit Ellipsenbögen als Niveaulinien. Diese Ellipsenbögen schließen sich längs der Trennungsgeraden der einzelnen Zellen mit stetiger Tangente aneinander, da der Gradient nach (6) beim Uebergang in eine Nachbarzelle stetig bleibt. Der allgemeine Fall ergibt sich durch Grenzübergang.

### III. Kapitel

#### Berechnung der Gradienten. Beispiele

**1. Gradient des Volumens des Kappenkörpers.** Der Grundkörper sei zunächst ein konvexes Polyeder. Der Kappenkörper besteht aus dem konstanten Grundkörper und dem variablen Ansatz. Daher ist der Volumengradient nach Formel (10) in II 1c gegeben durch

$$\frac{1}{3} \sum_i^* f_i \mathbf{n}_i,$$

wobei die Summation nur über den vom Ansatz bedeckten Teil der Oberfläche des Grundkörpers zu erstrecken ist, was durch den  $*$  angedeutet werden soll. Dieser Ausdruck kann, wie früher schon hervorgehoben wurde, als ein Drittel des hydrostatischen Druckes gedeutet werden. Da dieser bei einer geschlossenen Fläche Null ist, und da die Fläche, über welche summiert werden soll, mit der Kappe  $K$  eine geschlossene Fläche bildet, so kann die Summation auch über  $K$  erstreckt werden. Durch Grenzübergang folgt hieraus:

*Satz IV. Bedeutet  $\mathbf{n}$  den Einheitsvektor der äußeren Normalen und  $do$  das Oberflächenelement der Kappe  $K$  des Kappenkörpers eines konvexen Körpers, so ist der Gradient des Kappenkörpervolumens gegeben durch:*

$$\text{grad } V(P) = \frac{1}{3} \int_K \mathbf{n} do. \quad (15)$$

Ist der Grundkörper ein Polyeder, so ist  $\text{grad } V$  auf dessen Ebenen unstetig.

**2. Gradient der Oberfläche des Kappenkörpers.** Der Grundbereich sei zunächst wieder ein konvexes Polyeder. Nach II 3b ist für jede der Zellen, in welche die Ebenen des Polyeders den Raum außerhalb  $\mathfrak{G}$  zerlegen,

$$\text{grad } O = \frac{1}{2} \sum_i a_i \mathbf{p}_i,$$

wo die Summe über alle Strecken der zu der betreffenden Zelle gehörenden Schattengrenze zu erstrecken ist. Durch Grenzübergang folgt hieraus:

*Satz V.* Bedeutet  $\mathfrak{p}$  den Einheitsvektor der Normalen aus dem Aufpunkt  $P$  auf eine Tangente der zu  $P$  gehörigen Schattengrenze  $\mathfrak{S}$  eines konvexen Körpers  $\mathfrak{G}$  und  $ds$  das Bogenelement von  $\mathfrak{S}$  im Berührungs punkt der Tangente, so ist der Gradient der Oberfläche des Kappenkörpers  $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}, P)$  gegeben durch

$$\text{grad } O(P) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{S}} \mathfrak{p} \, ds. \quad (16)$$

Ist der Grundkörper ein Polyeder  $\mathfrak{P}$ , so ist  $\text{grad } O$ , wie in II 3b gezeigt wurde, im ganzen Definitionsbereich außerhalb der Geraden von  $\mathfrak{P}$  stetig.

**3. Gradient des Integrals der mittleren Krümmung des Kappenkörpers.** a) Der Grundbereich sei wieder ein Polyeder. Dann ist auch der Kappenkörper ein solches, und  $M$  ist durch dessen Kantenkrümmung (13) gegeben.

Es seien  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , die Ecken der Schattengrenze des Grundpolyeders bez.  $P$ ,  $\alpha_{i, i+1} = \overline{A_i A_{i+1}}$  ihre einzelnen Strecken und deren Längen und  $\alpha_{i, i+1}$  die zugehörigen Außenwinkel am Kappenkörper. Ferner sollen bedeuten:  $r_i = \overline{PA_i}$  und  $\varphi_i$  den zugehörigen Außenwinkel,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dann ist nach (13)

$$2M = \sum_{i=1}^n r_i \varphi_i + \sum_{i=1}^n \alpha_{i, i+1} \alpha_{i, i+1} + \Sigma. \quad (17)$$

Dabei ist  $\alpha_{n, n+1} \alpha_{n, n+1} = \alpha_{n, 1} \alpha_{n, 1}$ , und  $\Sigma$  besteht aus Gliedern, die von  $P$  unabhängig sind solange die Schattengrenze unverändert bleibt.

b) Die Berechnung des Gradienten erfordert eine kleine Zwischenrechnung. Es sei  $\varphi$  der Winkel zwischen den Normalen  $\mathfrak{m}$  und  $\mathfrak{n}$  zweier zeitlich variabler Ebenen  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$ . Ferner bedeute  $\mathfrak{m} \mathfrak{n} = (\mathfrak{m} \mathfrak{n})$  das skalare und  $[\mathfrak{m} \mathfrak{n}]$  das vektorielle Produkt der Vektoren  $\mathfrak{m}$  und  $\mathfrak{n}$ , und die Ableitung nach der Zeit sei durch einen übergesetzten Punkt markiert.

Da  $\mathfrak{m} \mathfrak{m} = \mathfrak{n} \mathfrak{n} = 1$  ist, so ist

$$\cos \varphi = \mathfrak{m} \mathfrak{n},$$

und

$$-\sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = \dot{\mathfrak{m}} \mathfrak{n} + \mathfrak{m} \dot{\mathfrak{n}}. \quad (18)$$

Nun ist allgemein, wenn  $a, b, c, d$  vier Vektoren bedeuten,

$$[a b] [c d] = (a c) (b d) - (b c) (a d),$$

und weil auch  $\dot{m} \dot{n} = \dot{n} \dot{m} = 0$  ist, so folgt

$$\begin{aligned} \dot{m} \dot{n} &= (\dot{m} m) (\dot{n} n) - (\dot{m} n) (\dot{m} n) = [\dot{m} \dot{m}] [\dot{n} \dot{n}], \\ \dot{m} \dot{n} &= \dot{n} \dot{m}. \end{aligned}$$

Damit folgt aus (18):

$$-\dot{\varphi} = [\dot{m} \dot{m}] \frac{[\dot{m} \dot{n}]}{\sin \varphi} + [\dot{n} \dot{n}] \frac{[\dot{n} \dot{m}]}{\sin \varphi}. \quad (19)$$

Nun ist  $[\dot{m} \dot{n}] / \sin \varphi$  ein Einheitsvektor in Richtung der Schnittlinie von  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$ . Sind ferner  $\dot{\mu}$  und  $\dot{\nu}$  die Winkelgeschwindigkeiten von  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  um ihre momentanen Drehachsen, so sind  $[\dot{m} \dot{m}]$  und  $[\dot{n} \dot{n}]$  Vektoren, die nach Größe, Richtung und Sinn die momentane Drehgeschwindigkeit angeben. Man beachte, daß die rechte Seite von (19) in  $m$  und  $n$  symmetrisch ist.

c) Es seien nun  $m$  und  $n$  die äußeren Normalen der Kappenebenen  $(P, \alpha_{i-1, i})$  und  $(P, \alpha_{i, i+1})$ . Ihre festen Drehachsen sind  $\alpha_{i-1, i}$  und  $\alpha_{i, i+1}$  mit den resp. Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\alpha}_{i-1, i}$  und  $\dot{\alpha}_{i, i+1}$ . Ferner sei  $a_{i, i+1}$  der Einheitsvektor der Strecke  $\alpha_{i, i+1}$ , dessen Sinn so festgesetzt sei, daß

$$[\dot{n} \dot{n}] = \dot{\alpha}_{i, i+1} a_{i, i+1}$$

wird. Endlich sei zur Abkürzung

$$r_i \frac{[\dot{m} \dot{n}]}{\sin \varphi_i} = \mathfrak{r}_i$$

gesetzt. Dann wird nach (19)

$$-r_i \dot{\varphi} = \dot{\alpha}_{i-1, i} (a_{i-1, i} \mathfrak{r}_i) - \dot{\alpha}_{i, i+1} (a_{i, i+1} \mathfrak{r}_i).$$

Summiert man über  $i$  von 1 bis  $n$ , ordnet nach den  $\alpha_i$  und beachtet, daß die Indices modulo  $n$  laufen, so kommt

$$-\sum_{i=1}^n r_i \dot{\varphi}_i = \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_{i, i+1} (a_{i, i+1} \mathfrak{r}_{i+1} - \mathfrak{r}_i).$$

Gemäß der Bedeutung der  $r_i$  und  $\alpha_i$  ist aber der Vektor  $r_{i+1} - r_i$  nach Größe und Sinn gleich  $\alpha_{i, i+1} \alpha_{i, i+1}$ , unabhängig vom Umlaufssinn der Numerierung. Daher wird

$$\sum_{i=1}^n r_i \dot{\varphi}_i = - \sum_{i=1}^n \alpha_{i, i+1} \dot{\alpha}_{i, i+1}.$$

Wendet man dieses Resultat auf (17) an, so kommt, bei fester Schattengrenze,

$$2 \dot{M} = \sum_{i=1}^n \dot{r}_i \varphi_i.$$

Somit ist

$$\text{grad } M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i \text{grad } r_i.$$

Bezeichnet endlich  $e_i$  den Einheitsvektor, der mit  $\vec{A_i P}$  gleichsinnig parallel ist, so wird

$$\text{grad } M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i e_i. \quad (20)$$

d) Durch Grenzübergang folgt hieraus:

*Satz VI.* Bedeutet  $e$  den Einheitsvektor der Mantellinien des Tangentialkegels aus einem Aufpunkt  $P$  an einen konvexen Grundkörper  $\mathfrak{G}$  (mit Sinn von der Schattengrenze auf  $\mathfrak{G}$  gegen  $P$  hin) und  $d\varphi$  den zugehörigen Kontingenzwinkel der Tangentialebene, so ist der Gradient des Integrals der mittleren Krümmung des Kappenkörpers  $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}, P)$  gegeben durch

$$\text{grad } M(P) = \frac{1}{2} \int e d\varphi, \quad (21)$$

wobei das Integral über den ganzen momentanen Tangentialkegel zu erstrecken ist.

Das Integral auf der rechten Seite von (21) spielt in bezug auf die Kappe eine analoge Rolle wie der Steinersche Krümmungsschwerpunkt bei einer ebenen Kurve.

e) Ist  $\mathfrak{G}$  ein Polyeder, und tritt beim Wechsel der Schattengrenze eine Ecke  $A$  neu auf oder scheidet sie aus, so wird entweder  $PA$  nur

verlängert oder nur verkürzt, wodurch das betreffende Glied von  $\text{grad } M$  überhaupt nicht geändert wird (Durchgang von  $P$  durch eine Gerade von  $\mathfrak{G}$ ), oder der Winkel  $\varphi$  ist in dem betreffenden Glied gerade Null (Durchgang durch eine Ebene von  $\mathfrak{G}$ ). Daraus folgt, daß  $\text{grad } M$  im ganzen Definitionsbereich ausnahmslos stetig ist.

**4. Anwendung der Resultate auf den Parallelkörper eines Kappenkörpers.** Die folgenden Bemerkungen sollen die geometrische Bedeutung der Gradientenformeln hervorheben. Der größeren Anschaulichkeit wegen werde der Grundkörper als konvexes Polyeder vorausgesetzt.

Man denke sich zu einem Kappenkörper  $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}, P)$  den Parallelkörper  $\mathfrak{K}_\lambda$  mit dem Radius  $\lambda$  konstruiert. Er entsteht aus  $\mathfrak{K}$  durch Aufsetzen von prismatischen Platten der Dicke  $\lambda$  auf die Flächen von  $\mathfrak{K}$  und Ausfüllen der entstehenden Lücken durch passende Zylindersektoren längs der Kanten und Kugelteile an den Ecken. Dieser Parallelkörper  $\mathfrak{K}_\lambda$  ist die kleinste konvexe Hülle des mit dem Radius  $\lambda$  konstruierten Parallelkörpers  $\mathfrak{G}_\lambda$  des Grundpolyeders und einer Kugel  $\mathfrak{k}_\lambda$  mit dem Radius  $\lambda$  um den Aufpunkt, also ein „Kappenkörper mit Kugel spitze“ von  $\mathfrak{G}_\lambda$ .

$\mathfrak{K}_\lambda$  besteht aus  $\mathfrak{G}_\lambda$  und einem Ansatz. Die Oberfläche von  $\mathfrak{G}_\lambda$  zerfällt in einen vom Ansatz bedeckten und einen unbedeckten Teil. Denkt man sich die Kugel  $\mathfrak{k}_\lambda$  leuchtend, so ist der bedeckte Teil beleuchtet oder im Halbschatten, der unbedeckte Teil im Kernschatten. Daher nenne ich die gemeinsame Grenze der beiden Teile *Kernschattengrenze*. Die Kernschattengrenze setzt sich abwechselnd aus Strecken, die den entsprechenden Strecken der Schattengrenze von  $\mathfrak{G}$  kongruent und parallel sind, und aus Kreisbögen zusammen. Zwischen ihr und der Schattengrenze verläuft ein geschlossenes Band von der Breite  $\lambda$ , das sich abwechselnd aus Rechtecken und Kreissektoren zusammensetzt, die auf den betreffenden Flächen und Kanten von  $\mathfrak{K}$  senkrecht stehen.

Bezeichnen  $V$ ,  $O$  und  $M$ , wie früher, Volumen, Oberfläche und Kan tenkrümmung von  $\mathfrak{K}$  und  $V_\lambda$ ,  $O_\lambda$  Volumen und Oberfläche von  $\mathfrak{K}_\lambda$ , so folgt aus dem Aufbau von  $\mathfrak{K}_\lambda$ :

$$V_\lambda = V + \lambda \cdot O + \lambda^2 \cdot M + \lambda^3 \cdot \frac{4\pi}{3}.$$

Bildet man auf beiden Seiten dieser Gleichung den Gradienten, so kommt

$$\text{grad } V_\lambda = \text{grad } V + \lambda \text{ grad } O + \lambda^2 \text{ grad } M. \quad (22)$$

Gemäß den Gradientenformeln ist nun  $\text{grad } V$  gleich dem dritten Teil des (inneren) hydrostatischen Druckes auf die Kappe von  $\mathfrak{K}$ . Ferner stellt  $\lambda \text{grad } O$  die Hälfte des hydrostatischen Druckes auf die Rechtecke und  $\lambda^2 \text{grad } M$  den hydrostatischen Druck auf die Kreissektoren des zwischen der Schattengrenze von  $\mathfrak{G}$  und der Kernschattengrenze von  $\mathfrak{G}_\lambda$  eingespannten Bandes dar, beide gegen  $P$  hin gerichtet. Nach (22) ist  $\text{grad } V_\lambda$  die Resultante dieser drei Kräfte.

**5. Gradient der Fläche oder Länge eines geschlossenen Fadens.** Der Vollständigkeit halber seien auch diese beiden Gradienten angegeben. Ihre Herleitung ist besonders einfach und soll daher nur ange deutet werden.

Der Grundbereich sei ein konvexes Polygon. Durch den Aufpunkt  $P$  gehen zwei Stützgeraden desselben, ihre Berührungs punkte seien  $A$  und  $B$ . Für eine genügend kleine Umgebung von  $P$  wird dann der variable Teil der Fläche des geschlossenen Fadens durch das Dreieck  $ABP$  gebildet, während die Abstände  $\overline{AP}$  und  $\overline{BP}$  den variablen Teil der Fadenlänge ausmachen. Durch Anwendung von (8) und (6) und Grenzübergang folgt hieraus:

a) Ist  $\mathfrak{E}$  ein fester Eibereich,  $P$  ein außerhalb  $\mathfrak{E}$  aber in dessen Ebene variabler Aufpunkt, und bedeutet  $s$  die Berührungssehne der Tangenten aus  $P$  an  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{p}$  den Einheitsvektor der Normalen aus  $P$  auf  $s$ , so ist der Gradient der Fläche der kleinsten konvexen Hülle von  $\mathfrak{E}$  und  $P$  gegeben durch

$$\text{grad } F(P) = \frac{1}{2} s \mathfrak{p}.$$

b) Ist  $\mathfrak{E}$  ein fester Eibereich und  $P$  ein außerhalb  $\mathfrak{E}$  aber in dessen Ebene variabler Aufpunkt, und bedeuten  $\mathfrak{e}_1$  und  $\mathfrak{e}_2$  Einheitsvektoren parallel zu den Tangenten durch  $P$  an  $\mathfrak{E}$ , beide mit Sinn von  $\mathfrak{E}$  nach  $P$  hin, so ist der Gradient der Länge  $L$  der kleinsten  $\mathfrak{E}$  und  $P$  umfassenden Eilinie gegeben durch

$$\text{grad } L(P) = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2.$$

Zu denselben Resultaten gelangt man auch durch Spezialisierung der Formeln (16) und (20), bei letzterer unter Berücksichtigung von (14).

**6. Beispiele und Korollarien.** a) Schlingt man in der Ebene einen geschlossenen Faden um einen Kreis und einen spannenden Stift  $P$ , so

bleibt die von dem Faden umschlossene Fläche konstant, wenn  $P$  einen zum gegebenen konzentrischen Kreis beschreibt. Durch affine Transformation folgt hieraus:

*Schlingt man einen geschlossenen, elastischen Faden um eine Ellipse  $\mathfrak{E}$  und einen spannenden Stift  $P$ , so bleibt die von dem Faden umschlossene Fläche dann und nur dann konstant, wenn  $P$  eine mit  $\mathfrak{E}$  konzentrische und homothetische Ellipse beschreibt.*

Dasselbe Resultat ergibt sich auch direkt mit Hilfe des Ausdrucks für den Gradienten. Dieser ist nach 5 a zur Berührungssehne der Tangenten aus  $P$  an  $\mathfrak{E}$  normal, und da die Verbindung von  $P$  mit dem Zentrum  $Z$  der Ellipse zur Berührungssehne konjugiert ist, so ist die Tangente an die Niveaulinie in  $P$  nicht nur parallel zur Berührungssehne, sondern auch zu der Tangente von  $\mathfrak{E}$  in seinem Schnitt mit  $PZ$ , woraus die Homothetie unmittelbar folgt.

b) Da der Gradient der Fadenlänge nach 5 b zur Winkelhalbierenden der beiden Tangenten aus  $P$  an die Ellipse parallel ist, und da andererseits diese Winkelhalbierende Normale an die durch  $P$  gehende mit  $\mathfrak{E}$  konfokale Ellipse ist, so ergibt sich der bekannte Satz von *Graves*<sup>9)</sup>:

*Schlingt man einen geschlossenen Faden um eine Ellipse und einen spannenden Stift  $P$ , so bleibt die Länge des Fadens dann und nur dann konstant, wenn  $P$  eine zur gegebenen konfokale Ellipse beschreibt.*

c) Der Uebergang von a) auf den Raum gibt ohne weiteres:

*Die Niveauflächen des Kappenkörpervolumens eines Ellipsoides bilden mit diesem eine Schar konzentrischer, homothetischer Ellipsoide.*

d) Es sei  $\mathfrak{P}$  ein Kreistangentenpolygon und  $P$  ein Punkt auf der Normalen zur Ebene von  $\mathfrak{P}$  durch den Inkreismittelpunkt. Bildet man den Gradienten der Fläche des Kappenkörpers von  $\mathfrak{P}$  und  $P$ , so erkennt man, daß sich die Komponenten seiner Glieder parallel zur Ebene von  $\mathfrak{P}$  gegenseitig aufheben, da sie bis auf einen konstanten Faktor dem (ebenen) hydrostatischen Druck auf die Berandung von  $\mathfrak{P}$  gleichkommen. Die Kappenkörperoberfläche ist also im Punkte  $P$  für die Ebene durch  $P$  parallel zu  $\mathfrak{P}$  ein Minimum und zwar das einzige, weil  $\mathcal{O}$  nach den Ueberlegungen in II 1 b auf keiner Geraden durch  $P$  parallel zu  $\mathfrak{P}$  konstant sein kann. Daraus folgt:

*Eine Pyramide mit gegebener, einem Kreise umschriebener Grundfläche und gegebenem Volumen besitzt dann und nur dann minimale Oberfläche, wenn sie in dem Sinne gerade ist, daß die Projektion ihrer*

<sup>9)</sup> *Ch. Graves, Two geometric memoirs etc., S. 77, Dublin 1841.*

*Spitze in den Mittelpunkt des Inkreises der Grundfläche fällt. Es ist dies ein Sonderfall eines allgemeineren Satzes von Lhuilier<sup>10)</sup>.*

e) Ersetzt man in der vorigen Ueberlegung das Kreistangentenpolygon durch einen zentrisch symmetrischen Eibereich  $\mathfrak{E}$ , dessen Zentrum mit der Projektion von  $P$  auf seine Ebene zusammenfällt, so verschwinden die zu  $\mathfrak{E}$  parallelen Komponenten des Oberflächengradienten ebenfalls, diesmal wegen der zentrischen Symmetrie, und da auch hier die Kappenkörperoberfläche auf keiner Geraden durch  $P$  parallel zu  $\mathfrak{E}$  konstant sein kann, so folgt:

*Ein Kegel mit gegebener, zentrisch symmetrischer Grundfläche und gegebenem Volumen hat dann und nur dann minimale Oberfläche, wenn er in dem Sinne gerade ist, daß die Projektion seiner Spitze in das Symmetriezentrum seiner Grundfläche fällt.*

f) Man denke sich einen schief abgeschnittenen Rotationskegel. Er diene als Grundkörper für die Kappenkörperbildung. Welches sind in der Basisebene des Kegels die Niveaulinien der Oberfläche des Kappenkörpers? Um diese Frage zu beantworten, untersuche ich den Gradienten der Oberfläche, deren Projektion auf die Basisebene ja die Normale  $\mathfrak{n}$  der gesuchten Niveaulinien liefert. Es sei  $S$  die Spitze des Kegels,  $P$  ein Aufpunkt in seiner Basisebene außerhalb der Basisellipse,  $s$  die Berührungssehne der Tangenten aus  $P$  an diese, und die Bezeichnung der Berührungspunkte  $B_1$  und  $B_2$  selber sei so gewählt, daß das Dreieck  $B_1PB_2$  von  $S$  aus gesehen positiv umlaufen ist. Ferner sollen  $\mathfrak{m}_1$  und  $\mathfrak{m}_2$  die Vektoren  $\vec{SB_1}$  und  $\vec{SB_2}$ ,  $\mathfrak{n}_1$  und  $\mathfrak{n}_2$  die äußeren Normalen der Tangentialebenen  $PSB_1$  und  $PSB_2$  ( $\mathfrak{n}_1^2 = \mathfrak{n}_2^2 = 1$ ) und  $-\mathfrak{p}$  den Einheitsvektor der Normalen aus  $P$  auf  $B_1B_2$  bedeuten. Nach der Gradientenformel (16) ist dann

$$2 \operatorname{grad} \mathcal{O} = [\mathfrak{n}_1 \mathfrak{m}_1] - [\mathfrak{n}_2 \mathfrak{m}_2] + s \mathfrak{p}.$$

Nun ist der Vektor  $\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2$  normal zur inneren Winkelhalbierenden-Ebene der beiden Tangentialebenen  $PSB_1$  und  $PSB_2$ . Wegen der Rotationssymmetrie des Kegels ist diese Ebene normal zu  $SB_1B_2$ , so daß die drei Vektoren  $\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2$ ,  $\mathfrak{m}_1$ ,  $\mathfrak{m}_2$  in einer Ebene liegen:

$$(\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2, [\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2]) = o,$$

---

<sup>10)</sup> S. Lhuilier, *Polygonométrie etc.*, 3. Kap., S. 116, Genève et Paris 1789.

oder umgeformt

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_2[\mathbf{n}_1 \mathbf{m}_1] + \mathbf{m}_1[\mathbf{n}_2 \mathbf{m}_2] &= \mathbf{o}, \\ (\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1, [\mathbf{n}_1 \mathbf{m}_1] - [\mathbf{n}_2 \mathbf{m}_2]) &= \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber wegen  $(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1, \mathbf{p}) = \mathbf{o}$ :

$$(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1, \operatorname{grad} O) = \mathbf{o},$$

d. h.  $\operatorname{grad} O$  und damit  $\mathbf{n}$  ist zur Berührungssehne  $B_1 B_2$  normal. Hieraus schließt man wie unter a), daß die Niveaulinien zur Basisellipse konzentrisch und homothetisch sind. Also:

*Ist  $\mathfrak{G}$  ein schief abgeschnittener Rotationskegel und  $P$  ein in dessen Basisebene variabler Aufpunkt, so bilden die Niveaulinien der Oberfläche des Kappenkörpers  $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}, P)$  mit der Basisellipse des Kegels eine konzentrische homothetische Schar.*

Da auf einer solchen Niveaulinie nach a) der in der Basisebene liegende Teil der Kappenkörperoberfläche für sich allein konstant ist, so ist es auch der übrige Teil. In dieser Form hat *Hirsch* den einen seiner beiden in der Einleitung erwähnten Sätze ausgesprochen.

g) Man nehme als Grundkörper einen Doppelkegel, der aus zwei in bezug auf die gemeinsame Basisebene  $\mathfrak{B}$  symmetrischen, geraden, elliptischen Kegeln gebildet wird, und man betrachte die Oberfläche desjenigen Kappenkörpers, dessen Aufpunkt in der Symmetrieebene  $\mathfrak{B}$  liegt. Die Buchstaben  $S, P, B_1, B_2$  und die Vektoren  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  sollen bezügl. des einen Kegels die gleiche Bedeutung haben wie oben, und es sei  $Z$  das Zentrum der Basisellipse. Dann ist  $\operatorname{grad} O$  gleich der Projektion von

$$\mathbf{u} = [\mathbf{n}_1 \mathbf{m}_1] - [\mathbf{n}_2 \mathbf{m}_2],$$

auf  $\mathfrak{B}$ . Nun ist  $\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$  ein Vektor, der in  $S$  entspringend die Berührungssehne  $B_1 B_2$  halbiert und daher in der Ebene  $SPZ$  liegt (elliptischer Kegel), welche zu  $\mathfrak{B}$  normal ist (gerader elliptischer Kegel). Ferner ist der Vektor  $[\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2]$  zu  $SP$  parallel. Folglich ist der Vektor

$$\mathbf{v} = [[\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2], \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2]$$

zu  $\mathfrak{B}$  parallel. Wegen der Identität

$$[[\mathbf{a} \mathbf{b}] \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \mathbf{c}) \mathbf{a}$$

und wegen  $\mathbf{n}_1 \mathbf{m}_1 = \mathbf{n}_2 \mathbf{m}_2 = \mathbf{o}$  ist aber

$$v = (n_1 m_2) n_2 - (n_2 m_1) n_1,$$

und

$$w = (m_2, n_1 + n_2) n_2 - (m_1, n_1 + n_2) n_1.$$

Wegen  $(n_1, n_1 + n_2) = (n_2, n_1 + n_2)$  ist aber auch

$$w = -(n_2, n_1 + n_2) m_2 + (n_1, n_1 + n_2) m_1$$

ein zu  $\mathfrak{B}$  paralleler Vektor und folglich auch  $v + w$ . Nach der oben benutzten Identität ist nun

$$\begin{aligned} v + w &= [[m_2 n_2], n_1 + n_2] - [[m_1 n_1], n_1 + n_2] \\ &= [[n_1 m_1] - [n_2 m_2], n_1 + n_2] \\ &= [u, n_1 + n_2]. \end{aligned}$$

Die durch  $u$  und  $n_1 + n_2$  bestimmte Ebene ist also zu  $\mathfrak{B}$  normal, oder, was dasselbe bedeutet, die Projektion von  $u$  und also auch die von  $\text{grad } O$  ist parallel zu der von  $n_1 + n_2$ . Der Vektor  $n_1 + n_2$  ist aber senkrecht zur äußeren Winkelhalbierenden-Ebene der beiden Tangentialebenen  $PSB_1$  und  $PSB_2$ , und diese ist nach bekannten Sätzen Tangentialebene an den durch  $P$  gehenden, zum Grundkegel konfokalen elliptischen Kegel. Hieraus resultiert der zweite Satz von *Hirsch*:

*Ist  $\mathfrak{G}$  ein Doppelkegel, der aus zwei in bezug auf die gemeinsame Basisebene  $\mathfrak{B}$  symmetrischen, geraden, elliptischen Kegeln gebildet wird, und  $P$  ein in  $\mathfrak{B}$  variabler Aufpunkt, so liegen die Niveaulinien der Oberfläche des Kappenkörpers  $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}, P)$  auf elliptischen Kegeln, die konjunktal sind mit dem einen oder andern der beiden  $\mathfrak{G}$  konstituierenden Kegel.*

h) Es sei  $\mathfrak{G}$  ein zentrisch symmetrischer Eibereich und  $P$  ein Aufpunkt auf der Normalen zur Ebene von  $\mathfrak{G}$  durch sein Zentrum, und man betrachte das Integral der mittleren Krümmung des Kappenkörpers  $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}, P)$ . Aus (14) ist unschwer zu erkennen, daß wegen der zentrischen Symmetrie  $\text{grad } M$  zu  $\mathfrak{G}$  normal ist. Da außerdem nach II 4a die Niveauflächen von  $M(P)$  nirgends flach sind, so ergibt sich:

*Ein Kegel mit gegebener zentrisch symmetrischer Grundfläche und gegebenem Volumen hat dann und nur dann minimales Integral der mittleren Krümmung, wenn er in dem Sinne gerade ist, daß die Projektion der Spitze in das Symmetriezentrum der Grundfläche fällt.*

Dabei ist natürlich die Kantenkrümmung längs des Randes der Grundfläche mitzurechnen.

i) Nimmt man endlich als Grundkörper ein Ellipsoid, so sind die Kappen Kegel zweiten Grades. Daher fällt  $\text{grad } M$  mit deren Hauptsymmetrieachse zusammen. Diese ist aber bekanntlich Normale des durch den Aufpunkt gehenden, zum Grundellipsoid homofokalen Ellipsoides. Daraus resultiert das von *Gonseth*<sup>11)</sup> angegebene räumliche Analogon des Satzes von Graves:

*Die Niveauflächen des Integrals der mittleren Krümmung von dem Kappenkörper eines Ellipsoides bilden mit diesem eine Schar konfokaler Ellipsoide.*

## Anhang

Im folgenden seien noch einige Resultate, ohne Angabe des Beweises, zusammengestellt, die sich ebenfalls auf Volumen, Oberfläche und konvexe Körper beziehen.

a) Die bekannten *Steinerschen* Untersuchungen über Podarenflächen einer ebenen Kurve<sup>12)</sup>, die ihn zu dem Begriff des Krümmungsschwerpunktes führten, hat *Hirst* auf den Raum übertragen<sup>13)</sup>. Eine Uebertragung auf Räume höherer Dimensionszahl kann ohne Schwierigkeit folgendermaßen geschehen:

Es sei  $\mathfrak{f}$  eine  $(n-1)$ -dimensionale geschlossene konvexe Fläche im  $n$ -dimensionalen Raum. Ferner sei  $\mathfrak{f}$  überall stetig und mit stetiger Normale vorausgesetzt.  $\mathfrak{P}(A)$  sei die  $(n-1)$ -dimensionale Podare von  $\mathfrak{f}$  in bezug auf irgend einen Aufpunkt  $A$ , d. h. der geometrische Ort der Fußpunkte der Normalen aus  $A$  auf die Tangential-Ueberebenen von  $\mathfrak{f}$ .  $P(A)$  sei das Volumen von  $\mathfrak{P}(A)$ . Dabei muß die Vorzeichenbestimmung des Volumenelementes bei gerader und ungerader Dimensionszahl verschieden vorgenommen werden, gemäß den Ansätzen von Steiner und Hirst. Dann gilt:

- 1) *Die Niveauflächen von  $P(A)$  sind konvex.*
- 2) *Ihre Ordnung ist gleich der Dimensionszahl  $n$ , wenn diese gerade, und mindestens um eins geringer, wenn diese ungerade ist.*

<sup>11)</sup> *F. Gonseth*, Un théorème relatif à deux ellipsoïdes confocaux, *L'Ens. math.*, 19, S. 324—25, (1917).

<sup>12)</sup> *J. Steiner*, Von dem Krümmungs-Schwerpunkte ebener Curven, *Werke II*, S. 99, ff.

<sup>13)</sup> *A. Hirst*, Sur les volumes des surfaces podaires, *Crelle*, Bd. 62, S. 246.

3) Im Falle gerader Dimensionszahl gehen die Niveaumassen  $n/2$  mal durch den  $(n-2)$ -dimensionalen unendlich fernen Kugelkreis des  $n$ -dimensionalen Raumes.

Im Falle  $n = 3$  erhält man den Hirstschen Satz: die Niveaumassen sind zweiten Grades. Für  $n = 2$  folgt: die Niveaulinien sind Kreise.

b) Der Steinersche Satz läßt sich auch noch in anderer Weise auf den dreidimensionalen Raum übertragen. Es sei  $\mathcal{K}$  eine doppelt gekrümmte Raumkurve, die in jedem Punkt ein bestimmtes, stetiges begleitendes Dreibein (Tangente, Normale, Binormale) besitzt. Denkt man sich eine Ebene  $\mathfrak{E}$  mit dem begleitenden Dreibein fest verbunden und läßt dieses längs  $\mathcal{K}$  hingleiten, so beschreibt der Fußpunkt  $F$  der Normalen aus einem Aufpunkt  $A$  auf  $\mathfrak{E}$  die „ $\mathfrak{E}$ -Podare“  $P_{\mathfrak{E}}$  von  $\mathcal{K}$  in bezug auf  $A$ , während der Vektor  $\vec{AF}$  einen Kegelmantel mit bestimmtem Flächeninhalt  $P_{\mathfrak{E}}$  beschreibt. Von  $P_{\mathfrak{E}}$ , als Funktion von  $A$  betrachtet, gilt:

1) Die Niveaumassen von  $P_{\mathfrak{E}}(A)$  sind für jedes  $\mathfrak{E}$  homothetische Flächen zweiten Grades und zwar, im allgemeinen, Ellipsoide.

2) Bei gewissen Kurven, insbesondere bei Böschungslinien, werden die Niveaumassen bei passender Wahl von  $\mathfrak{E}$  Zylinder. Die Bedingung, der  $\mathcal{K}$  genügen muß, damit solche Zylinderscharen auftreten können, läßt sich durch eine Differentialgleichung erster Ordnung und dritten Grades für das Verhältnis Torsion zu Krümmung als Funktion der Bogenlänge des Tangentenhodographen von  $\mathcal{K}$  ausdrücken.

3) Für parallele Erzeugende  $\mathfrak{E}$  liegen die Mittelpunkte der zugehörigen Ellipsoidscharen auf einer Geraden, und die Achsenrichtungen der Scharen sind parallel.

e) Während die Guldinsche Volumenregel durch Koenigs weitgehend verallgemeinert wurde<sup>14)</sup>, hat die Oberflächenregel weniger Beachtung gefunden. Die allgemeinste Aussage röhrt von Monge her und lautet so<sup>15)</sup>:

Bewegt sich eine ebene Kurve  $\mathcal{K}$  so, daß ihre Ebene ohne zu gleiten auf einer abwickelbaren Regelfläche abrollt oder, im Grenzfall, eine Translation senkrecht zu sich selber ausführt, so kann der Inhalt der von  $\mathcal{K}$  erzeugten Fläche nach Guldin berechnet werden, solange wenigstens  $\mathcal{K}$  die momentane Drehachse seiner Ebene nicht schneidet. Eine solche Bewegung sei eine Mongesche Bewegung genannt.

<sup>14)</sup> G. Koenigs, Sur la détermination générale du volume etc., Journal de Math., 4<sup>me</sup> sér., t. V, p. 321—343.

<sup>15)</sup> G. Monge, Application de l'Analyse à la Géométrie, 5<sup>me</sup> éd. par Liouville, 1850, p. 333.

Ich kann hinzufügen, daß dieser Fall in gewissem Sinne der allgemeinste ist. Es gilt nämlich: *Ist die Bewegung der Ebene keine Mongesche, so läßt sich stets eine darin gelegene Kurve angeben, für welche die Guldinsche Regel nicht gilt.*

d) Viele elementare Maximum-Aufgaben über Volumen und Oberfläche führen dazu, das Maximum einer Funktion folgender Gestalt zu suchen:

$$v = \frac{\prod_{v=1}^n x_v^{b_v}}{\sum_{\gamma=0}^g A_\gamma \prod_{v=1}^n x_v^{a_{\gamma v}}}. \quad (23)$$

Dabei bedeuten  $A_\gamma$  positive,  $a_{\gamma v}$ ,  $b_v$ ,  $\gamma = 0, 1, \dots, g$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$ , beliebige Konstante,  $x_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$ , positive Variable, und es sollen die positiven Bestimmungen der Potenzen genommen werden<sup>16)</sup>.

Die übliche Behandlung der Aufgabe durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen entscheidet nur über relative Maxima und Minima und läßt die geometrisch interessante Frage nach dem absoluten Maximum offen oder benötigt eine weitere Diskussion. Im Falle der Funktion (23) läßt sich diese Frage vollständig abklären:

Man kann die Exponenten  $a_{\gamma v}$ ,  $b_v$  als je  $n$  kartesische Koordinaten von  $(g+2)$  Punkten:  $(a_\gamma)$ ,  $\gamma = 0, 1, \dots, g$ ,  $(b)$  auffassen. Die kleinste konvexe Hülle der  $(a_\gamma)$  sei mit  $\mathfrak{H}$  bezeichnet, und  $m$  sei ihre Dimensionszahl, wobei natürlich  $m \leq \min(g, n)$  ist. Dann gilt:

- 1)  $v$  ist dann und nur dann beschränkt, wenn  $(b)$  im Innern oder auf dem Rande von  $\mathfrak{H}$  liegt.
- 2)  $v$  erreicht das Maximum dann und nur dann, wenn  $(b)$  im Innern von  $\mathfrak{H}$  liegt.
- 3) Liegt  $(b)$  im Innern von  $\mathfrak{H}$ , so verschwindet der Gradient von  $v$  nur in einem einzigen Punkte wenn  $n = m$ , dagegen in  $\infty^{n-m}$  Punkten wenn  $n > m$  ist.

Folgendes Nebenresultat scheint mir bemerkenswert:

---

<sup>16)</sup> Eine solche Funktion tritt auch auf bei E. Zermelo, Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximumproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr., 29, S. 438.

Bezeichnet man mit  $a_{\gamma\nu}$  die  $n$  kartesischen Koordinaten von  $(g+1)$  Punkten  $(a_\gamma)$ ,  $g \geq n$ , die eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit der kleinsten konvexen Hülle  $\mathfrak{H}$  aufspannen, und bedeuten  $A_\gamma$  beliebige positive Konstante, so wird durch die Gleichungen

$$z_\nu = \frac{\sum_{\gamma=0}^g a_{\gamma\nu} A_\gamma e^{a_{\gamma 1} y_1 + a_{\gamma 2} y_2 + \dots + a_{\gamma n} y_n}}{\sum_{\gamma=0}^g A_\gamma e^{a_{\gamma 1} y_1 + a_{\gamma 2} y_2 + \dots + a_{\gamma n} y_n}}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

der ganze  $(y)$ -Raum umkehrbar eindeutig auf das Innere von  $\mathfrak{H}$  abgebildet.

Hierbei findet Zusatz f) in I 5 des Hauptteiles Verwendung.

(Eingegangen den 14. Januar 1930)