Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 2 (1930)

Artikel: Zur Aequivalenz bilinearer alternierender Formen.
Autor: Stähelin, Helene
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3606

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Aequivalenz bilinearer alternierender Formen

Von HELENE STÄHELIN, Fetan.

I.

Die Transformationstheorie der Scharen von ganzzahligen, alternierenden Formen

$$A x_1 + B x_2 = \sum_{i,k=1}^{4} a_{ik} u_i v_k x_1 + \sum_{i,k=1}^{4} b_{ik} u_i v_k x_2,$$
$$a_{ik} = - a_{ki}, \quad b_{ik} = - b_{ki}$$

ist im Zusammenhange mit der Transformationstheorie der vierfach periodischen Funktionen insbesondere von Humbert [1]) und Hecke [2]) entwickelt worden.

Zwei alternierende Formen A und B bestimmen eindeutig eine quadratische binäre Form, die Invariante der Formenschar $A x_1 + B x_2$ gegenüber unimodularen Transformationen:

$$a x_1^2 + \mathfrak{J} x_1 x_2 + b x_2^2,$$

deren Quadrat gleich der Determinante $| a_{ik} x_1 + b_{ik} x_2 |$ ist. Dabei sind

$$a = a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23}, \quad a^2 = | a_{ik} |,$$
$$b = b_{12} b_{34} + b_{13} b_{42} + b_{14} b_{23}, \quad b^2 = | b_{ik} |,$$

die Invarianten der Formen A und B. $\mathfrak{J}$ ist eine Simultaninvariante von A und B, nämlich

$$\mathfrak{J} = a_{12} b_{34} + a_{34} b_{12} + a_{13} b_{42} + a_{42} b_{34} + a_{14} b_{23} + a_{23} b_{14}.$$

In der Formenschar $A x_1 + B x_2$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_{ik}, b_{ik} und rationalen x_1, x_2 lassen sich stets auf mannigfache Weise zwei Formen C, D bestimmen, so daß sich jede in der obigen Schar enthaltene ganzzahlige Form durch $Cp + Dq$ darstellen läßt, wo p und q ganze Zahlen sind. Solche Formenpaare C, D sollen *Fundamentalformen*

---

[1]) *Humbert,* Sur les fonctions abéliennes singulières. Journ. de Liouville, Sér. V, T. 5, 6, 7, 9, 10 (1899—1904).

[2]) *E. Hecke,* Ueber die Perioden vierfach periodischer Funktionen. Göttinger Nachr. 1915.

genannt werden.[3]) Zwei Paaren von Fundamentalformen derselben Schar entsprechen quadratische Formen, die durch ganzzahlige lineare Transformationen mit der Determinante ± 1 ineinander übergeführt werden können. Jeder ganzzahligen Formenschar $Ax_1 + Bx_2$ ist daher eine wohlbestimmte Klasse binärer quadratischer Formen zugeordnet und umgekehrt.

Herr Hecke hat nun gezeigt, *daß zwei linearen Formenscharen, die äquivalent sind in dem Sinne, daß sie durch kogrediente ganzzahlige unimodulare Transformationen ineinander übergeführt werden können, dieselbe Klasse quadratischer Formen entspricht.*[4]) Es gilt aber auch die Umkehrung dieses Satzes: *Sind A, B und C, D zwei Paare ganzzahliger alternierender Formen, und stimmen die Invarianten a, b, $\mathfrak{J}$ von A und B mit den entsprechenden von C und D überein, und sind ferner beide Formenpaare Fundamentalformen der Schar $Ax_1 + Bx_2$, resp. $Cx_1 + Dx_2$, so gibt es eine kongrediente ganzzahlige unimodulare Transformation, die A und B simultan in C und D transformiert.*[4]) [5])

Auf Grund dieser Resultate werde ich nun folgenden Satz beweisen: *Zwei Paare alternierender Formen*

$$A = \sum_{i,k=1}^{4} a_{ik} u_i v_k, \quad B = \sum_{i,k=1}^{4} b_{ik} u_i v_k$$
$$C = \sum_{i,k=1}^{4} c_{ik} u_i v_k, \quad D = \sum_{i,k=1}^{4} d_{ik} u_i v_k$$

mit ganzzahligen Koeffizienten sind dann und nur dann äquivalent, wenn die Moduln der Unterdeterminanten n-ten Grades der Formenschar $Ax_1 + Bx_2$ mit den Moduln der Unterdeterminanten n-ten Grades von $Cx_1 + Dx_2$ für jedes n übereinstimmen ($n = 1, 2, 3, 4$).

II.

Bezeichne ich die Unterdeterminanten n-ten Grades der zu $Ax_1 + Bx_2$ gehörenden Matrix mit $\Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)} \ldots \Delta_{\binom{4}{4-n}^2}^{(n)}$ und diejenigen der Matrix von $Cx_1 + Dx_2$ mit $\Phi_1^{(n)}, \Phi_2^{(n)}, \ldots \Phi_{\binom{4}{4-n}^2}^{(n)}$, so lautet die notwendige

[3]) *E. Hecke*, l. c. S. 13.
[4]) *E. Hecke*, l. c. S. 14.
[5]) Der Beweis dieses Satzes findet sich für den Fall, daß die eine Form die Invariante $a = -1$ hat, bei Humbert, l. c. T. 5, p. 238—246. Er läßt sich leicht auf den allgemeinen Fall übertragen.

und hinreichende Bedingung für die Aequivalenz der Formenpaare A, B und C, D

$$\left(\Delta_1^{(n)},\ \Delta_2^{(n)},\ \ldots\ldots\ \Delta_{\binom{4}{4-n}^2}^{(n)}\right) = \left(\Phi_1^{(n)},\ \Phi_2^{(n)},\ \ldots\ldots\ \Phi_{\binom{4}{4-n}^2}^{(n)}\right), \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Unter einem Modul im Körper $k(1)$ der rationalen Zahlen versteht man bekanntlich ein System von ganzen Zahlen in $k(1)$, das eine von 0 verschiedene Zahl und mit α und β auch $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ enthält. Aus der Gleichheit der Moduln $\left(\Delta_1^{(n)},\ \Delta_2^{(n)},\ \ldots\ \Delta_{\binom{4}{4-n}^2}^{(n)}\right)$, $\left(\Phi_1^{(n)},\ \Phi_2^{(n)},\ \ldots\ \Phi_{\binom{4}{4-n}^2}^{(n)}\right)$ folgt daher, daß jede Unterdeterminante $\Delta_i^{(n)}$ sich linear ganzzahlig durch die Unterdeterminanten $\Phi_k^{(n)}$ darstellen läßt und umgekehrt.

Wenn die Formenpaare A, B und C, D simultan ganzzahlig unimodular ineinander transformiert werden können, so stimmen ihre Invarianten überein. Also sind auch die Determinanten gleich:

$$|a_{ik}x_1 + b_{ik}x_2| = |c_{ik}x_1 + d_{ik}x_2|, \quad \Delta^{(4)} = \Phi^{(4)}.$$

Nach der Voraussetzung gibt es ferner eine ganzzahlige, unimodulare Transformation $P = \|p_{ik}\|$, so daß

$$P'(Ax_1 + Bx_2)P = Cx_1 + Dx_2 \tag{1}$$

wird. Hierbei bedeutet P' die zu P transponierte Matrix. Daraus folgt

$$(Ax_1 + Bx_2)P = P'^{-1}(Cx_1 + Dx_2), \tag{2}$$

wo P'^{-1} die zu P' inverse Matrix ist. Da die Determinante $|p_{ik}| = 1$ ist, so sind die Elemente $\Pi_{ik} = \frac{p_{ik}}{|p_{ik}|}$ von P'^{-1} wieder ganzzahlig, und es ist auch $|\Pi_{ik}| = 1$. Nach Gleichung (2) ist

$$\sum_{k=1}^{4}(a_{ik}x_1 + b_{ik}x_2)p_{kl} = \sum_{k=1}^{4}(c_{kl}x_1 + d_{kl}x_2)\Pi_{ik}, \quad l,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Die Elemente $a_{ik}x_1 + b_{ik}x_2$ lassen sich daher linear und ganzzahlig durch die $c_{ik}x_1 + d_{ik}x_2$ darstellen, und umgekehrt sind die $a_{ik}x_1 + b_{ik}x_2$ linear und ganzzahlig in den $c_{ik}x_1 + d_{ik}x_2$. Es ist also

$$\left(\Delta_1^{(1)},\ \Delta_2^{(1)},\ \ldots\ \Delta_{16}^{(1)}\right) = \left(\Phi_1^{(1)},\ \Phi_2^{(1)},\ \ldots\ \Phi_{16}^{(1)}\right).$$

Nach dem Satz von Franke[6]) ist auch die Determinante, die aus den n-reihigen Unterdeterminanten ($n = 2, 3$) von P, bezw. P'^{-1} besteht, gleich 1. Somit lassen sich nach Gleichung (2) auch die Unterdeterminanten $\Delta^{(n)}$, $n = 2, 3$, linear ganzzahlig durch die Unterdeterminanten $\Phi^{(n)}$, $n = 2, 3$, darstellen und umgekehrt. Es ist also auch

$$\left(\Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)} \dots \Delta_{\binom{n}{4-n}^2}^{(n)}\right) = \left(\Phi_1^{(n)}, \Phi_2^{(n)}, \dots \Phi_{\binom{n}{4-n}^2}^{(n)}\right), \; n = 2, 3.$$

Die Bedingung der Uebereinstimmung der Moduln der Unterdeterminanten n-ten Grades der Formenscharen $Ax_1 + Bx_2$ und $Cx_1 + Dx_2$ ist somit *notwendig* für die Aequivalenz der Formenpaare A, B und C, D.

Aus der Gleichheit der Moduln $\left(\Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \dots \Delta_{\binom{n}{4-n}^2}^{(n)}\right)$, $\left(\Phi_1^{(n)}, \Phi_2^{(n)}, \dots \Phi_{\binom{n}{4-n}^2}^{(n)}\right)$, $n = 1, 2, 3, 4$, folgt, daß die Determinanten der Formenschar $Ax_1 + Bx_2$ und $Cx_1 + Dx_2$ und somit auch ihre Invarianten gleich sind. Sind A, B und C, D zwei Paare von Fundamentalformen, so sind sie also nach dem Satz von Humbert und Hecke gleichzeitig kogredient unimodular und ganzzahlig ineinander transformierbar.

Sind A, B und C, D keine Fundamentalformen, so gibt es in der Schar $Ax_1 + Bx_2$ zwei Fundamentalformen

$$A_1 = \sum_{i,k=1}^{4} a'_{ik} u_i v_k = Ap + Bq,$$

$$B_1 = \sum_{i,k=1}^{4} b'_{ik} u_i v_k = Ar + Bs,$$

wo p, q, r, s rationale Zahlen sind.

Da nach Voraussetzung die Moduln der Unterdeterminanten 1. Grades der Scharen $Ax_1 + Bx_2$ und $Cx_1 + Dx_2$ einander gleich sind, ist

$$c_{ik} x_1 + d_{ik} x_2 = \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{4} (a_{\varkappa\lambda} x_1 + b_{\varkappa\lambda} x_2) g_{\varkappa\lambda},$$

worin die $g_{\varkappa\lambda}$ ganze rationale Zahlen sind. Also wird für $x_1 = p$, $x_2 = q$

[6]) *E. Franke*, Ueber Determinanten aus Unterdeterminanten, Journ. f. Mathematik, Bd. 61. (1863), S. 350—355.

$$c'_{ik} = c_{ik}\, p + d_{ik}\, q = \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{4} (a_{\varkappa\lambda}\, p + b_{\varkappa\lambda}\, q)\, g_{\varkappa\lambda} = \sum_{\varkappa,\lambda=1} a'_{\varkappa\lambda}\, g_{\varkappa\lambda}\,.$$

Da die $a'_{\varkappa\lambda}$ und die $g_{\varkappa\lambda}$ ganze rationale Zahlen sind, so sind auch die c'_{ik} ganze rationale Zahlen. Ebenso folgt, daß auch die

$$d'_{ik} = c_{ik}\, r + d_{ik}\, s$$

ganze rationale Zahlen sind.

$A x_1 + B x_2$ geht durch die Transformation

$$x_1 = p\, x'_1 + r\, x'_2\,, \quad x_2 = q\, x'_1 + s\, x'_2 \tag{3}$$

in $A_1 x'_1 + B_1 x'_2$ über, wo A_1, B_1 Fundamentalformen sind. Da die c'_{ik} und die d'_{ik} ganzzahlig sind, so folgt aus der Symmetrie der Voraussetzung, daß auch $C x_1 + D x_2$ durch die Substitution (3) in eine Formenschar $C_1 x'_1 + D_1 x'_2$ übergeführt wird, in der C_1 und D_1 Fundamentalformen sind. Weil ihre Invarianten übereinstimmen, sind $A_1 x_1 + B_1 x_2$ und $C_1 x_1 + D_1 x_2$ äquivalent. Daraus folgt auch die Aequivalenz für die Formen $A x_1 + B x_2$ uud $C x_1 + D x_2$.

Während sich der Beweis dafür, daß die Uebereinstimmung der Moduln der Unterdeterminanten n-ten Grades eine notwendige Bedingung ist für die Aequivalenz zweier Formenpaare, ohne weiteres auf Formenpaare $\sum_{i,k=1}^{2n} a_{ik}\, u_i\, v_k$ übertragen läßt, liegt dem Beweis dafür, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, der Satz von Humbert und Hecke zu Grunde, der nur für Formen $\sum_{i,k=1}^{4} a_{ik}\, u_i\, v_k$ bewiesen ist.

(Eingegangen den 9. November 1929)