

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 2 (1930)

**Artikel:** Sur la géométrie des imaginaires II.  
**Autor:** Gonseth, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-3605>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur la géométrie des imaginaires II

par F. GONSETH, Berne

1. On sait bien quel est le lien qui existe entre la *symétrie de Schwartz-Laguerre*, prise par rapport à une courbe analytique, et la *représentation des points imaginaires du plan de Laguerre*<sup>1)</sup>. En prenant dans l'espace la droite comme élément, et en introduisant la représentation d'une droite imaginaire par deux droites réelles, due à *Blaschke*<sup>2)</sup> et dont nous nous sommes déjà servis<sup>3)</sup>, on peut arriver<sup>2)</sup> à des correspondances de droites qui généralisent de façon très élégante les propriétés de la symétrie de Schwartz. Nous allons dans ce qui suit, examiner une autre correspondance dans l'espace où se retrouvent aussi, quoique de façon un peu moins simple, certains traits de la même symétrie.

2. Soit  $\Phi$  une surface analytique et  $p$  un point réel arbitraire. Menons le cône isotrope  $\Gamma$  de sommet  $p$ : il coupe  $\Phi$  suivant une courbe  $\gamma$  sans point réel. Soit  $T$  la tangente à  $\gamma$ , au point  $m$ : nous mènerons par cette droite le second plan isotrope  $\beta$  (qui ne passe pas par  $m$ ) et nommerons  $b$  le point où il touche l'ombilicale, et  $t$  celui où  $T$  perce le plan de l'infini. Soit en outre  $a$  le point commun à l'ombilicale et à la génératrice  $pm$ : le plan  $mba$  est perpendiculaire à  $T$ .

$ma$  et  $mb$  sont deux génératrices de la développable isotrope  $\varphi$  circonscrite à  $\gamma$ , les plans tangents le long de ces génératrices étant justement  $\beta = [Tb]$  et  $\alpha = [Ta]$ . Nous nommerons encore  $r$  le point réel de la génératrice  $mb$ , s'il existe. (Il suffira d'ailleurs de considérer la suite continue, le *fil*, des points  $m$  pour lesquels la génératrice considérée est ponctuée d'un point réel.)

Le lieu des points  $r$  est la courbe réelle  $\pi$  de la développable  $\varphi$ . C'est d'ailleurs la correspondance  $p \rightarrow \pi$ , de point à courbe, que nous avons l'intention d'examiner. C'est naturellement une transformation de contact, et nous allons montrer qu'elle conserve certains angles entre éléments de contact correspondants.

Passons au point  $m'$ , voisin de  $m$ , sur  $\gamma$  et plus spécialement sur le fil de  $\gamma$  considéré:  $m'$  est sur  $T$  et nous conduit en  $a'$  voisin de  $a$  et

<sup>1)</sup> Voir par ex. le premier volume des „Vorlesungen über ausgewählte Kapitel der Geometrie“ de *Study*, Leipzig 1911.

<sup>2)</sup> *Blaschke*. Zur Geometrie der Speere im Euklidischen Raum. Monatsh. f. Math. und Phys. 21 (1910) p. 201—307.

<sup>3)</sup> Comm. math. helv. 1 (1929) p. 142—155.

en  $b'$  voisin de  $b$  sur  $tb$ . La droite  $m'b'$  est aussi dans le plan  $\beta$ , puisqu'elle coupe  $T$  et  $tb$ ; son point réel, s'il existe, est sur la droite réelle  $Q$  de ce plan.  $Q$  contient alors les deux points réels des génératrices voisines  $mb$  et  $m'b'$ :  $Q$  doit donc être tangente à la courbe réelle  $\pi$ .

Dans une transformation de ce genre, tous les éléments de contact dont le centre est en  $p$  ont leurs éléments de contact correspondants disséminés le long de  $\pi$ , mais d'une façon qui n'est pas complètement arbitraire. Le faisceau passant par une tangente  $Q$  de  $\pi$  correspond projectivement à un faisceau d'éléments d'axe  $P$  par  $p$ : les axes  $P$  et  $Q$  seront dits correspondants; les axes  $P$  forment un cône de sommet  $p$ , les axes  $Q$  correspondants sont disséminés tout le long de  $\pi$ . C'est la correspondance de ces faisceaux qui est conforme, comme nous allons le montrer.

Dans le cas qui nous occupe, l'axe  $P$  est la droite réelle du plan isotrope  $\alpha$ . La correspondance  $P \rightarrow Q$  peut alors être simplement définie comme celle des deux représentantes réelles de la tangente imaginaire  $T$ . En effet, si l'on choisit un point  $p'$  voisin de  $p$  sur cet axe  $P$ , et si l'on mène le cône isotrope de sommet  $p'$ , ce cône et celui de  $p$  ont le plan tangent  $\alpha$  en commun. La génératrice  $p'\alpha$  détermine, sur  $\Phi$ , le point  $m'$  voisin de  $m$  sur  $T$ ; le second plan isotrope est encore  $\beta$ , de telle sorte que la courbe  $\pi'$  sur la développable isotrope correspondant à la nouvelle position  $p'$  de  $p$  touche  $Q$  en un point  $q'$ . Mais c'est là justement une propriété caractéristique de deux axes correspondants.

Ces axes se coupent naturellement au point réel de  $T$ , s'il existe. Or ceci découle de la propriété assez jolie que voici:

*Si deux droites isotropes  $A$  et  $B$  par un point imaginaire  $a$  sont ponctuées, il en est de même de la normale en  $a$  au plan qu'elles déterminent.*

En effet:

La droite de jonction de  $a$  et de l'imaginaire conjugué  $\bar{a}$  est réelle; le point milieu entre  $a$  et  $\bar{a}$  l'est également. Par un mouvement réel on peut donc placer  $a$  et  $\bar{a}$  sur l'axe des  $z$  à égale distance de l'origine. Les points réels  $p$  et  $q$  de  $A$  et  $B$  sont sur le cercle image, selon Laguerre, de  $a$ . La droite  $pq$  est donc dans le plan  $z = 0$ . Or la normale au plan  $AB$  est, par rapport au cône isotrope de sommet  $a$ , la droite polaire de ce plan. Elle passe donc par le pôle réel de la droite  $pq$  par rapport au cercle-image de  $A$ . C. Q. F. D.

D'autre part, si l'on suppose que, ayant mené par  $ar$  le plan touchant le cône isotrope de  $a$  le long de  $A$ , cette dernière est ponctuée, alors les deux représentantes de  $ra$  sont dans le plan du cercle-image de  $a$

et l'on peut en déduire que le second plan isotrope par  $ar$  détermine aussi une génératrice ponctuée,  $B$ .

Ainsi donc, pour chaque point  $m$  du «fil» considéré, la tangente  $T$  étant ponctuée du point réel  $r$ , le point  $q$  existe sur  $Q$ . En  $r$  se rencontrent toujours les deux axes correspondants  $P$  et  $Q$ .

De plus, si l'on introduit aussi le cercle image  $\mu$  de  $m$ ,  $p$  et  $q$  étant sur ce cercle et  $r$  étant le pôle de la droite  $pq$ , il s'en suit que  $P$  et  $Q$  sont toutes deux tangentes à  $\mu$ , aux points  $p$  et  $q$ .

Voici donc comment on peut aussi décrire la courbe  $\pi$ , et une surface cerclée qui lui est attachée.

*On choisit les points  $m$  pour lesquels la tangente est ponctuée en  $r$ . On construit le cercle-image de  $m$ . Il passe par le point fixe  $p$  et la tangente en ce point passe par  $r$ . La seconde tangente au cercle-image menée de  $r$  détermine le seul point de  $\pi$  qui se trouve sur  $\mu$ .*

Les axes  $P$  et  $Q$  sont d'ailleurs orientés dans le sens même du cercle  $\mu$ .

### 3. Donnons un exemple avant de continuer:

Supposons que  $\Phi$  soit le plan imaginaire le plus général. Son équation peut toujours, par un choix approprié du système de coordonnées, être ramenée à la forme

$$y = imx \quad (m = \operatorname{tg} \alpha)$$

La droite réelle du plan coïncide alors avec l'axe des  $z$ .

Par un point arbitraire  $p (a, b, c)$  qu'on peut supposer dans le plan  $z = 0$ , menons le cône isotrope, qui coupe  $\Phi$  suivant un cercle  $\gamma$ . La développable isotrope est, dans ce cas, le second cône isotrope passant par  $\gamma$ , de sommet encore indéterminé  $s (a', b', c')$ . On a dès lors:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 - (x - a')^2 - (y - b')^2 - (z - c')^2 = k(y - imx).$$

En identifiant, on trouve pour  $s$ :

$$\begin{aligned} a' &= a \frac{1 + m^2}{1 - m^2} + b \cdot 2i \frac{m}{1 - m^2} \\ b' &= a \cdot 2i \frac{m}{1 - m^2} - b \frac{1 + m^2}{1 - m^2} \\ c' &= 0. \end{aligned}$$

La courbe réelle de cette développable isotrope n'est pas autre chose que le cercle-image  $\pi$  du sommet  $s$ , dans la représentation de Laguerre.

Le centre de ce cercle  $\pi$  est au point  $m$ , de coordonnées

$$ak_1, -bk_1, 0 \quad \text{avec } k_1 = \frac{1+m^2}{1-m^2}.$$

Son axe a la direction du vecteur:

$$bk_2, ak_2, 0 \quad \text{avec } k_2 = \frac{2m}{1-m^2}$$

et son rayon enfin est

$$R = k_2 \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ces formules montrent que ce cercle a son centre sur la droite symétrique de  $op$  par rapport au plan des  $zx$ , et que son plan passe par l'axe des  $z$ .

De plus, la puissance de l'origine est égale à  $\overline{op}^2$ . Il y a donc une sphère passant par  $\pi$  et qui touche le plan  $opz$  en  $p$ .

Soit maintenant  $r$  un point arbitraire de l'axe des  $z$ ,  $Q$  une tangente à  $\pi$  avec  $q$  comme point de contact; cette tangente est un axe  $Q$ . Elle doit rencontrer l'axe  $P$  correspondant au point réel de la tangente  $T$ . Mais  $T$  est dans le plan  $\emptyset$ ; son point réel est donc sur  $oz$ .

L'axe  $P$  correspondant est ainsi  $r\bar{p}$ .

On a naturellement  $\overline{rp} = \overline{rq}$ .

On peut voir maintenant comment les éléments de contact par les axes  $P$  et  $Q$  se correspondent: Il est tout d'abord clair que les plans  $OZP$  et  $OZQ$  se correspondent. Pour obtenir un élément quelconque par  $P$ , il faudrait faire prendre à  $p$  une position voisine  $p'$ . Le cercle  $\pi$  serait remplacé par un cercle infiniment peu différent  $\pi'$ . Le plan tangent à  $\pi'$  et passant par  $Q$  formerait (avec le point  $q$ ) l'élément de contact correspondant au plan  $Pp'$  (avec le point  $p$ ).

Or rien ne nous empêche d'étendre la correspondance  $p \rightarrow \pi$ , qui n'est définie jusqu'ici que pour des points  $p$  réels, à des points imaginaires:  $\pi$  aurait toujours les mêmes propriétés que plus haut, mais serait en général imaginaire. On mènerait par  $p$  le cône isotrope; prendrait son intersection  $\gamma$  par le plan  $\emptyset$ , ferait passer le second cône isotrope  $\tilde{\Gamma}$  par  $\gamma$ , et prendrait enfin l'intersection de  $\tilde{\Gamma}$  par le plan symétrique par rapport à  $xoz$ , de celui qui projette  $p$  à partir de  $oz$ . Or si l'on

prend  $p'$  dans le plan isotrope  $\tau$  passant par  $P$ , on voit facilement que le plan isotrope  $\bar{\tau}$  par  $Q$  (et coupant  $\tau$  sur le plan  $\phi$ , d'après la définition des directions correspondantes), touche aussi  $\pi'$ . Ainsi les plans isotropes par  $P$  et  $Q$  se correspondent. Ceci suffit, la correspondance des deux faisceaux d'éléments étant projective, pour que ces faisceaux soient « égaux ». Le calcul permet aussi de le voir facilement :

Si la transformation de contact point-courbe est donnée par les équations :

$$\begin{aligned} F(x, y, z; x_0, y_0, z_0) &= 0 \\ \text{et } \Phi(x, y, z; x_0, y_0, z_0) &= 0 \end{aligned}$$

et si l'on représente par  $dF$  la différentiation totale de  $F$  par rapport aux variables  $x, y, z$ , et par  $d_0 F$  la différentiation par rapport à  $x_0, y_0, z_0$ , les équations

$$\begin{aligned} dF + \lambda d\Phi &= 0 \\ d_0 F + \lambda d_0 \Phi &= 0 \end{aligned}$$

déterminent autour des axes  $P$  et  $Q$  les plans de 2 éléments de contact correspondants, aux points  $(x, y, z)$  et  $(x_0, y_0, z_0)$ . Dans notre cas,  $x_0, y_0, z_0$  étant les coordonnées du point  $p$ , on a pour le cercle  $\pi$

$$\begin{aligned} F &\equiv xy_0 + yx_0 \\ \Phi &\equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2k_1(xx_0 - yy_0) - 2zz_0 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \end{aligned}$$

Les plans correspondants sont donnés par les équations :

$$\begin{aligned} dx \{y_0 + 2\lambda(x - k_1 x_0)\} + dy \{x_0 + 2\lambda(y + k_1 y_0)\} + dz \cdot 2\lambda(z - z_0) &= 0 \\ dx_0 \{y + 2\lambda(x_0 - k_1 x)\} + dy_0 \{x + 2\lambda(y_0 + k_1 y)\} + dz_0 \cdot 2\lambda(z_0 - z) &= 0 \end{aligned}$$

et l'on trouve pour les cosinus de l'angle de deux plans ( $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ) pour l'une et l'autre équations, en posant  $2\lambda k_2 = \mu$

$$\cos \varphi = \frac{\mu_1 \mu_2}{\sqrt{1 + \mu_1^2} \sqrt{1 + \mu_2^2}}$$

Quant à l'orientation des axes  $P$  et  $Q$  il faut la choisir de façon que si, par continuité,  $T$  devient réelle,  $P$  et  $Q$  viennent à se confondre en portant des sens opposés. Ceci exige que  $P$  et  $Q$  soient dirigés par

exemple comme  $\vec{pr}$  et  $\vec{rq}$ . Ceci résulte aussi de la remarque que nous avons faite plus haut sur la façon d'orienter  $P$  et  $Q$  à l'aide du cercle orienté  $\mu$ . Avec cette orientation, les deux faisceaux d'éléments sont *directement* égaux ; leur sens de rotation détermine avec le sens de leur axe une même orientation de l'espace.

4. Il s'agit maintenant de s'élever de ce cas particulier, où la surface  $\Phi$  est un plan imaginaire à celui où nous nous sommes placés tout d'abord, et où  $\Phi$  est une surface analytique quelconque. Considérons à cet effet deux surfaces  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  qui soient tangentes au point  $m$ . La tangente étant commune aux deux intersections  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , le point  $r$  et les axes  $P$  et  $Q$  sont communs aux deux transformations qu'engendrent  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ . Les points  $p$  et  $q$  où  $P$  et  $Q$  touchent leur enveloppe sont, nous l'avons vu, aussi les points où  $P$  et  $Q$  touchent le cercle-image du point  $m$ . Les courbes  $\pi_1$  et  $\pi_2$ , que  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  font correspondre à  $p$  sont donc elles-mêmes tangentes en  $q$ , avec  $Q$  comme tangente commune. — Pour fixer un élément de contact par l'axe  $P$  et son correspondant, considérons un axe voisin  $P'$ , déterminant avec  $P$  un plan  $\rho$ . Désignons cet élément par  $(p, \rho)$ . On peut supposer que  $P'$  s'obtient à partir d'un point  $p'$  voisin de  $p$ . Les axes  $Q$  et  $Q'$  correspondants auront alors également un élément de contact  $(q, \sigma)$  en commun : On l'obtiendra par exemple en projetant à partir de  $Q$  le point  $q'$  où l'axe  $Q'$  touche son enveloppe.

Admettons que dans le passage de  $p$  à  $p'$  l'isotope  $pm$  a pris la nouvelle position  $p'm'$  : aux infiniment près du second ordre,  $m'$  appartient encore aux deux surfaces  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ . Soit  $\mu'$  le cercle image de ce point. Les éléments de contact du faisceau d'axe  $Q'$  appartiennent aussi à ce cercle : il suffit pour trouver l'élément commun aux axes  $Q$  et  $Q'$  de mener par  $Q$  le plan tangent à  $\mu'$  ; cet élément  $(q, \sigma)$  correspond donc à  $(p, \rho)$  dans l'une et l'autre des transformations de contact. Si nous convenons de dire que deux transformations de contact du genre considéré sont *tangentes* lorsque les deux courbes  $\pi_1$  et  $\pi_2$  correspondant à un même point  $p$  sont tangentes au point  $q$ , et lorsque de plus tous les éléments de contact communs à  $\pi_1$  et à  $\pi_2$  en  $q$ , (et qui forment un faisceau autour de la tangente  $T$ ) ont également les mêmes éléments correspondants dans un même faisceau, de centre  $p$  et d'axe  $P$ , alors :

*Deux surfaces analytiques tangentes en un point engendrent des correspondances tangentes.*

Si maintenant on suppose que  $\Phi_2$  n'est autre chose que le plan tangent à  $\Phi_1$  au point  $m$ , on peut faire usage des résultats particuliers obtenus précédemment. La correspondance  $p \rightarrow \pi$  générale a donc les propriétés que voici :

I. *Deux axes correspondants  $P$  et  $Q$  sont toujours concourants.  $r$  étant leur point commun,  $p$  et  $q$  les centres des éléments de contact correspondants, on a :*

$$\overline{pr} = \overline{rq}$$

II. *Si ces axes sont convenablement orientés, les éléments de contact correspondants qu'ils supportent forment des faisceaux égaux.*

(Reçu le 4 septembre 1929)