

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 2 (1930)  
  
**Artikel:** Sur les représentations linéaires des groupes clos.  
**Autor:** Cartan, Elie  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-3623>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur les représentations linéaires des groupes clos

par ELIE CARTAN, Paris

Un groupe de substitutions linéaires  $G$  est un représentant linéaire d'un groupe fini et continu abstrait  $g$  si à toute opération  $R$  de  $g$  correspond une substitution déterminée  $S$  de  $G$ , la correspondance satisfaisant à la condition que la substitution  $S''$  correspondant au produit  $R'' = R R'$  soit le produit des substitutions  $S$  et  $S'$  correspondant à  $R$  et  $R'$ . Dans les travaux relatifs aux représentations linéaires d'un groupe donné  $g$ , on a d'abord supposé le groupe  $G$  engendré par des transformations infinitésimales<sup>1)</sup>: on peut aussi, ce qui est équivalent, admettre que les coefficients des substitutions de  $G$  sont des fonctions continues et dérivables jusqu'à un ordre convenable des paramètres de  $g$ . Il suffit du reste, d'après un théorème de J. von Neumann<sup>2)</sup>, de supposer la continuité de ces fonctions; d'après ce théorème en effet, tout groupe linéaire continu (par rapport à ses paramètres) est un groupe de Lie, c'est-à-dire un groupe engendré par des substitutions infinitésimales. Le théorème de J. von Neumann est du reste un cas particulier d'un théorème plus général, d'après lequel tout sous-groupe continu d'un groupe de Lie est lui-même un groupe de Lie<sup>3)</sup>.

Dans le cas où le groupe  $g$  est *clos* et *semi-simple*<sup>4)</sup>, on peut aller plus loin. Remarquons d'abord que si  $G$  est un représentant linéaire *continu* d'un tel groupe, c'est-à-dire si les coefficients des substitutions de  $G$  sont des fonctions continues des paramètres de  $g$ , ces coefficients sont *bornés*. Je me propose de démontrer que réciproquement *tout représentant linéaire borné de  $g$  est continu*.

---

<sup>1)</sup> C'est ce que j'ai supposé implicitement dans mes recherches sur les représentants linéaires irréductibles des groupes simples et semi-simples. Voir *E. Cartan*, Les groupes linéaires qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane (Bull. Soc. Math., t. 41, 1913, p. 53—96).

<sup>2)</sup> *J. von Neumann*, Zur Theorie der Darstellung kontinuierlicher Gruppen, (Sitzungsber. Akad. Berlin, 1927, p. 76—90). Ce théorème montre que le problème de la représentation linéaire (*continue*) d'un groupe fini et continu  $g$  ne peut se poser que si  $g$  est un groupe de Lie.

<sup>3)</sup> *E. Cartan*, La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs (Mém. Sc. Math. XLII, 1930, p. 22—24).

<sup>4)</sup> L'expression *semi-simple* est entendue dans un sens large, tout groupe simple étant regardé comme un groupe *semi-simple* particulier.

Ce théorème ne s'étend pas à tous les groupes  $g$  clos; on ne peut par exemple le démontrer pour un groupe clos commutatif. On sait du reste que tout groupe clos est, au moins infinitésimalement, le produit direct d'un groupe clos semi-simple et d'un groupe clos commutatif<sup>5)</sup>.

Dans un premier paragraphe, j'introduis la notion du groupe linéaire clos de fermeture de  $G$ , ce qui permet d'étendre l'énoncé du théorème à démontrer. Ce nouveau théorème est démontré d'abord lorsque  $g$  est le groupe des rotations de la sphère, d'où on déduit immédiatement la démonstration dans le cas général. Dans un dernier paragraphe j'énonce quelques conséquences intéressantes<sup>6)</sup>.

## I. Le groupe linéaire clos de fermeture

1. Désignons par  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les variables transformées linéairement par les opérations de  $G$ , représentant linéaire borné d'un groupe clos  $g$ . Désignons par  $\mathcal{G}$  le groupe de toutes les substitutions linéaires effectuées sur les variables  $x_i$ . A l'intérieur de  $\mathcal{G}$ , les opérations de  $G$  peuvent admettre des éléments d'accumulation n'appartenant pas à  $G$ ; l'ensemble des opérations de  $G$  et de ces éléments d'accumulation engendre un groupe linéaire  $I'$  *fermé dans*  $\mathcal{G}$ ; d'après un théorème fondamental, le sous-groupe  $I'$  de  $\mathcal{G}$ , fermé dans  $\mathcal{G}$ , est un sous groupe de Lie *continu* de  $\mathcal{G}$ <sup>7)</sup>. Le groupe continu linéaire  $I'$  sera appelé le groupe de fermeture de  $G$ . Son existence n'est pas liée à l'hypothèse que les substitutions de  $G$  sont bornées.

2. Cette hypothèse va maintenant nous permettre de démontrer que le groupe  $I'$  est clos. Considérons en effet un ensemble infini de substitutions de  $I'$ ; chacune d'elles peut être représentée par un point de l'espace à  $n^2$  dimensions de ses coefficients; tous ces points sont dans un domaine borné de l'espace; par conséquent ils admettent au moins un point d'accumulation, représentant une certaine substitution linéaire  $\Sigma$ . Si cette substitution linéaire n'est pas dégénérée, elle admet dans son voisinage une infinité de substitutions linéaires de  $I'$ , et par suite de  $G$ ; elle appartient donc à  $I'$ . Pour démontrer que  $I'$

<sup>5)</sup> E. Cartan, Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne (Journal Math. p. et appl., t. 8, 1929, p. 10).

<sup>6)</sup> Les résultats démontrés dans cet article ont été énoncés, avec quelques indications sommaires sur la démonstration, dans deux notes des Comptes Rendus (t. 190, 1930, p. 610 et 723).

<sup>7)</sup> E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs (Mém. Sc. Math., XLII, 1930, p. 24).

est clos, il suffit donc de démontrer que la substitution linéaire  $\Sigma$  ne peut être dégénérée.

Cela résulte de ce que les substitutions de  $G$ , et par suite de  $\Gamma$ , ont toutes leur déterminant de module égal à 1; s'il en est ainsi en effet, le déterminant de  $\Sigma$  est aussi de module 1, et  $\Sigma$  n'est pas dégénérée. Or le déterminant  $\Delta$  d'une substitution  $S$  de  $G$  ne peut être de module  $r > 1$ , car le déterminant de la substitution  $S^n$  de  $G$  serait  $r^n$ ; il augmenterait donc indéfiniment avec  $n$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que les coefficients de  $S^n$  restent bornés. Si l'on avait  $r < 1$ , le module du déterminant de  $S^{-1}$  serait plus grand que 1 et la conclusion serait la même.

3. Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant, dont le théorème énoncé plus haut n'est, d'après ce qui précède, qu'un cas particulier.

**Théorème A.** *Etant donnés deux groupes de Lie  $g$  et  $\mathcal{G}$ , dont le premier est semi-simple et clos, supposons qu'il existe une correspondance associant à chaque opération  $R$  de  $g$  une opération déterminée  $S$  de  $\mathcal{G}$ , de telle sorte que cette correspondance soit isomorphique et que le sous-groupe  $\Gamma$  de  $\mathcal{G}$  engendré par les opérations  $S$  et leurs éléments d'accumulation dans  $\mathcal{G}$  soit clos. Dans ces conditions, lorsque  $R$  varie d'une manière continue dans  $g$ , l'opération correspondante  $S$  varie d'une manière continue dans  $\mathcal{G}$ .*

Nous appellerons  $G$  le sous-groupe (non nécessairement continu) de  $\mathcal{G}$  engendré par les opérations  $S$  qui correspondent aux opérations  $R$  de  $g$ .

## II. Le cas du groupe des rotations de la sphère

4. Nous allons d'abord démontrer le théorème lorsque  $g$  est le groupe des rotations de la sphère.

Commençons par éliminer le cas où à deux rotations distinctes  $R_1$  et  $R_2$  correspondrait la même opération  $S$ ; dans ce cas, à la rotation non identique  $R_0 = R_1^{-1} R_2$  correspondrait l'opération identique de  $\mathcal{G}$ ; il en serait de même pour toutes les rotations  $R^{-1} R_0 R$  homologues de  $R_0$ , c'est-à-dire admettant le même angle de rotation  $\alpha$  que  $R_0$ , ainsi que pour le produit de deux rotations quelconques d'angle  $\alpha$ . Or



si  $\varphi$  désigne l'angle des axes de ces deux rotations, l'angle  $\beta$  de la rotation résultante est donné par la formule

$$\cos \frac{\beta}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \varphi;$$

on voit que  $\beta$  peut prendre toutes les valeurs entre 0 et  $2\alpha$ ; par suite à toute rotation  $R$  dont l'angle est inférieur ou égal à  $2\alpha$  correspond l'opération identique de  $\mathcal{G}$ . Comme toute rotation est le produit d'un nombre fini de rotations d'angle inférieur à  $2\alpha$ , à toutes les rotations correspond l'opération identique de  $\mathcal{G}$ . Dans ce cas le théorème est évident.

*Nous pouvons donc admettre que la correspondance entre les rotations  $R$  de  $g$  et les opérations  $S$  de  $G$  est biunivoque.*

**5.** Nous allons maintenant établir un certain nombre de propriétés du groupe clos  $I$ .

1° *Le groupe  $I$  est connexe.* — S'il n'en était pas ainsi, le groupe  $I$ , étant clos, serait formé d'un nombre fini  $h$  de familles connexes d'opérations<sup>8)</sup>, dans chacune desquelles entreraient une infinité d'opérations  $S$  de  $G$ . Soit  $I_0$  la famille contenant l'opération identique,  $S_0$  une opération non identique contenue dans  $I_0$ ,  $R_0$  la rotation à laquelle elle correspond. Aux rotations homologues de  $R_0$  correspondent des opérations  $S$  homologues de  $S_0$  dans  $I$ , et par suite contenues dans  $I_0$ ; au produit de deux rotations quelconques homologues à  $R_0$  correspond donc une opération  $S$  de  $I_0$ . On en déduit, comme tout à l'heure, que toutes les opérations  $S$  appartiennent à  $I_0$ . C. Q. F. D.

2° *Le groupe  $I$  ne contient aucune opération non identique échangeable avec toutes les autres.* — Soit en effet  $\Sigma_0$  une telle opération; elle peut être regardée comme limite dans  $I$  d'une suite infinie d'opérations  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  de  $G$ . Soit  $\Sigma$  une opération quelconque de  $I$ ; l'égalité

$$\Sigma_0 \Sigma = \Sigma \Sigma_0$$

montre que l'opération  $T_n = S_n \Sigma S_n^{-1} \Sigma^{-1}$  tend dans  $I$  vers l'opération identique.

Soit  $\mathcal{V}$  un voisinage aussi petit qu'on veut de l'opération identique dans  $I$ . L'opération  $\Sigma$  étant donnée, on peut trouver un entier  $\nu$  tel que pour toutes les valeurs  $n \geq \nu$ , l'opération  $T_n$  soit intérieure à  $\mathcal{V}$ ;

<sup>8)</sup> Mém. Sc. Math., XLII, p. 8.

nous supposons que  $\nu$  est le plus petit entier répondant à cette condition. Un raisonnement classique, fondé sur la propriété de  $\Gamma$  d'être clos, montre que l'entier  $\nu$  associé aux différentes opérations  $\Sigma$  de  $\Gamma$  est *borné*. Il existe donc un entier  $n_0$  tel que, quelle que soit  $\Sigma$ , l'opération  $S_{n_0} \Sigma S_{n_0}^{-1} \Sigma^{-1}$  soit intérieure à  $\mathcal{V}$ ; il en sera ainsi en particulier pour toutes les opérations  $S_{n_0} S S_{n_0}^{-1} S^{-1}$ . Soit  $R_0$  la rotation correspondant à  $S_{n_0}$ ,  $R$  une rotation arbitraire; on voit qu'au produit de  $R_0$  par une rotation arbitraire homologue à  $R_0$  correspond une opération intérieure à  $\mathcal{V}$ . Par suite à toute rotation d'un angle inférieur à une limite fixe correspond une opération intérieure à  $\mathcal{V}$  ou homologue d'une opération intérieure à  $\mathcal{V}$ . Or on peut trouver un voisinage  $\mathcal{V}'$  intérieur à  $\mathcal{V}$  tel que toutes les homologues des opérations de  $\mathcal{V}'$  appartiennent à  $\mathcal{V}$ , et, en faisant sur  $\mathcal{V}'$  le raisonnement qu'on a fait sur  $\mathcal{V}$ , on voit qu'à tout voisinage  $\mathcal{V}$  de l'opération identique dans  $\Gamma$  correspond, dans  $g$ , un voisinage  $v$  suffisamment petit pour qu'à toute rotation  $R$  intérieure à  $v$  corresponde une opération  $S$  intérieure à  $\mathcal{V}$ . On en déduit immédiatement que si  $S_0$  correspond à  $R_0$ , à tout voisinage  $\mathcal{V}$  entourant  $S_0$  dans  $\Gamma$  on peut faire correspondre un voisinage  $v$  suffisamment petit entourant  $R_0$  dans  $g$ , de telle sorte qu'à toute rotation  $R$  intérieure à  $v$  corresponde une opération  $S$  intérieure à  $\mathcal{V}$ . Mais c'est qu'alors la correspondance entre  $R$  et  $S$  est continue;  $\Gamma$  se confond avec  $G$  et la rotation, non identique, qui correspond à  $S_0$  serait échangeable avec toutes les autres, ce qui est impossible.

Le raisonnement ne tomberait en défaut que si la rotation  $R_0$  correspondant à  $S_{n_0}$  était identique, mais alors  $S_{n_0}$  serait identique et on peut choisir  $n_0$  suffisamment grand pour qu'il n'en soit pas ainsi, puisque  $S_n$  tend vers  $S_0$ .

3° *Le groupe  $\Gamma$  est semi-simple.* — Sinon en effet, il admettrait au moins une transformation infinitésimale échangeable avec toutes les autres<sup>9)</sup>.

6. Nous allons maintenant porter notre attention sur les symétries par rapport aux différents diamètres de la sphère, qui sont des opérations involutives de  $g$  toutes homologues entre elles. Il leur correspond dans  $G$  des opérations involutives  $I$  toutes homologues entre elles dans  $\Gamma$ . Soit  $I_0$  l'une d'elles; il est facile de voir que toute involution  $\mathcal{I}$  homologue de  $I_0$  dans  $\Gamma$  est limite dans  $\Gamma$  d'une suite d'involutions  $I$ ; en effet soit

<sup>9)</sup> Note <sup>b)</sup> p. 2.

$$\mathcal{J} = \Sigma^{-1} I_0 \Sigma;$$

l'opération  $\Sigma$  est limite d'une suite infinie d'opérations  $S_n$ , et par suite  $\mathcal{J}$  est limite d'une suite infinie d'involutions  $I_n = S_n^{-1} I_0 S_n$ . Nous donnerons aux involutions  $\mathcal{J}$  ainsi obtenues le nom *d'involutions normales* du groupe  $\Gamma^{10}$ ).

4° *Toute opération de  $\Gamma$  peut être regardée comme le produit de deux involutions normales.* — En effet toute rotation  $R$  pouvant être regardée comme le produit de deux symétries axiales, toute opération  $S$  est le produit de deux involutions normales  $I_1$  et  $I_2$  appartenant à  $G$ . Soit alors  $\Sigma$  une opération quelconque de  $\Gamma$ ; elle est la limite d'une suite infinie d'opérations  $S_n = I_1^{(n)} I_2^{(n)}$ . La variété des  $\mathcal{J}$  étant close, on peut extraire de la suite infinie des indices 1, 2, ... une suite infinie partielle  $\nu_1, \nu_2, \dots$ , telle que  $I_1^{(\nu_p)}$  tende vers une involution normale limite  $\mathcal{J}_1$  et  $I_2^{(\nu_p)}$  vers une involution normale limite  $\mathcal{J}_2$ . On en déduit  $\Sigma = \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2$ , ce qu'il fallait démontrer.

5° *Il existe toujours une involution normale  $\mathcal{J}$  orthogonale à deux involutions normales données  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ .* — La propriété est évidente si  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  appartiennent à  $G$ . Dans le cas général supposons  $\mathcal{F}_1 = \lim I_1^{(n)}$ ,  $\mathcal{F}_2 = \lim I_2^{(n)}$ . Pour chaque valeur de  $n$ , il existe une involution normale  $I^{(n)}$  orthogonale à  $I_1^{(n)}$  et  $I_2^{(n)}$ ; en restreignant la suite des indices 1, 2, ...,  $n$ , on peut supposer que  $I^{(n)}$  tende vers une limite  $\mathcal{J}$ , et l'involutions normale  $\mathcal{J}$  répond à la question.

6° *Il n'existe qu'un nombre fini d'involutions normales orthogonales à deux involutions normales arbitrairement données.* — Soient  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  deux involutions normales telles que le produit  $\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2$  soit une opération *non singulière*  $\Sigma$  de  $\Gamma$ : cette condition peut toujours être réalisée d'après 4°. Toute involution normale orthogonale à  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  est échangeable avec ces deux involutions et par suite avec leur produit  $\Sigma$ . Or l'ensemble des opérations de  $\Gamma$  échangeables avec la transformation non singulière  $\Sigma$  forme un sous-groupe clos commutatif  $\gamma$  dont l'ordre  $l$  est le *rang* de  $\Gamma^{11}$ ). Mais un groupe clos commutatif n'admet qu'un nombre fini d'opérations involutives; en effet chaque opération de  $\gamma$  peut être définie par  $l$  paramètres  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l$ , le produit des deux opérations  $(\varphi_i)$  et  $(\varphi_i')$  étant l'opération  $(\varphi_i + \varphi_i')$ , et la condition nécessaire et suffisante pour que deux opérations soient égales étant que les différences

<sup>10)</sup> Il pourrait arriver que le groupe  $\Gamma$  admît d'autres familles connexes d'involutions.

<sup>11)</sup> Voir, pour les propriétés rappelées des groupes semi-simples clos, le fascicule XLII déjà cité du *Mémorial des Sc. Math.*, p. 38.

$\varphi_i' - \varphi_i$  soient des nombres entiers <sup>12)</sup>. Les seules opérations involutives sont celles qui correspondent à des valeurs des paramètres égales à 0 ou  $\frac{1}{2}$ ; elles sont donc en nombre fini.

7° *Le nombre  $\nu$  de paramètres dont dépendent les involutions normales orthogonales à une involution normale donnée est au plus égal à la moitié du nombre  $n$  de paramètres dont dépendent toutes les involutions normales.* — Plaçons-nous dans l'espace  $\mathcal{C}$  à  $n$  dimensions des involutions normales et considérons d'abord la variété  $V$ , lieu des involutions normales orthogonales à une involution normale donnée  $\mathcal{F}_0$ . Soit  $\mathcal{F}$  un point de cette variété, supposée à  $\nu$  dimensions. Soit  $\mathcal{F}'$  un point de  $V$  voisin de  $\mathcal{F}$ ; l'opération  $\mathcal{F}\mathcal{F}'$  est invariante par  $\mathcal{F}_0$ ; d'autre part elle est transformée par  $\mathcal{F}$  dans son inverse:

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}\mathcal{F}')\mathcal{F} = \mathcal{F}'\mathcal{F} = (\mathcal{F}\mathcal{F}')^{-1}.$$

Cette opération  $\mathcal{F}\mathcal{F}'$  est engendrée par une transformation infinitésimale  $U$  de  $\Gamma$ , invariante par  $\mathcal{F}_0$  et changée par  $\mathcal{F}$  dans son inverse  $-U$ . Soit  $\sigma$  une opération quelconque du sous-groupe à un paramètre engendré par  $U$ ; la transformation  $\mathcal{F}\sigma$  est involutive puisque,  $\mathcal{F}\sigma\mathcal{F}$  étant égal à  $\sigma^{-1}$ , on a  $\mathcal{F}\sigma = \sigma^{-1}\mathcal{F} = (\mathcal{F}\sigma)^{-1}$ ; c'est donc une involution normale <sup>13)</sup>; elle est d'autre part échangeable avec  $\mathcal{F}_0$ , puisqu'il en est ainsi de  $\mathcal{F}$  et de  $\sigma$ ; elle appartient donc à la variété  $V$ . Il résulte de là que si deux variétés  $V$  ont un point commun  $\mathcal{F}$  et sont tangentes entre elles en ce point dans une certaine direction, elles ont en commun toute une ligne passant par  $\mathcal{F}$ .

Cela posé, soient  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  deux involutions normales arbitraires: il existe (5°) au moins une involution normale  $\mathcal{F}$  orthogonale à  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ . Les deux variétés  $V_1$  et  $V_2$ , lieux des involutions normales orthogonales respectivement à  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ , ont en commun le point  $\mathcal{F}$ ; les éléments plans tangents à ces deux variétés en  $\mathcal{F}$  étant à  $\nu$  dimensions, auront au moins un élément linéaire commun si  $2\nu > n$ ; mais cela est impossible, parce que les deux variétés auraient une ligne commune, ce qui est en contradiction avec 6°. On a donc

$$\nu \leq \frac{n}{2}.$$

<sup>12)</sup> Mém. Sc. Math., XLII, p. 36.

<sup>13)</sup> Cette involution, étant liée d'une manière continue à une involution normale, est aussi normale.

8° Etant données trois involutions normales  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}$ , il existe au moins une involution normale  $\mathcal{F}'$  orthogonale à  $\mathcal{F}$  et satisfaisant à la relation  $\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 \mathcal{F}' = \mathcal{F}' \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1$ . — La propriété est évidente si  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}$  appartiennent à  $G$ ; soient en effet  $\Delta_1, \Delta_2$  et  $\Delta$  les axes des symétries axiales correspondantes,  $\Delta'$  l'axe perpendiculaire à  $\Delta$  et coplanaire à  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ : il suffit de prendre pour  $\mathcal{F}'$  l'involution correspondant à la symétrie d'axe  $\Delta'$ . La relation  $\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 \mathcal{F}' = \mathcal{F}' \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1$  traduit alors une relation évidente entre les trois symétries d'axes coplanaires  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta'$ .

Dans le cas général, on n'a qu'à considérer trois suites infinies  $I_1^{(n)}, I_2^{(n)}, I^{(n)}$  d'involutions normales appartenant à  $G$  et tendant vers  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}$ ; on en déduit une suite infinie  $I'^{(n)}$ , l'involution  $I'^{(n)}$  étant orthogonale à  $I^{(n)}$ , avec  $I_1^{(n)} I_2^{(n)} I'^{(n)} = I'^{(n)} I_2^{(n)} I_1^{(n)}$ . Un raisonnement déjà fait plusieurs fois prouve alors l'existence d'une involution normale  $\mathcal{F}'$  répondant à la question.

7. Avant d'aller plus loin, rappelons quelques notions de la théorie des espaces symétriques clos<sup>14</sup>). La variété  $\mathcal{C}$  des involutions normales est un tel espace. Si  $\mathcal{F}_0$  est une involution normale fixe, les transformations infinitésimales de  $I'$  se déduisent de  $r - n$  rotations infinitésimales indépendantes échangeables avec  $\mathcal{F}_0$  et de  $n$  transvections infinitésimales indépendantes transformées par  $\mathcal{F}_0$  en leurs inverses; chaque transvection est du reste de la forme  $\mathcal{F}_0 \mathcal{F}$ . On appelle *rang*  $\lambda$  de l'espace  $\mathcal{C}$  le nombre de paramètres dont dépend la transvection infinitésimale la plus générale échangeable avec une transvection infinitésimale arbitrairement donnée; toutes ces transvections infinitésimales sont alors échangeables entre elles. Le rang  $\lambda$  de  $\mathcal{C}$  est nécessairement au plus égal au rang  $l$  du groupe  $I'$ , et aux  $\lambda$  transvections infinitésimales échangeables entre elles on peut associer  $l - \lambda$  rotations infinitésimales échangeables entre elles et échangeables avec les  $\lambda$  transvections considérées. Enfin si  $r$  désigne l'ordre du groupe  $I'$ , on a

$$(I) \quad (r - n) - (l - \lambda) = n - \lambda \quad \text{ou} \quad r = 2n + l - 2\lambda.$$

<sup>14</sup>) Mém. Sc. Math., XLII, p. 54; et E. Cartan, Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple (Ann. Ec. Norm., 44, 1927, p. 345—467, en particulier les nos 1—14, 37—38).

9° Les involutions normales  $\mathcal{F}'$  satisfaisant à

$$\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 \mathcal{F}' = \mathcal{F}' \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1,$$

où  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont deux involutions normales arbitrairement données, dépendent de  $\lambda$  paramètres. — En effet la relation donnée peut s'écrire

$$(\mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1) (\mathcal{F}_2 \mathcal{F}') = (\mathcal{F}_2 \mathcal{F}') (\mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1).$$

Si l'on fait jouer au point  $\mathcal{F}_2$  le rôle joué tout à l'heure par le point  $\mathcal{F}_0$ , on voit que  $\mathcal{F}'$  est caractérisée par la propriété que la transvection  $\mathcal{F}_2 \mathcal{F}'$  est échangeable avec la transvection  $\mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1$ ; si donc cette dernière transvection n'est pas singulière,  $\mathcal{F}'$  dépend de  $\lambda$  paramètres, d'après la définition même du rang de  $\mathcal{C}$ .

10° On a entre le nombre de dimensions  $n$  de l'espace  $\mathcal{C}$  et son rang  $\lambda$  la relation  $n \leq 2\lambda$ . — En effet, partons de deux involutions normales fixes  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  telles que la transvection  $\mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1$  ne soit pas singulière. A toute involution normale  $\mathcal{F}$  on peut, d'après 8°, associer une involution normale  $\mathcal{F}'$  orthogonale à  $\mathcal{F}$  et satisfaisant à

$$\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 \mathcal{F}' = \mathcal{F}' \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_1.$$

Les involutions  $\mathcal{F}'$  dépendant de  $\lambda$  paramètres et les involutions  $\mathcal{F}$  orthogonales à une involution normale donnée  $\mathcal{F}'$  dépendant de  $\nu \leq \frac{n}{2}$  paramètres, les involutions normales  $\mathcal{F}$  dépendent au maximum de  $\lambda + \nu \leq \lambda + \frac{n}{2}$  paramètres.

L'inégalité

$$n \leq \lambda + \frac{n}{2}$$

est équivalente à l'inégalité à démontrer

$$(2) \quad n \leq 2\lambda.$$

11° L'ordre  $r$  du groupe  $\Gamma$  est au plus égal au triple  $3l$  de son rang. En effet on tire de (1) et (2)

$$r \leq 2\lambda + l,$$

d'où, comme  $\lambda \leq l$ ,

$$r \leq 3l.$$

12° Le groupe  $\Gamma$  est d'ordre 3 ou est le produit direct de plusieurs groupes simples d'ordre 3. — Rappelons que l'ordre  $r$  d'un groupe simple est toujours supérieur au triple  $3l$  de son rang, sauf lorsque  $l=1$ ,  $r=3$ . Si donc le groupe  $\Gamma$  est simple, il est à 3 paramètres, et comme il n'admet aucune opération échangeable avec toutes les autres (d'après 2°), il est isomorphe au groupe des rotations de la sphère. Si  $\Gamma$  n'est pas simple, il est, au moins infinitésimalement, le produit direct de plusieurs groupes simples  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ , pour chacun desquels on a  $r_i \leq 3l_i$ , d'où  $r_i=3$ ,  $l_i=1$ . Chacun de ces groupes est isomorphe au groupe des rotations de la sphère et  $\Gamma$  est leur produit direct.

8. Arrivons maintenant à la démonstration du théorème  $A$ , en commençant par le cas où  $\Gamma$  est simple. On peut alors regarder les opérations de  $\Gamma$  comme les rotations autour d'un point fixe  $O'$  dans l'espace ordinaire, les opérations de  $g$  étant les rotations autour d'un autre point fixe  $O$ . Portons notre attention sur les symétries de  $g$  et de  $\Gamma$ . Nous avons alors une correspondance entre droites issues de  $O$  et droites issues de  $O'$ , cette correspondance jouissant des propriétés suivantes :

a) *A toute droite issue de  $O$  correspond une droite déterminée issue de  $O'$ ;*

b) *A deux droites distinctes issues de  $O$  correspondent deux droites distinctes issues de  $O'$ ;*

c) *A deux droites perpendiculaires issues de  $O$  correspondent deux droites perpendiculaires issues de  $O'$ ;*

d) *A trois droites coplanaires issues de  $O$  correspondent trois droites coplanaires issues de  $O'$ ;*

e) *A trois droites non coplanaires issues de  $O$  correspondent trois droites non coplanaires issues de  $O'$ .*

La propriété d) est une conséquence immédiate de c). Quant à la propriété e), elle se déduit du fait que toute droite issue de  $O'$  doit correspondre à une droite issue de  $O$  ou être élément d'accumulation pour un ensemble infini de telles droites. Si en effet à trois droites non coplanaires  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ , issues de  $O$  correspondaient trois droites issues de  $O'$  et situées dans un même plan  $\Pi'$ , à toute droite issue de  $O$  correspondrait, d'après d), une droite située dans le plan  $\Pi'$ , ce qui conduirait à une contradiction.

On peut regarder les droites issues de  $O$  comme les éléments ou points d'un plan projectif réel. Le théorème fondamental de la géométrie projective réelle montre alors que la transformation qui fait passer d'une



droite issue de  $O$  à la droite correspondante issue de  $O'$  est *homographique*<sup>15)</sup>. Par suite elle admet une inverse, c'est-à-dire que toute droite issue de  $O'$  correspond à une droite issue de  $O$ , et  $G$  se confond avec  $\Gamma$ . De plus la correspondance est continue. La continuité de la correspondance établie pour les involutions de  $g$  et de  $G$  s'étend d'elle-même aux autres opérations, dont chacune est le produit de deux involutions. Le théorème est ainsi complètement démontré.

9. Le cas où le groupe  $\Gamma$  est semi-simple est maintenant facile à éliminer. Supposons que  $\Gamma$  soit le produit direct de  $h$  groupes simples  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_h$ , tous isomorphes au groupe des rotations de la sphère. Chaque opération  $\Sigma$  de  $\Gamma$  est, d'une manière et d'une seule, le produit  $\Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_h$  de  $h$  opérations appartenant respectivement à  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_h$ . A chaque rotation  $R$  de  $g$  correspond donc une opération bien déterminée  $S_1$  de  $\Gamma_1$  et l'ensemble de ces opérations  $S_1$  et de leurs éléments d'accumulation dans  $\Gamma_1$  doit fournir le groupe  $\Gamma_1$  tout entier, sinon le groupe de fermeture  $\Gamma$  ne serait pas le produit  $\Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_h$ . Nous pouvons donc appliquer au groupe simple  $\Gamma_1$  le théorème qui vient d'être démontré : toutes les opérations de  $\Gamma_1$  correspondent à des rotations  $R$ ; il en est de même pour les opérations des autres groupes  $\Gamma_i$ . Mais s'il en est ainsi, une opération  $S_1$  de  $\Gamma_1$  correspond nécessairement à une infinité d'opérations distinctes de  $g$ , à savoir toutes celles auxquelles correspondent les opérations  $S_1 S_2 \dots S_h$ , où on fait varier  $S_2, S_3, \dots, S_h$ . Il y a donc contradiction.

### III. Le cas où $g$ est simple d'ordre 3.

10. Avant d'examiner le cas du groupe  $g$  semi-simple le plus général, traitons complètement le cas des groupes simples d'ordre 3. Tous ces groupes sont *infinitésimalement* isomorphes au groupe des rotations de la sphère; mais l'isomorphisme peut ne pas être intégral. S'il ne l'est pas, le groupe  $g$  est isomorphe au groupe linéaire unimodulaire d'une forme d'Hermite  $x\bar{x} + y\bar{y}$ . A chaque opération du groupe  $\bar{g}$  des rotations de la sphère correspondent alors deux opérations distinctes de  $g$  :

<sup>15)</sup> Ce théorème se ramène, comme on sait, au théorème de v. Staudt d'après lequel toute transformation ponctuelle d'une droite projective en une droite projective qui change deux points distincts en deux points distincts et quatre points en division harmonique en quatre points en division harmonique est une homographie. En réalité v. Staudt supposait la transformation continue et admettait l'existence d'une transformation inverse. C'est Darboux qui a montré que l'hypothèse de la continuité n'était pas nécessaire. On voit quelle est la portée de la remarque de Darboux.



$$\begin{array}{lcl} x' = ax - by, & \text{et} & x' = -ax + by, \\ y' = \bar{b}x + \bar{a}y, & & y' = -\bar{b}x - \bar{a}y, \end{array} \quad (a\bar{a} + b\bar{b} = 1).$$

A la substitution linéaire

$$x' = -x, \quad y' = -y$$

échangeable avec toutes les autres, correspond dans  $G$  une opération involutive  $\sigma_0$  échangeable avec toutes les autres opérations de  $G$  et par suite de  $I'$ ; il se peut du reste que  $\sigma_0$  soit l'opération identique.

Cela posé, si nous convenons de regarder comme une opération d'une nouvelle espèce l'ensemble des deux opérations  $\Sigma$  et  $\sigma_0\Sigma$  de  $I'$ , nous obtenons un nouveau groupe clos  $\bar{I}$ . A chaque rotation de la sphère correspondent deux opérations de  $g$  et une seule opération de  $\bar{I}$ , et la correspondance est isomorphique. Par suite  $\bar{I}$  est isomorphe au groupe des rotations de la sphère et la correspondance entre  $\bar{g}$  et  $\bar{I}$  est continue. La correspondance entre  $g$  et  $I'$  l'est donc aussi si  $\sigma_0$  se réduit à l'opération identique, puisqu'alors  $I'$  n'est autre que  $\bar{I}$ .

Si  $\sigma_0$  n'est pas l'opération identique, la conclusion est la même. En effet, soit dans  $I'$  un voisinage  $\mathcal{V}$  aussi petit qu'on veut de l'opération identique, et soit  $\mathcal{V}'$  l'ensemble des opérations  $\sigma_0\mathcal{V}$ . Toute opération  $R$  de  $g$ , suffisamment voisine de l'opération identique, a sa correspondante intérieure à  $\mathcal{V}$  ou à  $\mathcal{V}'$ ; or  $R$  peut être regardée comme le carré  $R'^2$  d'une opération également voisine de l'opération identique; que la correspondante de  $R'$  appartienne à  $\mathcal{V}$  ou à  $\mathcal{V}'$ , la correspondante de son carré appartiendra à  $\mathcal{V}$ . Par suite, au voisinage de l'opération identique dans  $g$  correspond le voisinage de l'opération identique dans  $I'$ . Cela suffit pour démontrer le théorème.

#### IV. Le cas d'un groupe $g$ semi-simple quelconque.

II. La démonstration du théorème  $A$  dans le cas général est maintenant facile. Toute transformation  $R$  de  $g$  est, comme on sait, homologue à une transformation d'un sous-groupe commutatif d'ordre  $l$ ,  $l$  étant le rang du groupe. Ce sous-groupe peut être engendré par  $l$  transformations infinitésimales indépendantes  $Y_1, Y_2, \dots, Y_l$ , dont chacune  $Y_i$  fait partie d'un sous-groupe clos à 3 paramètres  $g_i$  de  $g$ . A chacun de ces sous-groupes correspond dans  $I'$  un sous-groupe également à 3 paramètres  $\gamma_i$  (ou l'opération identique), et il existe une correspondance biunivoque et bicontinue entre les opérations de  $g_i$  et celles de  $\gamma_i$ . Par

suite à la transformation  $R$ , supposée infiniment voisine de l'opération identique, correspond dans  $I'$  une opération aussi voisine qu'on veut de l'opération identique. Cela suffit pour démontrer le théorème.

On remarquera que l'hypothèse d'après laquelle le groupe  $g$  est semi-simple joue un rôle essentiel; si  $g$  était commutatif, le raisonnement tomberait.

## V. Quelques conséquences du théorème A

12. Si nous nous plaçons dans le cas particulier où le groupe  $G$  est clos, le groupe de fermeture  $I'$  de  $G$  est nécessairement clos. Nous avons donc le théorème suivant:

**Théorème B.** — *Etant donnés deux groupes de Lie clos  $g$  et  $\mathcal{G}$  dont le premier est semi-simple, supposons qu'il existe une correspondance associant à chaque opération  $R$  de  $g$  une opération déterminée  $S$  de  $\mathcal{G}$ , cette correspondance étant isomorphique. Lorsque  $R$  varie d'une manière continue dans  $g$ , l'opération  $S$  varie également d'une manière continue dans  $\mathcal{G}$ .*

Signalons une conséquence immédiate:

**Théorème C.** — *Toute correspondance isomorphique biunivoque entre deux groupes de Lie clos semi-simples est continue. En particulier toute automorphie d'un groupe de Lie clos semi-simple est continue.*

13. Voici maintenant un théorème d'une autre nature, qui nous ramène à la théorie des représentations linéaires.

**Théorème D.** — *Etant donné un espace clos transformé transitivement par un groupe de Lie clos semi-simple  $g$ , s'il existe dans cet espace une suite de fonctions bornées  $U_1, U_2, \dots, U_p$  subissant une substitution linéaire par toute transformation de  $g$ , ces fonctions sont continues.*

Nous supposons les fonctions  $U_1, U_2, \dots, U_p$  linéairement indépendantes; autrement dit, il est impossible de trouver  $p$  constantes non toutes nulles  $c_1, c_2, \dots, c_p$  telles que  $c_1 U_1 + c_2 U_2 + \dots + c_p U_p$  soit nulle en tous les points de l'espace.

A toute transformation  $R$  de  $g$  correspond une substitution linéaire bien déterminée  $S$  portant sur  $U_1, \dots, U_p$ . Montrons d'abord que les coefficients de cette substitution sont bornés.

On peut en effet trouver dans l'espace donné  $p$  points  $M_1, M_2, \dots, M_p$  tels que le déterminant des  $p^2$  quantités  $U_i(M_j)$  ne soit pas nul. Fixons ces  $p$  points. Soient  $M_1', M_2', \dots, M_p'$  les points transformés de  $M_1, M_2, \dots, M_p$  par une transformation  $R$  de  $g$ ; on a

$$U_i(M_j') = \sum_k a_{ik} U_k(M_j),$$

les  $a_{ik}$  étant les coefficients de la substitution  $S$  associée à  $R$ . Ces  $p^2$  relations linéaires permettent de calculer les  $a_{ik}$ , et comme les premiers membres sont bornés, les inconnues  $a_{ik}$  sont également bornées.

D'après le théorème A, les substitutions linéaires  $S$  varient d'une manière continue avec  $R$ . Soient alors  $M$  et  $M'$  deux points infiniment voisins de l'espace; on peut passer de  $M$  à  $M'$  par une transformation  $R$  infiniment voisine de la transformation identique; on passe donc des  $U_i(M)$  aux  $U_i(M')$  par une substitution linéaire infiniment voisine de la substitution identique. Les fonctions  $U_i$  sont donc continues<sup>16)</sup>.

14. On peut énoncer le théorème D, en le généralisant un peu, sous une forme géométrique intéressante.

**Théorème E.** — *Etant donné un espace clos transformé transitivement par un groupe de Lie clos semi-simple  $g$ , toute représentation univoque des points de cet espace par les points d'un ensemble borné  $E$  d'un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions est continue, sous la seule condition que toute transformation de  $g$  sur les points de l'espace donné se traduise par une affinité sur les points de  $E$ .*

Supposons que l'ensemble  $E$  soit situé dans l'espace euclidien à  $p$  dimensions, mais ne soit pas tout entier situé dans un hyperplan à  $p - 1$  dimensions de cet espace. A chaque transformation  $R$  de  $g$  correspond une affinité de l'espace euclidien à  $p$  dimensions:

$$x_i' = a_{i1} x_1 + \dots + a_{ip} x_p + a_i \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

On démontre, de la même manière qu'au numéro précédent, que les coefficients de ces substitutions sont bornés, d'où l'on déduit, comme

<sup>16)</sup> Dans un Mémoire intitulé: Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos (Rend. Circ. Mat. Palermo, 53, 1929, p. 217—232), j'ai indiqué comment on peut déterminer toutes les suites de fonctions continues satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Ces fonctions jouent le rôle des fonctions sphériques de Laplace sur une sphère transformée par le groupe des rotations autour de son centre.

au n° 2, que le groupe de fermeture du groupe engendré par ces substitutions est clos. Par suite les coefficients sont des fonctions continues de la transformation  $R$  et deux points infiniment voisins de l'espace donné se représentent par deux points infiniment voisins de l'ensemble  $E$ .

On peut ajouter que le groupe affine  $G$ , étant clos, laisse invariant un polynôme du second degré défini positif en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; si, par une affinité préalable, on réduit ce polynôme à la forme  $x_1^2 + \dots + x_n^2 + c$ , on voit que  $G$  laisse invariant un point fixe et que l'ensemble  $E$  est tout entier situé sur une hypersphère ayant ce point pour centre. Les coordonnées  $x_1, \dots, x_p$  sont alors, dans l'espace donné, des fonctions  $U_1, \dots, U_p$  satisfaisant aux conditions du théorème D.

(Reçu le 11 septembre 1930)