

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 2 (1930)

**Artikel:** Gruppen und Verkettungen.  
**Autor:** Fischer, Anna  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-3622>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Gruppen und Verkettungen

Von ANNA FISCHER, Bern<sup>1)</sup>

In einer früheren Arbeit habe ich zwei spezielle Arten von Verkettungen untersucht, die sich durch einen besonders einfachen Bau ihrer Fundamentalgruppe auszeichnen. Die notwendigen charakteristischen Invarianten ließen sich aus der Gruppe ablesen und die Verkettungen konnten klassifiziert werden. Ferner ist gezeigt worden, daß bei diesen, zentralen und bizentralen Verkettungen die Kommutativität der Erzeugenden der gruppentheoretische Ausdruck ist für die richtig definierte Drehbarkeit der entsprechenden Kreise umeinander.

In dieser Arbeit werden weitere einfache Verkettungen untersucht, die zu sehr übersichtlichen Gruppen führen (§ 2). Die vollständige Charakterisierung gelingt aber hier nicht mehr mit der Gruppe allein, sondern erst nach Einführung eines *Vorzeichensymbols*, das als eine gewisse Verallgemeinerung der Gauß'schen Verschlingungsinvariante  $m$  betrachtet werden kann. Bei den offenen und geschlossenen Ketten (§ 3) tritt die geometrische Bedeutung der Kommutativität wieder deutlich zu Tage. Schließlich werden noch Verkettungen behandelt, für die  $|2m| = |4|$  oder Null ist (§ 4).

## § 1. Grundlagen

Es sollen zunächst einige z. T. bekannte Ergebnisse zusammengestellt werden, auf die wir uns im Weiteren stützen werden.

1. Die Fundamentalgruppe eines Knotens und einer Verkettung wird bekanntlich wie folgt aus einer regulären normierten und orientierten Projektion abgelesen:<sup>2)</sup> Jedem Ast von einer Unterkreuzung bis zur nächsten ordnet man eine Erzeugende  $C_i$  zu. Werden in einem Kreuzungspunkt die Aeste  $C_\lambda$  und  $C_{\lambda+1}$  vom Aste  $C_\mu$  überkreuzt, so lautet die zugehörige definierende Relation:  $C_{\lambda+1}^{-1} C_\mu^\varepsilon C_\lambda C_\mu^{-\varepsilon} = 1$ , wobei  $\varepsilon = \pm 1$  ist, je nachdem die Richtung von  $C_\mu$  nach einer positiven Drehung um einen Winkel  $\varphi < \pi$  mit der Richtung von  $C_\lambda$  zusammenfällt oder nicht. (Als positive Drehung betrachten wir stets diejenige im Uhrzeigersinn.) Wir werden im Folgenden jedem Kreuzungspunkt

<sup>1)</sup> Ein Teil der Ergebnisse dieser Arbeit zusammen mit der früher veröffentlichten (C. M. H. I, 313, 1929) ist als Habilitationsschrift in der Philosophischen Fakultät II der Universität Bern vorgelegt.

<sup>2)</sup> K. Reidemeister, Hamb. Abhdl. V, 24, 1926; A. Fischer, C. M. H. I, 313, 1929.

mit  $\varepsilon = +1$  ein  $+$  Vorzeichen, jedem mit  $\varepsilon = -1$  ein  $-$  Vorzeichen zuordnen.

Das Vorzeichen der Ueberkreuzungen ist schon von Tait in seinen Knotenuntersuchungen eingeführt worden. Little<sup>3)</sup> hat auf dieser Grundlage den Satz abgeleitet, daß für einen amphicheiralen Knoten die Summe der Vorzeichen in einer *reduzierten* Projektion Null sei. (Eine Projektion ist reduziert, wenn keine durch Deformation entfernbare Ueberkreuzungen mehr vorhanden sind.) Man hat aber damit für die Untersuchung der amphicheiralen Knoten nicht viel gewonnen, denn es ist unmöglich die reduzierte Anzahl Ueberkreuzungen aus einem irgendwie gegebenen Knoten abzulesen. Betrachten wir jedoch von diesem Gesichtspunkt aus den einfachsten nicht-amphicheiralen Knoten, die Kleeblattschlinge. Die Fundamentalgruppe der Rechtskleeblattschlinge lässt sich auf die Form bringen  $a^3b^2=1$ , diejenige der Linkskleeblattschlinge auf  $a^{-3}b^2=1$ . Die Summe der Vorzeichen in der reduzierten Projektion ist im ersten Fall  $+3$ , im zweiten  $-3$ . Hier erscheint also das Vorzeichensymbol des Knotens als charakteristische Invariante in der Knotengruppe.

2. Für Verkettungen von zwei Kurven lässt sich mit Hilfe des Gauß'schen Verschlingungsintegrals eine Invariante  $m$  berechnen. Nach Brunn<sup>4)</sup> ist  $|2m| = |\delta - \lambda|$ , wenn man mit  $\delta$  die Anzahl der positiven, mit  $\lambda$  diejenige der negativen Ueberkreuzungen der beiden Kurven bezeichnet. Die Selbstüberkreuzungen der einzelnen Kurven spielen für den Verkettungszustand keine Rolle und werden deshalb nicht mitgerechnet. Sind zwei Kurven unverkettet, so ist  $m=0$ . Die Umkehrung dieses Satzes gilt aber nicht. Es wäre wohl von Interesse, die Verkettungen von zwei Kurven mit  $m=0$  zu untersuchen. Eine Art werden wir in dieser Arbeit kennen lernen. Nach den bisherigen Resultaten scheint es, daß hier die Kommutatoren der Erzeugenden in der Fundamentalgruppe eine wichtige Rolle spielen. Doch soll die genaue Behandlung dieser Verkettungen einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben.

Man kann nun versuchen, die Zahl  $|2m|$  für mehr als zwei Kurven zu verallgemeinern. Um zu prüfen, ob  $m$  auch hier eine Invariante ist, haben wir nur zu untersuchen, ob sie bei den möglichen Deformationen einer Verkettung unverändert bleibt. Diese lassen sich auf vier Typen zurückführen.<sup>5)</sup>

---

<sup>3)</sup> Little, Edinb. Trans. 39, 774, 1900.

<sup>4)</sup> Brunn, Zeitschr. Math. Phys. 37, 114, 1892.

<sup>5)</sup> A. Fischer, C. M. H. I, 313, 1929.

- a) In einen Ast legt sich eine Schlinge. Es entsteht dabei eine neue Selbstüberkreuzung einer Kurve, welche bei der Berechnung von  $2m$  nicht in Betracht gezogen wird.
- b) Ein Ast schiebt sich über oder unter einen andern. Gehören beide Aeste derselben Kurve an, so werden die zwei neu entstandenen Selbstüberkreuzungen nicht mitgerechnet. Gehören die Aeste zwei verschiedenen Kurven an, so erhalten wir zwei neue wesentliche Ueberkreuzungen, von denen aber die eine positiv, die andere negativ ist, so daß sie sich bei der Summation aufheben.
- c) Ein Ast schiebt sich durch eine Kreuzungsstelle von zwei andern Aesten hindurch. Es entstehen keine neuen Kreuzungspunkte und auch die Vorzeichen der früher vorhandenen werden nicht geändert. In den Fällen a — c bleibt also  $m$  invariant.
- d) Dreht sich eine Kurve um eine oder mehrere andere, so wird bei je einem Paar von Ueberkreuzungen jedes Vorzeichen geändert. Der absolute Betrag der Summe bleibt also in diesem Falle bei mehr als zwei Kurven *nicht* invariant.

Wir werden im nächsten § an Stelle des  $m$  ein etwas verallgemeinertes Vorzeichensymbol einführen, das auch im Fall d) im gewissen Sinne invariant bleibt.

3. Noch eine Bemerkung über die Orientierung von Verkettungen! Die Orientierungen auf den einzelnen Kurven sind voneinander unabhängig. Sind alle Kurven unverknotet und besitzen sie außerdem keine Selbstüberkreuzungen, so orientiert man alle gleich, z. B. im Uhrzeigersinn. Sobald Selbstüberkreuzungen auftreten, läßt sich die gleiche Orientierung auf allen Kurven nicht mehr eindeutig bestimmen. Man muß daher auf jeder Kurve der Verkettung beide Orientierungen zulassen. Daraus ergibt sich eine Mehrdeutigkeit im Vorzeichensymbol, welche z. B. bei den geschlossenen Ketten und den Torusverkettungen der vollständigen Charakterisierung hinderlich ist. Für die letzteren ist die Fundamentalgruppe von Artin<sup>6)</sup> abgeleitet worden. Besitzt die Verkettung  $2n$  Ueberkreuzungen, so lauten die endgültigen Relationen:

$$A, B \xrightleftharpoons[]{} (AB)^n$$

wobei der doppelte Pfeil die Vertauschbarkeit andeuten soll. Der Bau der Gruppe ist sehr einfach, aber die Verkettung ist damit nicht voll-

---

<sup>6)</sup> E. Artin, Hamburg. Abhandl. IV. 47, 1925.

ständig charakterisiert. Es haben nämlich, im Gegensatz zu den Torusknoten, zwei nicht isotope Torusverkettungen dieselbe Fundamentalgruppe.

Wird auf einer Kurve die Orientierung in die entgegengesetzte umgewandelt, so kommt dies in der Fundamentalgruppe dadurch zum Ausdruck, daß sämtliche Erzeugende, die dieser Kurve angehören, in den definierenden Relationen durch ihre Inversen ersetzt werden. Da man bei jeder Kurve der Verkettung beide Orientierungen als gleichberechtigt zulassen muß, ist man von vornherein gezwungen, Verkettungsgruppen, welche nur durch die Exponentenvorzeichen differieren, als *gleich* anzusehen. Wir werden im nächsten § ein Beispiel kennen lernen, in dem sich diese Betrachtung als fruchtbar erweist.

## 2. Gruppen mit Vertauschbarkeitsrelationen

Wir untersuchen die beiden Verkettungen von drei Kreisen in Fig. 1; sie sind spiegelbildlich zu einander und können in gewissem Sinne als das Analogon der beiden Kleeblattschlingen betrachtet werden.

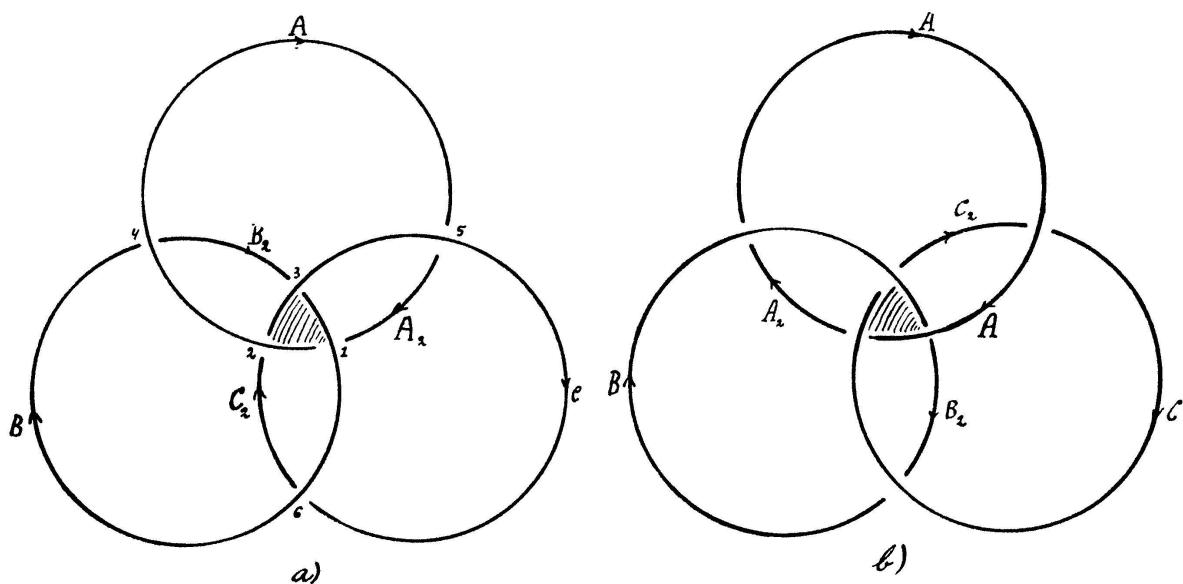


Fig. 1.

Für die letzteren ist bewiesen worden, daß ihre Fundamentalgruppen nicht isomorph sind. Damit ist auch der Beweis für die Verschiedenheit der Kleeblattschlingen erbracht. Die analoge Untersuchung soll nun für die beiden Verkettungen unternommen werden. Zunächst stellen wir die Fundamentalgruppen auf. Die definierenden Relationen lauten im Fall a):

1.  $A^{-1}BA_2B^{-1} = I$
2.  $C^{-1}AC_2A^{-1} = I$
3.  $B^{-1}CB_2C^{-1} = I$
4.  $B_2^{-1}ABA^{-1} = I$
5.  $A_2^{-1}CAC^{-1} = I$
6.  $C_2^{-1}BCB^{-1} = I$

Berechnet man  $A_2$  aus 1. und 5. und setzt die Ausdrücke einander gleich, so erhält man schließlich:

$$A \cdot BC = BC \cdot A$$

Analog ergibt sich durch Gleichsetzen der Ausdrücke für  $B_2$  resp.  $C_2$ :

$$B \cdot CA = CA \cdot B \quad \text{und} \quad C \cdot AB = AB \cdot C.$$

Die Fundamentalgruppe der Verkettung lässt sich also auf die einfache Form bringen:

Erzeugende Operationen:  $A, B, C$ .

Definierende Relationen:

$$(I') \quad A \cdot BC = BC \cdot A \quad B \cdot CA = CA \cdot B \quad C \cdot AB = AB \cdot C.$$

Stellt man die Gruppe für den Fall b) auf, so erhält man nach den gleichen Rechnungen wie oben als Fundamentalgruppe:

Erzeugende Operationen:  $A, B, C$ .

Definierende Relationen:

$$(I'') \quad A \cdot BC = BC \cdot A \quad B \cdot CA = CA \cdot B \quad C \cdot AB = AB \cdot C.$$

Die beiden Gruppen sind vollkommen identisch. Empirisch überzeugt man sich aber leicht, daß die Verkettungen nicht ineinander deformierbar sind. Wir haben hier ein sehr einfaches Beispiel für zwei nicht isotope Gebilde mit derselben Fundamentalgruppe. Zum Unterschied von den Kleeblattschlingen gibt also die Fundamentalgruppe allein keinen Beweis für die Verschiedenheit der beiden Verkettungen.

Wir werden daher auf das Vorzeichen zurückgreifen und definieren ein verallgemeinertes Vorzeichensymbol. Zunächst bemerkt man, daß aus der Gruppe die Minimalanzahl der Ueberkreuzungen abgelesen werden kann. Denn wir haben die Relation:

$$BC \cdot A \cdot C^{-1}B^{-1} = A; \text{ d. f.: } A_2 = CAC^{-1} \text{ und } A = BA_2B^{-1}.$$

Analoge Beziehungen gelten für  $B$  und  $C$ . Die Verkettung besteht also in reduzierter Form aus sechs Aesten,  $A, A_2, B, B_2, C, C_2$  und hat daher auch sechs Ueberkreuzungen. Untersuchen wir noch den Verkettungszustand der einzelnen Kreispaare, indem wir die zweigliedrigen Unterketten bilden. Setzt man in den Relationen (1')  $A = 1$ , so bleibt  $BC = CB$ ; analog erhält man für die andern Kreispaare  $AB = BA$  und  $AC = CA$ . Die Kreise sind also paarweise in der einfachsten Art verkettet. Daraus folgt weiter, daß es keine Selbstüberkreuzungen der einzelnen Kreise gibt, die sich nicht durch Deformation entfernen lassen.

Sind zwei Kreise  $A$  und  $B$  in der Art  $AB = BA$  miteinander verkettet, so sind die Vorzeichen beider Kreuzungspunkte gleich. Die Relationen (1') lassen sich auf zwei Arten deuten, entweder  $A = BC \cdot A \cdot C^{-1} B^{-1}$  oder  $A = C^{-1} B^{-1} \cdot A \cdot BC$ . Dadurch erhalten wir für die Ueberkreuzungen auch zwei verschiedene Vorzeichen. Wählen wir den ersten Fall:

$$A = BC \cdot A \cdot C^{-1} B^{-1}$$

$$\text{d. f.: } A_2 = CAC^{-1} \quad \text{und} \quad A = BA_2B^{-1}.$$

Der Kreis  $A$  wird also von  $B$  und  $C$  positiv überkreuzt. Somit werden auch die Kreise  $B$  und  $C$  von  $A$  positiv überkreuzt und dadurch sind die Vorzeichen für die weiteren Relationen bestimmt. Wir dürfen für  $B$  nicht etwa schreiben:

$$B = A^{-1} C^{-1} \cdot B \cdot CA,$$

sondern müssen  $B = CA \cdot B \cdot A^{-1} C^{-1}$  annehmen. Die Relationen (1') ergeben also in der Tat zwei Möglichkeiten:

- |   |                                      |                                      |
|---|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $A = BC \cdot A \cdot C^{-1} B^{-1}$ | $B = CA \cdot B \cdot A^{-1} C^{-1}$ | $C = AB \cdot C \cdot B^{-1} A^{-1}$ |
| $A_2 = CAC^{-1}$                        | $B_2 = ABA^{-1}$                     | $C_2 = BCB^{-1}$                     |
| $A = BA_2B^{-1}$                        | $B = CB_2C^{-1}$                     | $C = AC_2A^{-1}$                     |
- 
- |   |                                      |                                      |
|---|--------------------------------------|--------------------------------------|
| b) $A = B^{-1} C^{-1} \cdot A \cdot CB$ | $B = C^{-1} A^{-1} \cdot B \cdot AC$ | $C = A^{-1} B^{-1} \cdot C \cdot BA$ |
| $A_2 = C^{-1} AC$                       | $B_2 = A^{-1} BA$                    | $C_2 = B^{-1} CB$                    |
| $A = B^{-1} A_2 B$                      | $B = C^{-1} B_2 C$                   | $C = A^{-1} C_2 A$                   |

Danach lassen sich die reduzierten Projektionen beider Verkettungen ohne weiteres zeichnen. Im Fall (a) überkreuzt der Ast  $A$  die Aeste  $B$  und  $C_2$ ;  $B$  überkreuzt  $A_2$  und  $C$ ;  $C$  überkreuzt  $A$  und  $B_2$ , immer in positivem Sinn und in vollkommener Uebereinstimmung mit Fig. 1a.

Für (b) gilt dasselbe. Ferner kann man aus den Relationen ablesen, daß beide Unterkreuzungen auf jedem Kreis auf demselben Ast liegen, nämlich auf  $A$ , resp.  $B$  und  $C$ . Folglich ist jeder Kreis gleichzeitig um die beiden andern drehbar.

Wir wollen nun das Vorzeichensymbol ableiten. Da die Vorzeichen beider Kreuzungspunkte von zwei Kreisen gleich sind, können wir in unserem Fall nur die Hälfte der Vorzeichen in Betracht ziehen. Das Vorzeichensymbol erhalten wir wie folgt: In die Kolonne  $AB$  tragen wir die Vorzeichen sämtlicher Ueberkreuzungen der Kreise  $A$  und  $B$  ein, addieren sie und dividieren durch zwei. Analog in den Kolonnen  $AC$  und  $BC$ . Wir erhalten aus Fig. 1:

a)			b)		
$AB$	$AC$	$BC$	$AB$	$AC$	$BC$
+	+	+	—	—	—
+	+	+	—	—	—
+	+	+	—	—	—

Die resultierende Reihe der Vorzeichen ist das *Vorzeichensymbol* der Verkettung. Laut § 1 müssen wir auf jedem Kreis auch die entgegengesetzte Orientierung zulassen. Wird der Umlaufssinn z. B. auf  $A$  geändert, so erhalten wir als Vorzeichensymbol:

a)			b)		
$AB$	$AC$	$BC$	$AB$	$AC$	$BC$
—	—	+	+	+	—

Die Fundamentalgruppe geht dabei über in:

$$(I''') A^{-1} \cdot BC = BC \cdot A^{-1}; \quad B \cdot CA^{-1} = CA^{-1} \cdot B; \quad C \cdot A^{-1} B = A^{-1} B \cdot C.$$

Da in den Relationen nur  $A$  durch  $A^{-1}$  ersetzt wird, ist diese Gruppe der ursprünglichen (I') gleich.

Dasselbe Resultat kann man aber auch erreichen, indem man den Kreis  $A$  dreht und dann seine Orientierung umkehrt, also die vierte bei Verkettungen mögliche Deformation ausführt. Es ist dagegen, wie man sofort erkennt, unmöglich, durch Drehung oder entgegengesetzte Orientierung der Kreise das Vorzeichensymbol a) in b) zu transformieren. Der Änderung im Vorzeichensymbol entspricht bei unseren Verkettungen

nicht nur eine willkürliche Änderung der Orientierung auf den einzelnen Kreisen, sondern die tiefere Möglichkeit einer topologischen Deformation. Gerade das scheint nach den bisherigen Resultaten der Grund dafür zu sein, daß das Vorzeichensymbol eine wesentliche Rolle spielen kann.

*Als verallgemeinertes Vorzeichensymbol definieren wir die zuerst erhaltenen Kombinationen der Vorzeichen zusammen mit allen daraus durch beliebige Drehungen der Kreise umeinander sich ergebenden neuen Kombinationen.*

Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten läßt sich ohne weiteres überblicken. Das Vorzeichensymbol in dieser verallgemeinerten Fassung ist invariant gegenüber allen gestatteten Deformationen, wie man nach § 1, 2 leicht bestätigen kann, und läßt sich auch aus jeder beliebigen regulären Projektion ablesen. Treten Selbstüberkreuzungen der einzelnen Kreise auf, so werden sie bei der Berechnung des Vorzeichensymbols nicht berücksichtigt.

Zu der Gruppe (1) rechnen wir nun (§ 1, 3) nicht nur diejenige mit den ursprünglichen Relationen (1'), sondern auch alle Gruppen, die aus der ersten entstehen, indem irgendwelche Erzeugende durch ihre Inversen ersetzt werden, also:

$$(1) \quad A^{\varepsilon_1} \cdot B^{\varepsilon_2} C^{\varepsilon_3} = B^{\varepsilon_2} C^{\varepsilon_3} \cdot A^{\varepsilon_1}; \quad B^{\varepsilon_2} \cdot C^{\varepsilon_3} A^{\varepsilon_1} = C^{\varepsilon_3} A^{\varepsilon_1} \cdot B^{\varepsilon_2}; \\ C^{\varepsilon_3} \cdot A^{\varepsilon_1} B^{\varepsilon_2} = A^{\varepsilon_1} B^{\varepsilon_2} \cdot C^{\varepsilon_3},$$

wo  $\varepsilon_i = \pm 1$  ist. Eine Verkettung mit der Gruppe (1) gehört dann entweder dem + (a) oder dem — (b) Typus an. Durch die Fundamentalgruppe und das Vorzeichensymbol ist eine Verkettung dieser Art eindeutig bestimmt.

*Zwei Verkettungen mit derselben Gruppe (1) und demselben Vorzeichensymbol sind gleich.*

Man kann den behandelten Typus von Verkettungen noch weiter, auf mehr als drei Kreise, verallgemeinern. Empirisch erhält man diese, indem man in den Fällen a) oder b) durch das schraffierte gemeinsame Gebiet der drei Kreise einen vierten Kreis hindurchlegt, der mit allen drei verkettet ist. Bei vier Kreisen lauten die Gruppenrelationen:

$$(2) \quad A^{\varepsilon_1} \cdot B^{\varepsilon_2} C^{\varepsilon_3} D^{\varepsilon_4} = B^{\varepsilon_2} C^{\varepsilon_3} D^{\varepsilon_4} \cdot A^{\varepsilon_1}; \quad B^{\varepsilon_2} \cdot C^{\varepsilon_3} D^{\varepsilon_4} A^{\varepsilon_1} = C^{\varepsilon_3} D^{\varepsilon_4} A^{\varepsilon_1} \cdot B^{\varepsilon_2}; \\ C^{\varepsilon_3} \cdot D^{\varepsilon_4} A^{\varepsilon_1} B^{\varepsilon_2} = D^{\varepsilon_4} A^{\varepsilon_1} B^{\varepsilon_2} \cdot C^{\varepsilon_3}; \quad D^{\varepsilon_4} \cdot A^{\varepsilon_1} B^{\varepsilon_2} C^{\varepsilon_3} = A^{\varepsilon_1} B^{\varepsilon_2} C^{\varepsilon_3} \cdot D^{\varepsilon_4} \\ \cdot \quad (\varepsilon_i = \pm 1).$$

Die Möglichkeiten der Vorzeichensymbole sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt, wobei nur die prinzipiell verschiedenen Fälle berücksichtigt wurden.

(1) aus a (+ + +)

$AB$	$AC$	$AD$	$BC$	$BD$	$CD$	
+	+	+	+	+	+	
-	-	-	+	+	+	$A$ wird gedreht
+	-	-	-	-	+	$A$ und $B$ werden gedreht

(2) aus a (- - +)

$AB$	$AC$	$AD$	$BC$	$BD$	$CD$	
-	-	+	+	+	+	
+	-	+	-	-	+	$B$ wird gedreht
+	+	-	+	+	+	$A$ wird gedreht
-	-	-	+	-	-	$D$ wird gedreht
-	+	-	-	-	+	$A$ und $B$ werden gedreht

(3) aus b (- - -)

$AB$	$AC$	$AD$	$BC$	$BD$	$CD$	
-	-	-	-	-	-	
-	-	+	-	+	+	$D$ wird gedreht
+	-	+	+	-	+	$B$ und $D$ werden gedreht

b (+ + -) liefert dasselbe wie a (- - +). Wir haben also drei verschiedene Typen. Betrachten wir die Symbole in der zweiten Zeile von (1), (2) und (3)! Sie sind nicht gleich, denn in (1) gehören die drei Minus, in (3) die drei Plus demselben Kreis an, während in (2) weder die Minus noch die Plus auf demselben Kreise liegen. Analog bestätigt man leicht die Verschiedenheit der andern ähnlich aussehenden Symbole. Aus jeder regulären Projektion der Verkettung lässt sich das Vorzeichensymbol wieder ablesen und entscheiden, ob es dem Typus (1), (2) oder (3) angehört.

Nun kann man auf die gleiche Weise weiterfahren. Durch das gemeinsame Gebiet der vier Kreise wird ein fünfter gelegt. Für das Vorzeichensymbol hat man, entsprechend den 11 Möglichkeiten bei vier Kreisen, 11 Typen aufzustellen, die aber sehr wahrscheinlich wieder nicht alle von einander verschieden sind. Dann wird durch das gemeinsame

Gebiet der fünf Kreise ein sechster gelegt, usw. Die allgemeine Verkettung dieser Art hat die Relationen:

$$(3) \quad A^{\varepsilon_1} \cdot B^{\varepsilon_2} C^{\varepsilon_3} \dots N^{\varepsilon_n} = B^{\varepsilon_2} C^{\varepsilon_3} \dots N^{\varepsilon_n} \cdot A^{\varepsilon_1}; \dots \text{zyklisch.}$$

Das Vorzeichensymbol ergibt immer endlich viele nicht isotope Typen. Die Anzahl der Möglichkeiten für das Vorzeichensymbol, die durch Drehung der Kreise entstehen, bleibt stets überblickbar und die vollständige Tabelle aller Möglichkeiten in jedem Typus lässt sich für beliebig viele Kreise berechnen. Allgemein ergibt sich das Resultat:

*Jede Verkettung von  $n$ -Kreisen mit der Fundamentalgruppe (3) besitzt ein aus jeder beliebigen regulären normierten Projektion berechenbares Vorzeichensymbol, das einem bestimmten Typus angehört. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Isotopie zweier solcher Verkettungen ist die Uebereinstimmung der Typen für das Vorzeichensymbol.*

Noch eine letzte Verallgemeinerung! Die bizentralen Verkettungen<sup>7)</sup> können aus der einfachsten Verkettung von zwei Kreisen erhalten werden, indem man den Kreis  $A$  durch  $p$ , den Kreis  $B$  durch  $q$  untereinander nicht verkettete Kreise ersetzt. Dasselbe kann man im Falle der Gruppen (1), (2) und (3) auch machen. Ersetzt man in (1)  $A$  durch  $p$  Kreise  $A, B, \dots, P$ ;  $B$  durch  $q$  Kreise  $a, b, \dots, q$  und  $C$  durch  $r$  Kreise  $\alpha, \beta, \dots, \rho$ , so entsteht eine Verkettung mit der Gruppe:

$$(I) \quad \begin{aligned} A^{\varepsilon_{11}}, B^{\varepsilon_{12}}, \dots, P^{\varepsilon_{1p}} &\xrightleftharpoons{\quad} a^{\varepsilon_{21}} b^{\varepsilon_{22}} \dots q^{\varepsilon_{2q}} \cdot \alpha^{\varepsilon_{31}} \beta^{\varepsilon_{32}} \dots \rho^{\varepsilon_{3r}} \\ a^{\varepsilon_{21}}, b^{\varepsilon_{22}}, \dots, q^{\varepsilon_{2q}} &\xrightleftharpoons{\quad} \alpha^{\varepsilon_{31}} \beta^{\varepsilon_{32}} \dots \rho^{\varepsilon_{3r}} \cdot A^{\varepsilon_{11}} B^{\varepsilon_{12}} \dots P^{\varepsilon_{1p}} \\ \alpha^{\varepsilon_{31}}, \beta^{\varepsilon_{32}}, \dots, \rho^{\varepsilon_{3r}} &\xrightleftharpoons{\quad} A^{\varepsilon_{11}} B^{\varepsilon_{12}} \dots P^{\varepsilon_{1p}} \cdot a^{\varepsilon_{21}} b^{\varepsilon_{22}} \dots q^{\varepsilon_{2q}} \end{aligned}$$

$(\varepsilon_{ik} = \pm 1)$

Analog gebaut sind die auf gleiche Weise aus (2) und (3) entstehenden Gruppen. Die Zahlen  $p, q, r, \dots$  sind in diesen Gruppen ebenfalls berechenbare Invarianten; sie geben einzeln je die Minimalzahl der Kreise an, die man aufschneiden muß, damit die Verkettung in eine neue, um eine Stufe tiefer liegende Verkettung übergeht. Aus dem Bau der Gruppe lässt sich erkennen, daß die Kreise umeinander drehbar sind. Der Beweis gestaltet sich vollkommen analog wie bei den bizentralen Verkettungen. Zur vollständigen Charakterisierung der Verkettung muß auch hier das Vorzeichensymbol eingeführt werden.

<sup>7)</sup> A. Fischer, C. M. H. I, 313, 1929.

In diesen Untersuchungen tritt der Unterschied zwischen Knoten und Verkettungen deutlich zu Tage. Die Torusknoten haben Gruppen von der Form  $a^i b^2 = 1$  und sind durch  $i$  (mit Vorzeichen) vollständig charakterisiert. Bei den Verkettungen mit der Gruppe  $A^{\varepsilon_1} B^{\varepsilon_2} \dots N^{\varepsilon_n} = B^{\varepsilon_2} C^{\varepsilon_3} \dots N^{\varepsilon_n} \cdot A^{\varepsilon_1}$ ; ..... (zyklisch) äußert sich die Freiheit in der Wahl der Orientierung auf den einzelnen Kreisen und die Drehbarkeit der Kreise umeinander darin, daß nicht mehr die Vorzeichen der einzelnen Exponenten, sondern erst das verallgemeinerte Vorzeichensymbol die vollständige Charakterisierung ermöglicht. Betrachten wir die Torusknoten und unsere Verkettungen noch etwas näher, so zeigt sich, daß zwischen diesen Gebilden weitergehende Zusammenhänge bestehen. Es entsprechen einander:

Torusknoten	Verkettung
Gruppe: $a^i b^2 = 1$	Gruppe: $A^{\varepsilon_1} \cdot B^{\varepsilon_2} \dots N^{\varepsilon_n} = B^{\varepsilon_2} \dots N^{\varepsilon_n} \cdot A^{\varepsilon_1}$ und zyklisch
Anzahl der Kreuzungspunkte in der reduzierten Projektion.	Anzahl der Kreise in einer reduzierten Projektion.
Vorzeichen von $i$ .	Vorzeichensymbol.

Danach besteht zwischen Torusknoten und den untersuchten Verkettungen eine Art *Dualität*; man wird somit diese Verkettungen und nicht diejenigen, die sich doppelpunktfrei auf einen Torus legen lassen, als das natürliche Analogon der Torusknoten betrachten. Jedem alternierenden Torusknoten entspricht eine derartige Verkettung mit einer ungeraden Anzahl Kreise und dem Vorzeichensymbol  $(+ + + \dots)$  oder  $(- - - \dots)$  und umgekehrt.

Es entsteht nun die Frage, ob auch für andere, z. B. die Bretzelknoten, ein solches duales Analogon von Verkettungen existiert, ob vielleicht sogar zu jedem Knoten eine duale Verkettung möglich ist. Die Beantwortung dieser Frage kann für die Untersuchung der Knoten von wesentlicher Bedeutung sein. Denn die Anzahl der Kreise und das Vorzeichensymbol läßt sich aus jeder Projektion ablesen, was für die entsprechenden Knoteninvarianten nicht der Fall ist. Ob und wie weit diese Dualität besteht, soll in einer weiteren Arbeit untersucht werden.

### § 3. Offene und geschlossene Ketten

Die offene Kette besteht aus  $n$  Kreisen, von denen jeder in einfachster Weise mit seinen beiden Nachbarkreisen verkettet ist. Die Fundamentalgruppe ist gegeben durch  $n$  Erzeugende und die definierenden Relationen :

$$(4) \quad AB = BA; \quad BC = CB; \quad CD = DC; \dots; \quad MN = NM.$$

Jede Erzeugende ist mit zwei Nachbarerzeugenden vertauschbar; damit steht wiederum im Einklang, daß jeder Kreis um seine zwei Nachbarkreise drehbar ist. Die Gruppe lässt sich ohne weiteres überblicken und die Verkettung ist vollständig bestimmt. Jede Unterkette ist auch eine offene Kette mit weniger Erzeugenden.

Wird eine offene Kette geschlossen, so können zwei prinzipiell verschiedene Fälle eintreten :

1. Ein oder mehrere Kreise können sich noch um ihre Nachbarkreise drehen.
2. Keiner der Kreise ist mehr drehbar.

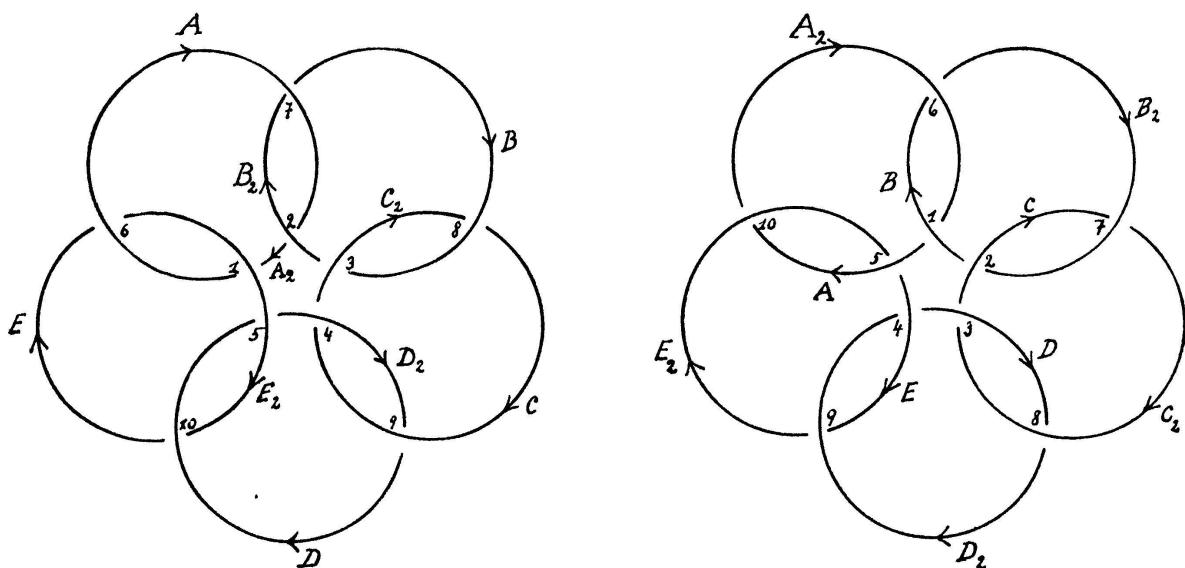


Fig. 2 (a und b)

Für beide Fälle soll die Gruppe abgeleitet werden.

1. Fall. (Fig. 2 a).

Als definierende Relationen erhält man :

1.	$A_2^{-1} E_2 A_2 E_2^{-1} = I$	daraus:	$A_2 = E_2^{-1} A E_2$
2.	$A_2^{-1} B_2^{-1} A B_2 = I$	"	$A_2 = B_2^{-1} A B_2$
3.	$B_2^{-1} C_2^{-1} B C_2 = I$	"	$B_2 = C_2^{-1} B C_2$
4.	$C_2^{-1} D_2^{-1} C D_2 = I$	"	$C_2 = D_2^{-1} C D_2$
5.	$D_2^{-1} E_2^{-1} D E_2 = I$	"	$D_2 = E_2^{-1} D E_2$
6.	$E_2^{-1} A E A^{-1} = I$	"	$E_2 = A E A^{-1}$
7.	$B^{-1} A^{-1} B_2 A = I$	"	$B_2 = A B A^{-1}$
8.	$C^{-1} B^{-1} C_2 B = I$	"	$C_2 = B C B^{-1}$
9.	$D^{-1} C^{-1} D_2 C = I$	"	$D_2 = C D C^{-1}$
10.	$E^{-1} D^{-1} E_2 D = I$	"	$E_2 = D E D^{-1}$

Vergleicht man (6) und (10), so erhält man:

$$1. \quad E \cdot D^{-1} A = D^{-1} A \cdot E$$

und analog für (1) und (2), wenn man darin vorher noch die Erzeugenden mit Indizes ersetzt,

$$2. \quad A \cdot E B^{-1} = E B^{-1} \cdot A.$$

Aus den drei übrigen Paaren von Relationen kann man durch Gleichsetzen der Ausdrücke die weiteren Relationen ableiten:

$$\begin{aligned} 3. \quad B^{-1} A B A^{-1} &= C^{-1} B C B^{-1} \\ 4. \quad C^{-1} B C B^{-1} &= D^{-1} C D C^{-1} \\ 5. \quad D^{-1} C D C^{-1} &= E^{-1} D E D^{-1} \end{aligned}$$

In den zwei ersten Relationen tritt wieder die Kommutativität auf. Doch ist zu beachten, daß ein Exponent positiv, der andere negativ ist. Aus der Figur erkennen wir, daß jeder der drehbaren Kreise mit einem seiner Nachbarkreise positiv, mit dem andern negativ verkettet ist. Diese Tatsache kommt im Vorzeichen der Exponenten zum Ausdruck. Jede Unterkette ist eine offene Kette. Die Verkettung ist, wie wir bei Fall 2 noch ausführlicher besprechen werden, durch die Gruppe allein nicht mehr vollständig bestimmt.

## 2. Fall (Fig. 2 b).

Aus den fünf Relationen für die inneren Kreuzungspunkte lassen sich sämtliche Erzeugende mit Hilfe der fünf  $A, B, C, D, E$  darstellen. Diese Ausdrücke werden in die Relationen für die äußeren Kreuzungspunkte eingesetzt und man erhält:

1.  $A^{-1}BAB^{-1} = B^{-1}CBC^{-1}$
2.  $B^{-1}CBC^{-1} = C^{-1}DCD^{-1}$
3.  $C^{-1}DCD^{-1} = D^{-1}EDE^{-1}$
4.  $D^{-1}EDE^{-1} = E^{-1}AEA^{-1}$
5.  $E^{-1}AEA^{-1} = A^{-1}BAB^{-1}$

Die Kommutativität ist vollständig verschwunden und dafür eine Reihe von Beziehungen entstanden, die sich zyklisch schließt. Bildet man aber eine Unterkette, indem man einen oder mehrere beliebige Kreise aufschneidet, so erhält man wieder eine offene Kette. Der Verkettungszustand der Kreise miteinander ist dadurch klargelegt, aber die Verkettung als Ganzes nicht eindeutig bestimmt. In unserer Figur sind die Ueberkreuzungen sämtlicher Kreise miteinander negativ. Vertauscht man alle Ueber- und Unterkreuzungen miteinander, so entsteht die analoge Verkettung, jedoch mit lauter positiven Ueberkreuzungen. Man überzeugt sich leicht, daß diese zwei nicht ineinander deformierbar sind. Und doch besitzen sie die gleiche Gruppe. Wir haben hier die gleiche Erscheinung wie im vorigen §; aus dem Bau der Gruppe können wir aber nicht auf die Drehbarkeit der Kreise umeinander schließen und stellen auch an Hand der Figur fest, daß diese Drehbarkeit nicht besteht. Folglich kann in diesem Fall auch das früher eingeführte Vorzeichensymbol zur vollständigen Bestimmung der Verkettung nicht angewendet werden.

#### § 4. Verkettungen von zwei Kreisen

Wir betrachten zuerst die Verkettung von zwei Kreisen mit vier Kreuzungspunkten. Sie ist eine Torusverkettung. (Fig. 3 a).

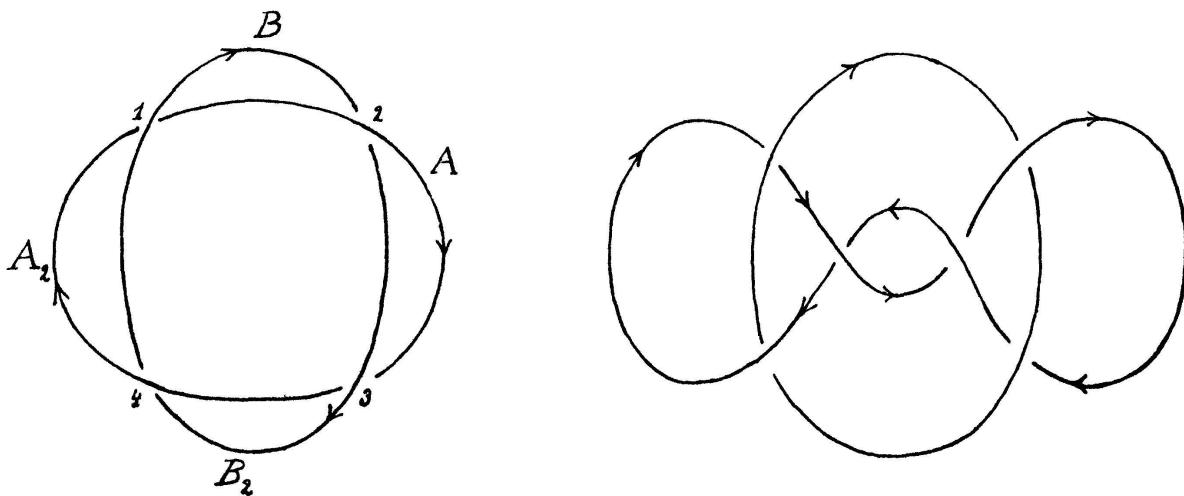


Fig. 3 (a und b)

Die Fundamentalgruppe hat die Relationen:

1.  $A^{-1} B A_2 B^{-1} = 1$  daraus  $A_2 = B^{-1} AB$
2.  $B_2^{-1} ABA^{-1} = 1$  „  $B_2 = ABA^{-1}$
3.  $A_2^{-1} B_2 AB_2^{-1} = 1$
4.  $B^{-1} A_2 B_2 A_2^{-1} = 1$

Setzt man die berechneten Ausdrücke für  $A_2$  und  $B_2$  in (3) oder (4) ein, so resultiert die einzige Relation:

$$A^{-1} B^{-1} AB = BAB^{-1} A^{-1}.$$

Die Gauß'sche Verschlingungsvariante  $|2m|$  hat für diese Verkettung den Wert 4.

Die Verkettung kann verallgemeinert werden, indem sich der eine Kreis ein oder mehrere male überkreuzt (Fig. 3 b). Stellt man die Fundamentalgruppen dieser Verkettungen auf, so kann man sie nach ziemlich langwieriger Elimination der überzähligen Erzeugenden schließlich auf Gruppen zurückführen mit zwei Erzeugenden und einer einzigen definierenden Relation; diese hat die Form:

1. Keine Ueberschlagung:

$$A^{-1} B^{-1} AB = BAB^{-1} A^{-1}$$

2. Eine Ueberschlagung:

$$A^{-1} B^{-1} AB \cdot AB^{-1} A^{-1} B = BA^{-1} B^{-1} A \cdot BAB^{-1} A^{-1}$$

3. Zwei Ueberschlagungen:

$$\begin{aligned} & A^{-1} B^{-1} AB \cdot A^{-1} B^{-1} AB \cdot AB^{-1} A^{-1} B \\ & = BA^{-1} B^{-1} A \cdot BAB^{-1} A^{-1} \cdot BAB^{-1} A^{-1} \end{aligned}$$

4. Drei Ueberschlagungen:

$$\begin{aligned} & A^{-1} B^{-1} AB \cdot A^{-1} B^{-1} AB \cdot AB^{-1} A^{-1} B \cdot AB^{-1} A^{-1} B \\ & = BA^{-1} B^{-1} A \cdot BA^{-1} B^{-1} A \cdot BAB^{-1} A^{-1} \cdot BAB^{-1} A^{-1} \end{aligned}$$

usw.

Die Gesetzmäßigkeit ist sofort ersichtlich. Die Relation setzt sich aus den beiden Kommutatoren  $A^{-1} B^{-1} AB$  und  $AB^{-1} A^{-1} B$  zusammen. Der Ausdruck auf der rechten Seite ist gleich dem von hinten gelesenen Ausdruck auf der linken Seite. Für jede gerade Ueberschlagung tritt

auf der linken Seite der Gleichung der Kommutator  $A^{-1} B^{-1} AB$  vorn, für jede ungerade der Kommutator  $AB^{-1} A^{-1} B$  hinten hinzu. Die Anzahl der Ueberschlagungen spielt bei diesen Verkettungen eine bedeutende Rolle.

Ueberschlägt sich auch noch der zweite Kreis, so wird die Elimination der überzähligen Erzeugenden sehr umständlich. Man erhält als definierende Relation einen komplizierten Ausdruck, dessen Bau sich nicht überblicken läßt.

In den Verkettungen dieser Art haben wir Beispiele für Verkettungen mit  $|2m| = 0$  oder 4. Sie besitzen, wie wir bemerkt haben, recht interessante Gruppen, deren weitere Untersuchung sich sehr wahrscheinlich lohnen würde. Wie weit die Verkettungen durch ihre Gruppe charakterisiert sind, habe ich nicht näher geprüft, glaube aber, daß auch hier die Möglichkeit der entgegengesetzten Orientierung, wie bei den geschlossenen Ketten, Schwierigkeiten bereiten wird.

(Eingegangen den 3. September 1930)