

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	2 (1930)
<b>Artikel:</b>	Sur un certain système d'équations et la recherche des figures d'équilibre.
<b>Autor:</b>	Wavre, Rolin
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-3619">https://doi.org/10.5169/seals-3619</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur un certain système d'équations et la recherche des figures d'équilibre

par ROLIN WAVRE, Genève

## 1. Introduction

Dans un article récent<sup>1)</sup>, j'ai exposé une méthode de résolution du problème des figures d'équilibre d'une masse fluide hétérogène.

Je considérais le cas où les surfaces d'égale densité sont de connexion sphérique et se réduisent à un seul point: le centre de l'astre, situé sur l'axe de rotation, lorsque la densité tend vers son maximum.

Un système fondamental, le premier du paragraphe 13 de l'article précédent, représentait la condition nécessaire et suffisante pour que la masse fluide envisagée fut en état d'équilibre relatif.

Je vais transformer ce système fondamental pour le simplifier un peu et pour mieux dégager sa signification.

Puis j'envisagerai le cas particulier de la masse homogène, auquel ce système s'applique également car il importerait de montrer, qu'à part son utilité pour la géodésie supérieure et l'astronomie<sup>2)</sup>, cette méthode permet aussi de retrouver les principales figures d'équilibre classique, et cela par une voie nouvelle et unique.

Tandis que dans les «Archives des Sciences physiques et naturelles», j'ai recherché les résultats pratiques et notamment la suppression du désaccord souligné par Poincaré<sup>3)</sup> entre la théorie de la précession et la géodésie supérieure, ici, comme par le passé, je viserai aux résultats théoriques susceptibles d'intéresser les mathématiciens purs. On me pardonnera si cet article-ci ne contient guère que des transformations du tableau fondamental; l'importance de ce tableau me sert d'excuse.

## 2. Les notations

Voici les notations déjà employées dans l'article précédent:  $t$  est le rayon polaire des surfaces de niveau, en même temps que le paramètre qui sert à distinguer ces surfaces les unes des autres;

<sup>1)</sup> Sur une méthode rigoureuse dans la recherche des figures d'équilibre. *Commentarii Math. Helv.* V. 2, F. 1, p. 116, 1930.

<sup>2)</sup> Sur un procédé uniforme dans la recherche des figures planétaires. «Archives des Sciences physiques et naturelles» V. II, p. 131, 1929. La seconde approximation dans le problème des figures d'équilibre. *Ibid.* V. II, p. 19, 1929. Sur les figures d'équilibre et la géodésie. *Ibid.* V. II, p. 295, 1929. Géodésie et précession. V. 12, p. 11, 1930.

<sup>3)</sup> Figures d'équilibre p. 92—96.

$\Phi$  est le potentiel du champ de la pesanteur,  $\rho$  la densité et l'on a

$$\Phi(t) \text{ et } \rho(t);$$

$\omega$  est la vitesse angulaire,  $M$  la masse totale,  $i$  la constante de l'attraction universelle;

$\theta$  est le complément de la latitude géocentrique;  $\psi$  la longitude,  $\gamma$  l'angle de deux directions  $\theta, \psi$  et  $\theta', \psi'$ ;

$R$  est le rayon vecteur joignant l'origine au point de la surface  $t$  situé dans la direction  $\theta, \psi$ ; l'on a donc

$$R(t, \theta, \psi);$$

$X_q$  désigne le  $q^{\text{ème}}$  polynôme de Legendre, son argument est le cosinus de l'angle  $\gamma$

$$X_q(\cos \gamma);$$

$Q$  est la sphère unité, et, enfin, l'indice  $i$  affectera tout ce qui a trait à la surface libre; le rayon polaire de celle-ci pourra être supposé égal à l'unité

$$t_1 = 1.$$

Enfin, pour simplifier, nous poserons

$$\begin{array}{ll} c = \text{cosinus} & \Phi' = \frac{d\Phi}{dt} \\ s = \text{sinus} & R' = \frac{\partial R}{\partial t} \end{array} \quad H = 1 + \left( \frac{i}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{i}{s^2 \theta} \left( \frac{i}{R} \frac{\partial R}{\partial \psi} \right)^2.$$

Une dérivée par rapport au paramètre  $t$  se marquera par l'accent (''). Aucune confusion n'est à craindre, si la fonction à dériver contient d'autres variables,  $\theta$  et  $\psi$  par exemple, il s'agira d'une dérivée partielle.

### 3. Le tableau fondamental

Reproduisons le système d'équation obtenu au § 13 de l'étude précédente, en faisant usage des abréviations mentionnées ci-dessus:

$$\begin{aligned}
& - \frac{i}{4\pi} \Phi' \int X_q HR'^{-1} R^{1-q} d\Omega \\
& + i \int_t^1 \varrho dt \int X_q R^{1-q} R' d\Omega + \frac{\omega^2}{2\pi} \int X_q d\Omega \int_t^R R^{1-q} R' d\Omega \\
& = \begin{cases} iM - \frac{2}{3}\omega^2 t^3 & \text{si } q = -1 \\ \Phi - \omega^2 t^2 & \text{si } q = 0 \\ \frac{\omega^2}{3} X_2(c\theta) & \text{si } q = 2 \\ 0 & \text{si } q = 1, 3, 4, 5, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

La dernière intégrale de premier membre était à prendre de la sphère de rayon  $t$  à la surface le niveau de paramètre  $t$ . On peut la calculer

$$\int_t^R R^{1-q} R' dt = \frac{i}{2-q} R^{2-q} - \frac{i}{2-q} t^{2-q}, \quad q \neq 2.$$

Si  $q = 2$  un logarithme s'introduit

$$\int_t^R R^{1-q} R' dt = LR - Lt, \quad q = 2.$$

Si  $q = 1, 2, 3, \dots$  le second terme est orthogonal à  $X_q$  et disparaît ; si  $q = -1$  et si  $q = 0$ , le second terme fait disparaître le terme en  $\omega^2$  des seconds membres des équations correspondantes. Cette simplification s'impose. Nous convenons en outre de représenter par

$$\frac{i+}{2-q} R^{2-q} \text{ l'expression } \begin{cases} \frac{i}{2-q} R^{2-q} & \text{si } q \neq 2 \\ LR & \text{si } q = 2. \end{cases}$$

En plus, on peut intervertir les intégrales en  $\Omega$  et en  $t$ , et le tableau s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{4\pi} \int X_q \left[ -\Phi' HR'^{-1} R^{1-q} + 4\pi i \int_t^1 \varrho R^{1-q} dR + 2\omega^2 \frac{i+}{2-q} R^{2-q} \right] d\Omega = \\
& = \begin{cases} iM & \text{si } q = -1 \\ \Phi & \text{si } q = 0 \\ \frac{\omega^2}{3} X_2(c\theta) & \text{si } q = 2 \\ 0 & \text{si } q = 1, 3, 4, 5, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

Maintenant, si  $Y_n$  représente une fonction sphérique quelconque d'ordre  $n$  on a, comme on sait :

$$\frac{1}{4\pi} \int X_q(c\gamma) Y_n(\theta', \psi') d\Omega = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq q \\ \frac{1}{2q+1} Y_q(\theta, \psi) & \text{si } n = q. \end{cases}$$

Le tableau précédent exprime donc la valeur des fonctions sphériques d'ordre  $q$  du développement du crochet. Cette remarque donne lieu à une nouvelle simplification. Nous représenterons par

$$[A(t, \theta, \psi)]_q$$

la fonction sphérique d'ordre  $q$  du développement en  $\theta$  et  $\psi$  de  $A$ . Cette fonction de Laplace pourra, ainsi que  $A$  dépendre du paramètre  $t$ . Le tableau devient

$$\left[ -\Phi' HR'^{-1} R^{1-q} + 4\pi i \int_t^1 \varrho R^{1-q} dR + 2\omega^2 \frac{1+}{2-q} R^{2-q} \right]_q = \begin{cases} iM & \text{si } q = -1 \\ \Phi & \text{si } q = 0 \\ \frac{5}{3}\omega^2 X_2(c\theta) & \text{si } q = 2 \\ 0 & \text{pour } q = 1, 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

#### 4. Deux remarques

1° On sait que la première équation, celle relative à  $q = -1$  n'est pas essentielle, elle détermine la masse totale. Ce sont les équations relatives à  $q = 0, 1, 2, 3, \dots$  qui représentent *la condition nécessaire et suffisante* pour qu'il y ait équilibre relatif. Parmi ces dernières, celles qui correspondent à  $q = 1, 2, 3, \dots$ , déterminent la stratification, c'est à dire la forme des surfaces de niveau, tandis que l'équation relative à  $q = 0$  détermine le potentiel  $\Phi$  par une équation différentielle du premier ordre. Cela introduit une constante arbitraire. Cette constante peut être, si on le désire, déterminée à partir de la masse totale par l'équation relative à  $q = -1$ .

Nous supprimerons à l'avenir cette équation de rang  $-1$ .

2° En plus, un théorème de M. Lichtenstein<sup>4)</sup> affirme l'existence d'un même *plan équatorial de symétrie* pour toutes les surfaces de niveau.

<sup>4)</sup> Mathematische Zeitschrift Bd. 28, H. 4, p. 635, 1928.

Pour les corps de révolution le développement de  $R$  ne peut contenir que des fonctions sphériques d'ordre pair et il en est de même du crochet du tableau précédent. Les équations relatives à une valeur impaire de  $q$  sont superflues si l'on tient compte à priori de la symétrie.

Il est vraisemblable que l'on peut inversément déduire l'existence du plan de symétrie des équations  $q = 1, 3, 5, 7, \dots$ , tout au moins pour les stratifications, à connexion sphérique, envisagées ici.

Nous pourrons faire abstraction de toutes les équations de rang impair et poser

$$q = 2p.$$

Le tableau s'écrit après ces remarques :

$$\begin{aligned} & \left[ -\Phi' HR'^{-1} R^{1-2p} + 4\pi i \int_t^1 \varrho R^{1-2p} dR + 2\omega^2 \frac{1+}{2-2p} R^{2-2p} \right]_{2p} \\ &= \begin{cases} \Phi & \text{si } p = 0 \\ \frac{5}{3} \omega^2 X_2(c\theta) & p = 1 \\ 0 & p = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

## 5. Un changement de fonction inconnue

Lorsque l'indice  $p$  augmente, les exposants de  $R$  diminuent et sont négatifs pour  $p > 0$ , de sorte qu'il serait plus difficile d'exprimer le développement des puissances de  $R$  en fonctions sphériques que si ces exposants étaient positifs. Mais, il est bien facile de remédier à ce défaut pratique, il suffit de poser

$$r = R^{-2}.$$

L'étude des figures ellipsoïdales montrera combien cette substitution est avantageuse. En posant

$$2h = 4r^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{s^2 \theta} \left( \frac{\partial r}{\partial \psi} \right)^2,$$

expression plus simple que  $H$ , le système fondamental s'écrit :

$$(I) \quad \begin{aligned} & \left[ \Phi' h r'^{-1} r^{p-1} - 2\pi i \int_t^1 \varrho r^{p-2} dr - \omega^2 \frac{1+}{p-1} r^{p-1} \right]_{2p} \\ &= \begin{cases} \Phi & \text{si } p = 0 \\ \frac{5}{3} \omega^2 X_2(c\theta) & p = 1 \\ 0 & p = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

C'est la forme qui me paraît la plus convenable pour l'étude théorique des figures d'équilibre, qu'il s'agisse d'une masse hétérogène ou homogène.

Et maintenant j'ai fini de transformer sans cesse le système d'équations, mais il me reste à examiner des cas particuliers.

## 6. Les surfaces de niveau à l'extérieur du corps

La surface libre a été supposée de connexion sphérique. La pesanteur n'y serait nulle en un point que si elle était nulle en tous les points de cette surface; ce qui n'est pas possible, car sur l'axe de rotation la pesanteur n'est pas nulle, cela résulte de la symétrie.

On a donc  $\Phi_1' \neq 0$ , et comme  $\Phi'$  est une fonction continue on a encore  $\Phi' \neq 0$  pour des valeurs de  $t$  allant de 1 à une valeur plus grande  $t_2$ . La surface libre est donc entourée d'un nimbe dont l'épaisseur est différente de zéro partout, formé par des surfaces fermées et régulières à  $\Phi$  constant. Quand ces surfaces de niveau se rapprochent de la surface libre, le rayon  $R$  et sa dérivée  $R'$  restent continus, même si l'on traverse la surface libre  $t=1$ , c'est la dérivée seconde  $R''$  qui subirait une discontinuité. Il en est de même pour  $r, r',$  et  $r''$ .

Cette discontinuité est due au fait que la densité en subit une aussi. Dans le nimbe en question, surface libre comprise  $1 \leq t < t_2$ , la densité est nulle et le tableau toujours applicable, s'écrit:

$$\left[ \Phi' h r'^{-1} r^{p-1} - \omega^2 \frac{1}{p-1} r^{p-1} \right]_{2p} = \begin{cases} \Phi & \text{si } p=0 \\ \frac{5}{3} \omega^2 X_2(c\theta) & p=1 \\ 0 & p=2, 3, 4, \dots . \end{cases}$$

Les équations relatives à  $p=2, 3, 4, \dots$  donnent:

$$\Phi' \left[ h r'^{-1} r^{p-1} \right]_{2p} = \frac{\omega^2}{p-1} \left[ r^{p-1} \right]_{2p}.$$

Maintenant, si l'on donne à  $p$  une seconde valeur  $p'$ , on obtiendra une autre relation de même forme et par division

$$(p-1) \frac{[h r'^{-1} r^{p-1}]_{2p}}{[r^{p-1}]_{2p}} = (p'-1) \frac{[h r'^{-1} r^{p'-1}]_{2p'}}{[r^{p'-1}]_{2p'}}.$$

Cette relation doit être satisfaite pour toutes les valeurs de  $p$  et de  $p'$  supérieures à l'unité.

A la fin du paragraphe 13 de l'article précédent, j'avais affirmé l'existence d'une relation de ce genre. Elle est indépendante de  $\rho$ , de  $\Phi$ , de  $\omega$ ; elle ne porte que sur la stratification du nimbe et de la surface libre.

Il était utile de la signaler étant donné l'importance des fonctions sphériques dans cette étude. Mais au point de vue géométrique, la relation (26) de notre premier article aux «Commentarii»<sup>5)</sup> était plus intéressante parce que d'une signification géométrique plus immédiate. La relation (26) était d'ailleurs applicable à toutes les surfaces de niveau, tant intérieures qu'extérieures à l'astre.

## 7. Sur une condition nécessaire et purement géométrique

En dérivant les équations I par rapport à  $t$ , on trouve, pour  $p > 1$ :

$$\Phi'' [hr'^{-1} r^{p-1}]_{2p} + \Phi' [hr'^{-1} r^{p-1}]'_{2p} + (2\pi i \rho - \omega^2) [r^{p-2} r']_{2p} = 0.$$

Puis en éliminant  $\Phi''$ ,  $\Phi'$  et  $2\pi i \rho - \omega^2$ , on obtient, pour toutes les valeurs supérieures à l'unité de  $p$ ,  $p'$ ,  $p''$  la nouvelle relation:

$$\begin{vmatrix} [hr'^{-1} r^{p-1}]_{2p} & [hr'^{-1} r^{p-1}]'_{2p} & [r^{p-2} r']_{2p} \\ [hr'^{-1} r^{p'-1}]_{2p'} & [hr'^{-1} r^{p'-1}]'_{2p'} & [r^{p'-2} r']_{2p'} \\ [hr'^{-1} r^{p''-1}]_{2p''} & [hr'^{-1} r^{p''-1}]'_{2p''} & [r^{p''-2} r']_{2p''} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

## 8. Cas particulier de la masse homogène

Si la masse est homogène, les surfaces d'égale densité disparaissent mais les surfaces d'égale pression en sont la trace. Par stratification d'une masse homogène, il faut entendre la répartition des surfaces d'égale pression.

Le système I s'écrit, alors, débarrassé de l'intégrale en  $t$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \Phi' hr'^{-1} r^{p-1} - 2\pi i \rho \frac{I^+}{p-1} r_1^{p-1} + (2\pi i \rho - \omega^2) \frac{I^+}{p-1} r^{p-1} \right]_{2p} \\ &= \begin{cases} \Phi & \text{si } p = 0 \\ \frac{5}{3} \omega^2 X_2(c\theta) & p = 1 \\ 0 & p = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>5)</sup> Commentarii Math. Helv. Vol. 1, F. 1, p. 11.

Ces équations régissent toutes les figures d'équilibre d'une masse homogène à connexion sphérique.

## 9. Les ellipsoïdes

Pour une stratification ellipsoïdale, on a

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1,$$

$\alpha, \beta, \gamma$  étant fonction de  $t$ . En passant à  $r, \theta$  et  $\psi$  on trouve

$$r = s^2 \theta (\alpha c^2 \psi + \beta s^2 \psi) + \gamma c^2 \theta$$

$$h = s^2 \theta (\alpha^2 c^2 \psi + \beta^2 s^2 \psi) + \gamma^2 c^2 \theta.$$

Pour  $p > 1$ , le crochet  $[r^{p-1}]$  ne contient que des fonctions sphériques inférieures à  $z_p$ . On a donc

$$[r^{p-1}]_{2p} = 0 \quad p > 1.$$

Pour avoir de même

$$[h r'^{-1} r^{p-1}]_{2p} = 0 \quad p > 1$$

il suffit que la stratification soit homothétique. Les équations relatives à  $p = 2, 3, 4, \dots$  sont alors identiquement satisfaites. Les équations relatives à  $p = 0$  et  $p = 1$ , donnent, ensuite, les formules classiques qui lient le rapport des axes au rapport

$$\frac{\omega^2}{\varrho}.$$

On retrouve ainsi les ellipsoïdes de *Mac-Laurin* et de *Jacobi*. Nous examinerons plus tard le cas des figures dérivées des ellipsoïdes.

(Reçu le 14 juillet 1930)