Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 2 (1930)

Artikel: Darstellung des Kreises und der Kegelschnitte.
Autor: Grossmann, Marcel
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3616

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Darstellung des Kreises und der Kegelschnitte

Von MARCEL GROSSMANN, in Zürich

Die mathematische Literatur ist reich an Abhandlungen, die sich mit der linearen Abbildung des Kreises und, allgemeiner, der Kegelschnitte, befassen. Doch fehlt diesen Nachweisen die Tragweite und den meisten auch die unmittelbare Anschaulichkeit. Beides will in der Folge gegeben werden.

Dabei will ich mich an dieser Stelle kurz fassen, da ich in naher Zukunft Gelegenheit zu ausführlicherer Darlegung haben werde.

Ausgangspunkte bilden die anschaulichen Ideen von *Dandelin* [1]). Er weist bekanntlich nach, daß der allgemeine (schiefe) ebene Schnitt des geraden Kreiszylinders die Brennpunktseigenschaften der Ellipse hat. Nach dem Beispiel von *J. Hadamard* [2]) und *E. Müller* [3]) läßt sich dann zeigen, daß auch die Normalprojektion des Kreises eine Ellipse ist. Die Beweise beider Schriftsteller lassen sich erheblich abkürzen.

Sodann gehe man aus von der in Fig. 1 dargestellten Konstruktion von Punkten eines Kreises. Der Durchmesser d habe die Endpunkte P und Q. Dann sind die Strahlen PV und QV rechtwinklig zueinander. Spiegelt man die Zeichnung am Durchmesser d^*, der zu d rechtwinklig ist, so läßt sich diese elementare Erzeugungsweise projektiv deuten. Ein Blick auf die Figur läßt nämlich erkennen, daß die Schnittpunkte U und T der Strahlen, welche die Kreispunkte P bezw. Q mit den übrigen Kreispunkten verbinden, mit dem Durchmesser d^* *konjugierte* Punkte bezüglich des Kreises sind, daß also jeder auf der Polaren des andern bezüglich des Kreises liegt, daher auch harmonisch sind zu den Kreispunkten R und S auf dem Durchmesser d^*.

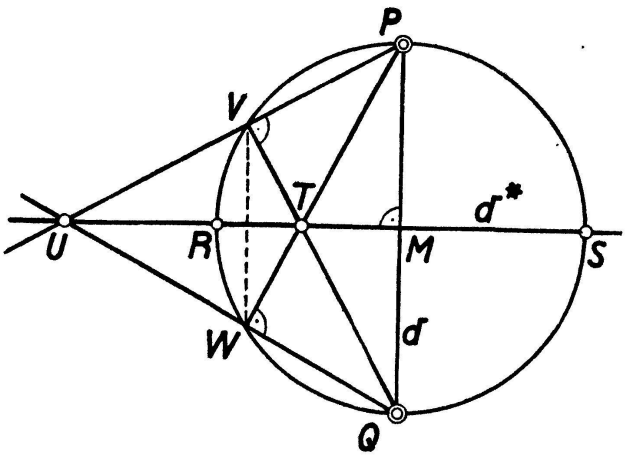

Fig. 1

[1]) *G. P. Dandelin,* Brux. nouv. Mém. (1822).
[2]) *J. Hadamard,* Leçons de géométrie élémentaire, t. II.
[3]) *E. Müller,* Vorlesungen über darstellende Geometrie an technischen Hochschulen, Bd. 1.

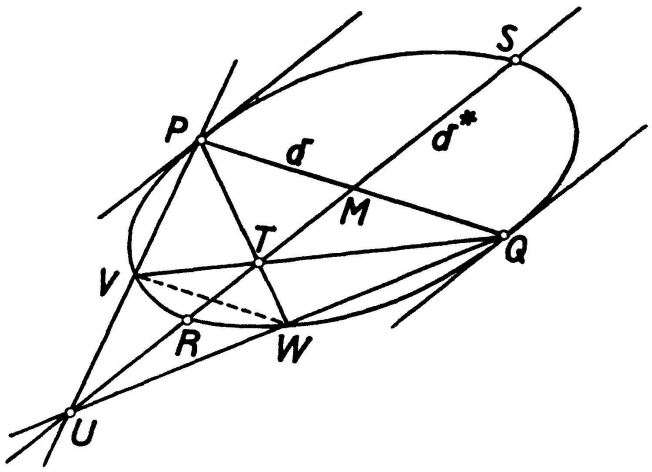

Fig. 2

Diese Konstruktion am Kreise bleibt aber projektiv invariant bei einer normalen oder schiefen Projektion desselben, so daß Fig. 2 die Gültigkeit des Satzes auch für die *Ellipse*, und zwar für *jede* Ellipse veranschaulicht; denn jede Ellipse kann als ebener Schnitt eines geraden Kreiszylinders betrachtet werden.

Nun stütze man sich ferner auf die einfachen Nachweise von *Dandelin* über *Ellipse, Parabel und Hyperbel* als ebene Schnitte des geraden Kreiskegels. Eine leicht nachweisbare zentrale Kollineation führt vom Grundkreis des Kegels auf den Grundriß des Schnittes, eine andere Verwandtschaft dieser Art auf die wahre Gestalt des Schnittes. Transformiert man aber Fig. 1 kollinear, so entsteht Fig. 3, die also für jeden Kegelschnitt gilt. Dabei sind die Sehnen d und d^* konjugiert, ebenso die Punkte U und T, in denen die Strahlen PV und QV die Sehne d^* treffen, so daß die Punktepaare U und T Paare der Polinvolution der Sehne d^* sind. Ist also diese hyperbolisch, so daß ihre Doppelpunkte R und S, wie in Fig. 3 reell sind, so liegen U und T harmonisch zu R und S.

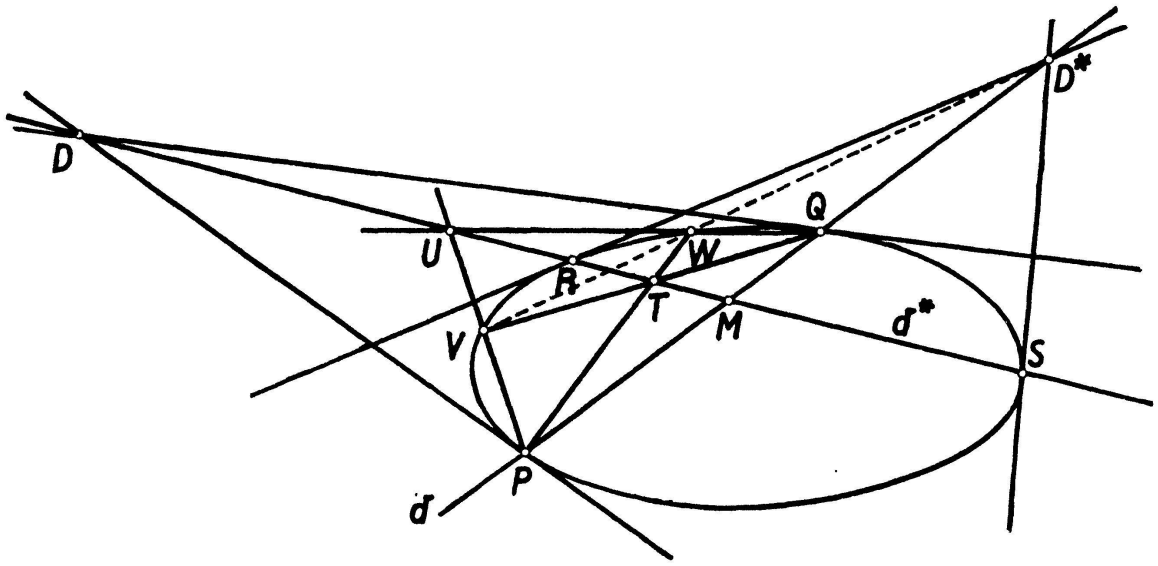

Fig. 3

Da also jede Kollineation aus einer Kreisfigur 1 oder einer Kegelschnittfigur 2 eine Fig. 3 ergibt, ist die kollineare Umformung eines

Kreises oder allgemein eines Kegelschnittes immer wieder ein Kegelschnitt. Damit aber ist Alles bewiesen, was zur darstellend-geometrischen Behandlung der Kurven und Kegelflächen zweiter Ordnung gehört.

Zusammenfassend sei hervorgehoben, daß neben den grundlegenden und anschaulichen Beweisen von *Dandelin* über die ebenen Schnitte der geraden Kreiszylinder und -kegel von wesentlicher Wichtigkeit der Satz ist:

Verbindet man zwei beliebige Punkte eines Kegelschnittes mit seinen übrigen Punkten, so entstehen zwei Strahlbüschel, die von jeder zur Verbindungsgeraden der Scheitel konjugierten Geraden in konjugierten Polen geschnitten wird.

Die vielfachen konstruktiven Anwendungen dieses Satzes seien an zwei *Beispielen* erläutert.

1. *Parabel aus zwei Punkten und ihren Tangenten.*

Man wähle die beiden gegebenen Punkte zu Büschelscheiteln P und Q (Fig. 4). Zur Parabelsehne d, welche diese zwei Punkte verbindet, ist der Durchmesser d^*, der den Pol D von d mit dem Mittelpunkt M der Sehne PQ verbindet, konjugiert. Da diese Gerade die Parabel in einem Punkte S schneidet, der die Mitte hält zwischen den Punkten D und M und im unendlich-fernen Punkt R, so sind die konjugierten Pole U und T *symmetrisch* zum Punkt S. Die Verbindungslinien der beiden Scheitel mit jedem Paar solcher konjugierter Pole U und T liefern Parabelpunkte V und W, deren Verbindungsgerade die Richtung von PQ hat.

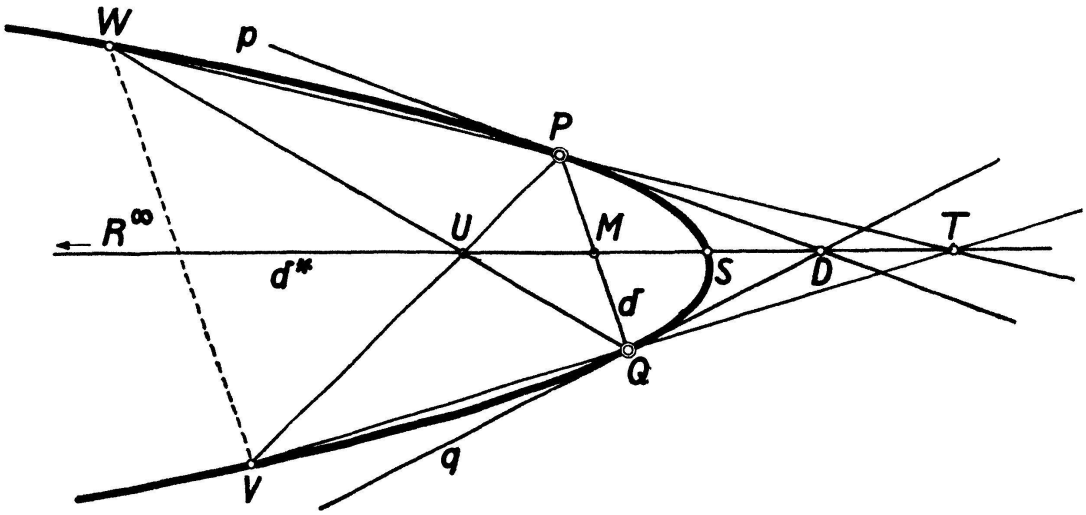

Fig. 4

2. *Hyperbel aus den Asymptoten und einem Punkt.*

Ist Q der symmetrische zum gegebenen Punkt P, bez. des Mittelpunktes M der Hyperbel (Fig. 5) und wählt man diese Punkte zu Büschel-

scheiteln, so werden die Geraden d und d^* konjugierte Durchmesser der Hyperbel. Daher läßt sich das Paar leicht angeben. Zieht man ferner durch den Punkt P die Parallelen zu den Asymptoten a_1 und a_2, so erhält man das symmetrische Paar R' S' der (elliptischen) Polinvolution der Geraden d^*, deren Mittelpunkt M ist. Wenn dann U und T ein neues Paar dieser Involution sind, so ergeben ihre Verbindungsgeraden mit den Scheiteln P und Q ein Punktepaar V, W der Hyperbel, dessen Verbindungsgerade die Richtung des Durchmessers d hat.

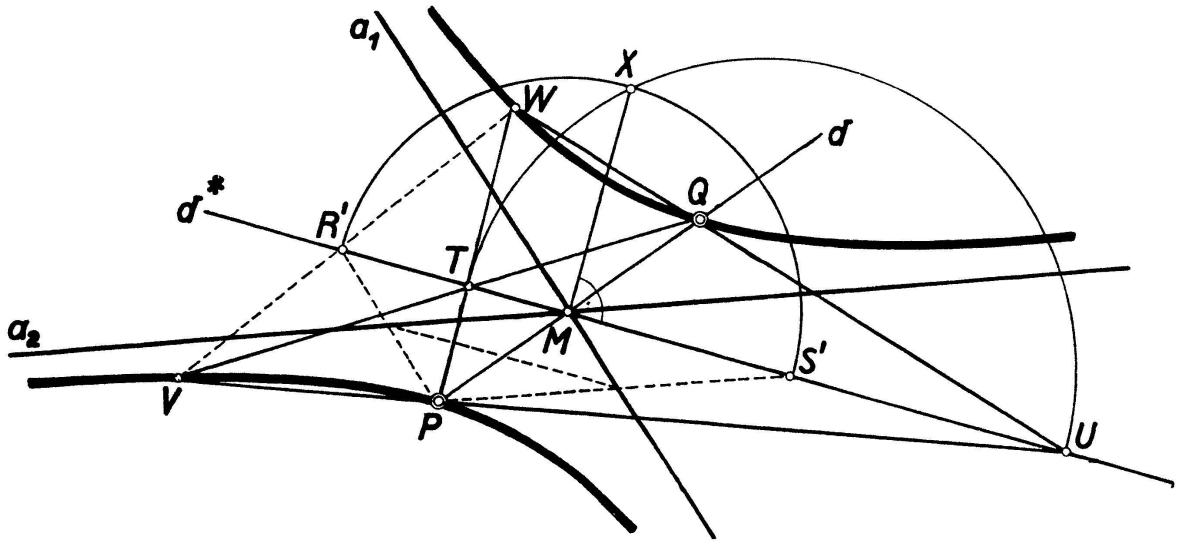

Fig. 5

Die hier verwendete Konstruktion läßt sich auch dahin fassen, daß man von einem Kegelschnitt ein Paar von Pol und Polaren kennt, die zugehörige Involution und ein Peripherieelement (Punkt oder Tangente); diese in der projektiven Geometrie häufig benützte Konstruktion, die richtig ausgebaut, Punkte und Tangenten des Kegelschnitts ergibt, wird vom Verfasser zur Darstellung vieler Konstruktionen der projektiven und der nichteuklidischen Geometrie verwendet werden.

(Eingegangen den 4. Juni 1930)