

Darstellung des Kreises und der Kegelschnitte.

Autor(en): **Grossmann, Marcel**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **2 (1930)**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-3616>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Darstellung des Kreises und der Kegelschnitte

Von MARCEL GROSSMANN, in Zürich

Die mathematische Literatur ist reich an Abhandlungen, die sich mit der linearen Abbildung des Kreises und, allgemeiner, der Kegelschnitte, befassen. Doch fehlt diesen Nachweisen die Tragweite und den meisten auch die unmittelbare Anschaulichkeit. Beides will in der Folge gegeben werden.

Dabei will ich mich an dieser Stelle kurz fassen, da ich in naher Zukunft Gelegenheit zu ausführlicherer Darlegung haben werde.

Ausgangspunkte bilden die anschaulichen Ideen von *Dandelin*¹⁾. Er weist bekanntlich nach, daß der allgemeine (schiefe) ebene Schnitt des geraden Kreiszyinders die Brennpunkteigenschaften der Ellipse hat. Nach dem Beispiel von *J. Hadamard*²⁾ und *E. Müller*³⁾ läßt sich dann zeigen, daß auch die Normalprojektion des Kreises eine Ellipse ist. Die Beweise beider Schriftsteller lassen sich erheblich abkürzen.

Sodann gehe man aus von der in Fig. 1 dargestellten Konstruktion von Punkten eines Kreises. Der Durchmesser d habe die Endpunkte P und Q . Dann sind die Strahlen PV und QV rechtwinklig zueinander. Spiegelt man die Zeichnung am Durchmesser d^* , der zu d rechtwinklig ist, so läßt sich diese elementare Erzeugungsweise projektiv deuten. Ein Blick auf die Figur läßt nämlich erkennen, daß die Schnittpunkte U und T der Strahlen, welche die Kreispunkte P bzw. Q mit den übrigen Kreispunkten verbinden, mit dem Durchmesser d^* konjugierte Punkte bezüglich des Kreises sind, daß also jeder auf der Polaren des andern bezüglich des Kreises liegt, daher auch harmonisch sind zu den Kreispunkten R und S auf dem Durchmesser d^* .

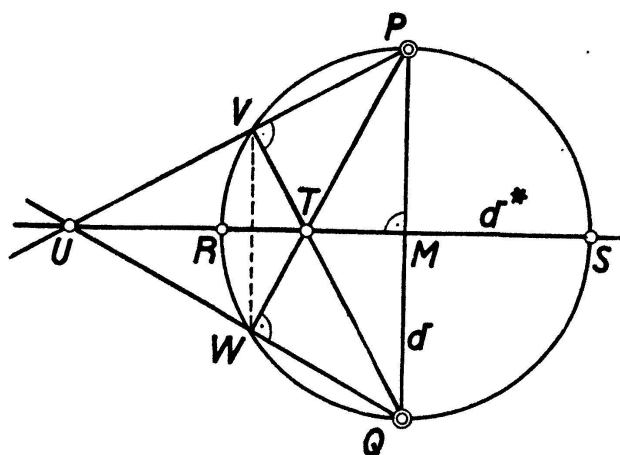


Fig. 1

¹⁾ G. P. Dandelin, Brux. nouv. Mém. (1822).

²⁾ J. Hadamard, Leçons de géométrie élémentaire, t. II.

³⁾ E. Müller, Vorlesungen über darstellende Geometrie an technischen Hochschulen, Bd. I.

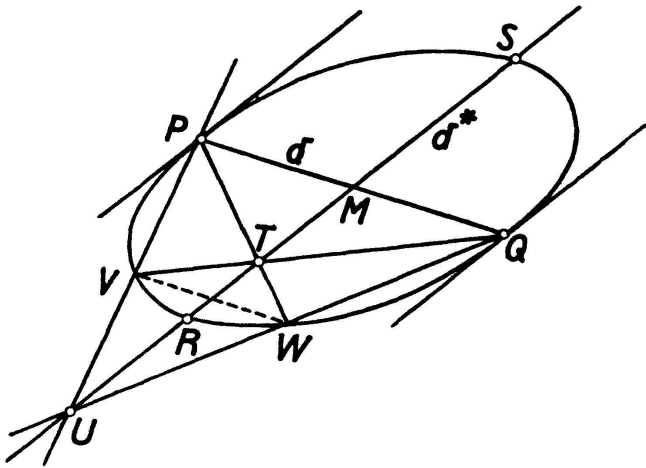


Fig. 2

Diese Konstruktion am Kreise bleibt aber projektiv invariant bei einer normalen oder schiefen Projektion desselben, so daß Fig. 2 die Gültigkeit des Satzes auch für die *Ellipse*, und zwar für *jede* Ellipse veranschaulicht; denn jede Ellipse kann als ebener Schnitt eines geraden Kreiszyinders betrachtet werden.

Nun stütze man sich ferner auf die einfachen Nachweise von *Dandelin* über *Ellipse, Parabel und Hyperbel* als ebene Schnitte des geraden Kreiskegels. Eine leicht nachweisbare zentrale Kollineation führt vom Grundkreis des Kegels auf den Grundriß des Schnittes, eine andere Verwandtschaft dieser Art auf die wahre Gestalt des Schnittes. Transformiert man aber Fig. 1 kollinear, so entsteht Fig. 3, die also für jeden Kegelschnitt gilt. Dabei sind die Sehnen d und d^* konjugiert, ebenso die Punkte U und T , in denen die Strahlen PV und QV die Sehne d^* treffen, so daß die Punktepaare U und T Paare der Polinvolution der Sehne d^* sind. Ist also diese hyperbolisch, so daß ihre Doppelpunkte R und S , wie in Fig. 3 reell sind, so liegen U und T harmonisch zu R und S .

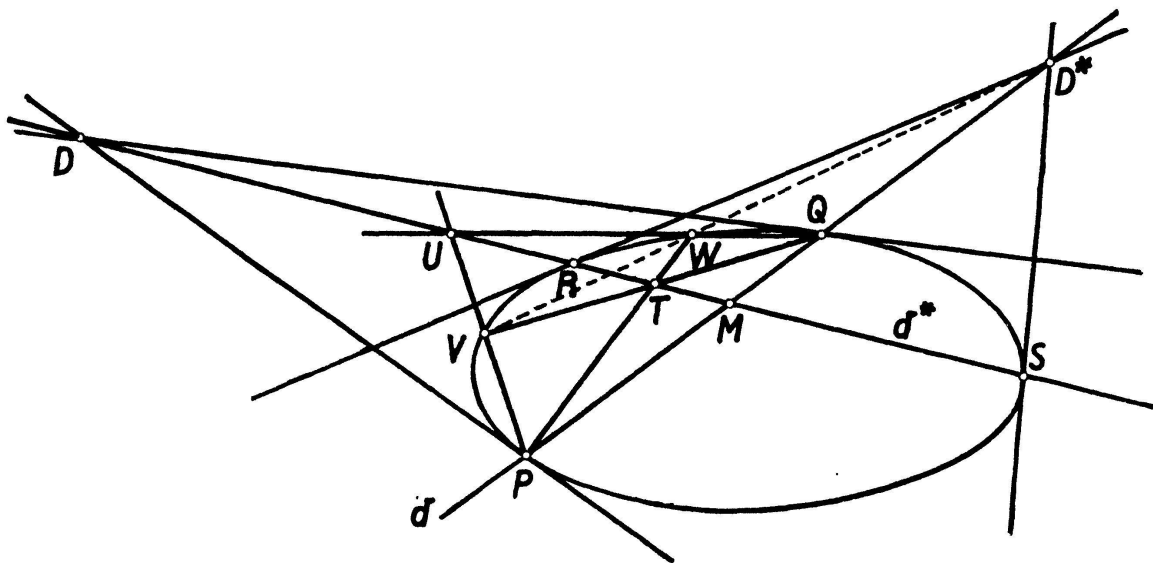


Fig. 3

Da also jede Kollineation aus einer Kreisfigur 1 oder einer Kegelschnittfigur 2 eine Fig. 3 ergibt, ist die kollineare Umformung eines

Kreises oder allgemein eines Kegelschnittes immer wieder ein Kegelschnitt. Damit aber ist Alles bewiesen, was zur darstellend-geometrischen Behandlung der Kurven und Kegelflächen zweiter Ordnung gehört.

Zusammenfassend sei hervorgehoben, daß neben den grundlegenden und anschaulichen Beweisen von *Dandelin* über die ebenen Schnitte der geraden Kreiszyylinder und -kegel von wesentlicher Wichtigkeit der Satz ist:

Verbindet man zwei beliebige Punkte eines Kegelschnittes mit seinen übrigen Punkten, so entstehen zwei Strahlbüschel, die von jeder zur Verbindungsgeraden der Scheitel konjugierten Geraden in konjugierten Polen geschnitten wird.

Die vielfachen konstruktiven Anwendungen dieses Satzes seien an zwei *Beispielen* erläutert.

1. *Parabel aus zwei Punkten und ihren Tangenten.*

Man wähle die beiden gegebenen Punkte zu Büschelscheiteln P und Q (Fig. 4). Zur Parabelsehne d , welche diese zwei Punkte verbindet, ist der Durchmesser d^* , der den Pol D von d mit dem Mittelpunkt M der Sehne PQ verbindet, konjugiert. Da diese Gerade die Parabel in einem Punkte S schneidet, der die Mitte hält zwischen den Punkten D und M und im unendlich-fernen Punkt R , so sind die konjugierten Pole U und T *symmetrisch* zum Punkt S . Die Verbindungslinien der beiden Scheitel mit jedem Paar solcher konjugierter Pole U und T liefern Parabelpunkte V und W , deren Verbindungsgerade die Richtung von PQ hat.

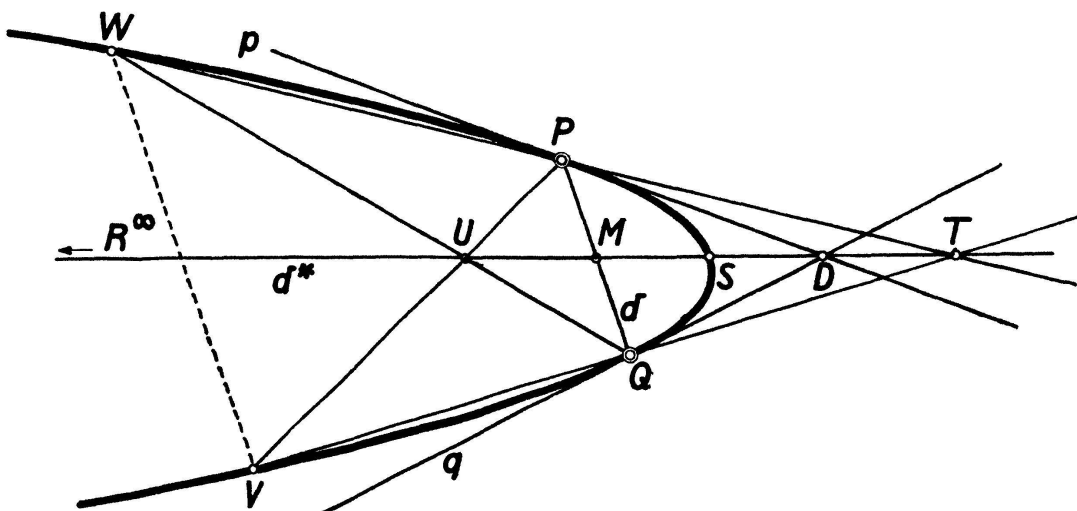


Fig. 4

2. *Hyperbel aus den Asymptoten und einem Punkt.*

Ist Q der symmetrische zum gegebenen Punkt P , bez. des Mittelpunktes M der Hyperbel (Fig. 5) und wählt man diese Punkte zu Büschel-

scheiteln, so werden die Geraden d und d^* konjugierte Durchmesser der Hyperbel. Daher läßt sich das Paar leicht angeben. Zieht man ferner durch den Punkt P die Parallelen zu den Asymptoten a_1 und a_2 , so erhält man das symmetrische Paar $R' S'$ der (elliptischen) Polinvolution der Geraden d^* , deren Mittelpunkt M ist. Wenn dann U und T ein neues Paar dieser Involution sind, so ergeben ihre Verbindungsgeraden mit den Scheiteln P und Q ein Punktepaar V, W der Hyperbel, dessen Verbindungsgerade die Richtung des Durchmessers d hat.

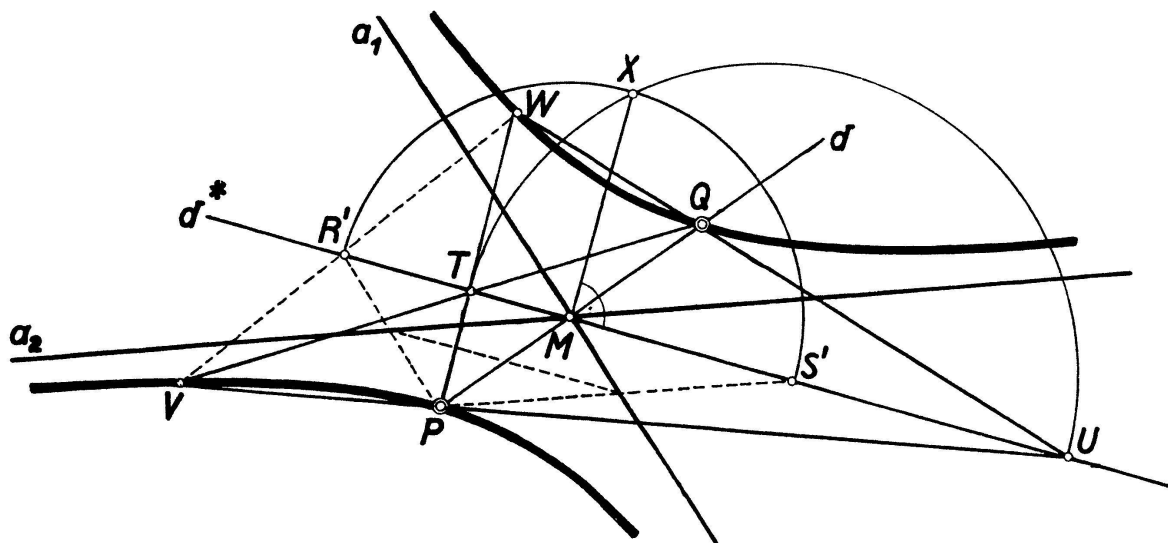


Fig. 5

Die hier verwendete Konstruktion läßt sich auch dahin fassen, daß man von einem Kegelschnitt ein Paar von Pol und Polaren kennt, die zugehörige Involution und ein Peripherieelement (Punkt oder Tangente); diese in der projektiven Geometrie häufig benützte Konstruktion, die richtig ausgebaut, Punkte und Tangenten des Kegelschnitts ergibt, wird vom Verfasser zur Darstellung vieler Konstruktionen der projektiven und der nichteuklidischen Geometrie verwendet werden.

(Eingegangen den 4. Juni 1930)