

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 2 (1930)

**Artikel:** Ueber algebraische Zahlkörper mit gegebener Diskriminante.  
**Autor:** Nagell, Trygve  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-3615>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ueber algebraische Zahlkörper mit gegebener Diskriminante

Von TRYGVE NAGELL, in Oslo

## I.

Ein quadratischer Zahlkörper ist bekanntlich durch seine Körperdiskriminante eindeutig bestimmt. Für Körper höheren Grades gilt dies nicht mehr. Es gibt im allgemeinen mehrere nicht-konjugierte Körper  $n^{\text{ten}}$  Grades mit derselben Diskriminante, wenn  $n \geq 3$  ist. Nach einem bekannten Satz von *Hermite* und *Minkowski* ist ihre Anzahl jedoch endlich.<sup>1)</sup> Wir wollen hier den folgenden Satz beweisen:<sup>2)</sup>

*Es sei  $n$  eine feste natürliche Zahl  $\geq 3$ , und es bedeute  $A_n(D)$  die Anzahl der Zahlkörper  $n^{\text{ten}}$  Grades mit der Diskriminante  $D$ . Dann ist*

$$\limsup_{|D| \rightarrow \infty} A_n(D) = \infty. \quad (I)$$

*Beweis:* Es seien  $p_1, p_2, \dots, p_r$  lauter verschiedene Primzahlen, unter denen die sämtlichen Primteiler der Zahl  $n$  vorkommen. Es seien ferner  $P$  und  $Q$  zwei natürliche Zahlen so, daß

$$PQ = p_1 p_2 \dots p_r$$

ist. Wir setzen dann

$$\alpha = \left| \sqrt[n]{PQ^{n-1}} \right|. \quad (2)$$

Man sieht nun leicht, daß der durch die Zahl  $\alpha$  erzeugte Körper  $n^{\text{ten}}$  Grades die folgende Körperbasis hat

$$1, \alpha, \frac{\alpha^2}{Q}, \frac{\alpha^3}{Q^2}, \dots, \frac{\alpha^{n-1}}{Q^{n-2}}. \quad (3)$$

<sup>1)</sup> *Ch. Hermite*, Journ. für Math., Bd. 47; *H. Minkowski*, Geometrie der Zahlen.

<sup>2)</sup> Für  $n=3$  ist dieses Resultat schon bekannt. Siehe *W. E. H. Berwick*, On cubic fields with a given discriminant, Proc. London Math. Soc., 2. ser., vol. 23 (1925), S. 359, und *H. Hasse*, Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörper-theoretischer Grundlage, Math. Zeitschrift, Bd. 31 (1930), S. 565.

Um dies zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß eine Zahl

$$\frac{1}{p} \left( A_0 + A_1 \alpha + A_2 \cdot \frac{\alpha^2}{Q} + \dots + A_{n-1} \frac{\alpha^{n-1}}{Q^{n-2}} \right), \quad (4)$$

wo  $p, A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$  ganze rationale Zahlen sind, nur dann ganz ist, wenn die Koeffizienten  $A$  alle durch  $p$  teilbar sind. Wegen

$$D(\alpha) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} n^n (P Q^{n-1})^{n-1} \quad (5)$$

genügt es anzunehmen, daß  $p$  eine der Primzahlen  $p_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) ist.

Da  $\frac{\alpha}{\sqrt[n]{p}}$  eine ganze algebraische Zahl ist, muß, wenn die Zahl (4) ganz

ist, auch  $\frac{A_0}{\sqrt[n]{p}}$  ganz sein.  $A_0$  ist folglich durch  $p$  teilbar. Es sei nun

$p$  ein Teiler von  $P$ , und es seien  $A_0, A_1, \dots, A_{i-1}$  alle durch  $p$  teilbar; dann ist auch  $A_i$  durch  $p$  teilbar. Denn in (4) sind die Zahlen

$\frac{\alpha^j}{Q^{j-1}}$ , für  $j \geq i+1$ , alle durch  $\sqrt[n]{p^{i+1}}$  teilbar, und folglich auch die Zahl

$A_i \frac{\alpha^i}{Q^{i-1}}$ . Aber dann muß  $\frac{A_i}{\sqrt[n]{p}}$  ganz sein, d. h.  $A_i$  ist durch  $p$  teilbar. Die

Koeffizienten  $A$  sind folglich alle durch  $p$  teilbar. Dasselbe ergibt sich, wenn  $p$  ein Teiler von  $Q$  ist; man hat nur den Induktionsbeweis von der anderen Seite mit  $A_{n-1}, A_{n-2}$  usw. anzufangen.

Die Zahlen (3) bilden folglich eine Körperbasis, und wegen (5) wird die Körperdiskriminante gegeben durch

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \cdot n^n \cdot (p_1 p_2 \dots p_r)^{n-1}. \quad (6)$$

Wenn die Primzahlen  $p_i$  fest gegeben sind, bestehen für die Zahlen  $P$  und  $Q$  genau  $2^r$  Möglichkeiten, denen ebenso viele Zahlen  $\alpha$  entsprechen. Die Zahlen  $\alpha$  erzeugen genau  $2^{r-1}$  verschiedene Zahlkörper  $n^{\text{ten}}$  Grades; denn  $\left| \sqrt[n]{P Q^{n-1}} \right|$  und  $\left| \sqrt[n]{P^{n-1} Q} \right|$  bestimmen offenbar denselben Körper. Folglich gilt: *Die Anzahl der nicht-konjugierten Zahlkörper  $n^{\text{ten}}$  Grades mit der Diskriminante (6) ist mindestens gleich  $2^{r-1}$ .*

Da wir  $r$  beliebig groß wählen können, folgt hieraus sofort der Satz (1).

## II.

Der Minkowskische Beweis dafür, daß nur endlich viele Zahlkörper  $n^{\text{ten}}$  Grades mit gegebener Diskriminante  $D$  existieren, beruht auf dem folgenden Satz:<sup>3)</sup>

In jedem algebraischen Zahlkörper  $n^{\text{ten}}$  Grades mit der Diskriminante  $D$  gibt es eine ganze Zahl  $\xi$   $n^{\text{ten}}$  Grades, die mit ihren Konjugierten  $\xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \dots, \xi^{(n)}$  den folgenden Ungleichungen genügt

$$|\xi| < |\sqrt{D}| \text{ und } |\xi^{(i)}| < 1, \quad 2 \leq i \leq n, \quad (7)$$

wenn der Körper reell ist, oder

$$|\xi| = |\xi^{(2)}| < |\sqrt{D}| \text{ und } |\xi^{(i)}| < 1, \quad 3 \leq i \leq n, \quad (7')$$

wenn der Körper imaginär ist, und  $\xi^{(2)}$  die zu  $\xi$  konjugiert-imaginäre Zahl bedeutet.

Hieraus folgt zugleich eine Methode um die sämtlichen Körper  $n^{\text{ten}}$  Grades mit gegebener Diskriminante zu bestimmen. Für die ganzzahligen Koeffizienten  $a_i$  in der Gleichung

$$\xi^n + a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (8)$$

bestehen ja wegen den Ungleichungen (7) und (7') nur endlich viele Möglichkeiten. Die so erhaltenen Gleichungen für  $\xi$  bestimmen alle diejenigen Körper  $n^{\text{ten}}$  Grades, deren Diskriminanten absolut genommen  $\leq |D|$  sind. Die Anzahl der zu untersuchenden Gleichungen wächst aber so schnell mit  $|D|$ , daß die Methode praktisch unbrauchbar wird. (Ihre Anzahl ist in bezug auf  $|D|$  von der Größenordnung  $|D|^N$ , wenn  $N = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$  gesetzt wird.) Es entsteht so die Frage, ob man statt (7) und (7') günstigere Ungleichungen aufstellen könnte. Dies ist mir nur dann gelungen, wenn ich  $n$  spezialisiere. Es gilt z. B. der folgende Satz:

*Es sei  $n$  eine ungerade Primzahl und  $m = 2n - 2$ . Dann gibt es in jedem reellen algebraischen Körper  $n^{\text{ten}}$  Grades mit der Diskriminate  $D$  eine ganze Zahl  $\xi$   $n^{\text{ten}}$  Grades, die mit ihren Konjugierten  $\xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \dots, \xi^{(n)}$  den folgenden Ungleichungen genügt*

$$|\xi| < 1, \quad |\xi^{(i)}| < \sqrt[m]{|D|}, \quad 2 \leq i \leq n. \quad (9)$$

<sup>3)</sup> Siehe *D. Hilbert*, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresber. d. Deutschen Math. Vereinigung, Bd. 4 (Berlin 1894), S. 212, und *T. Nagell*, Zur Theorie der algebraischen Ringe, Journ. f. Math., Bd. 163. Bekanntlich ist ja auch  $n$  beschränkt, wenn  $D$  gegeben ist.

*Beweis:* Es sei  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  eine Körperbasis, und

$$F_1 = u_1 \omega_1 + u_2 \omega_2 + \dots + u_n \omega_n$$

eine homogene lineare Form in  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , ferner

$$F_i = u_1 \omega_1^{(i)} + u_2 \omega_2^{(i)} + \dots + u_n \omega_n^{(i)}$$

die zu  $F_1$  konjugierten Formen. Dann haben die Ungleichungen

$$|F_1| < 1, \quad |F_2| < \left| \sqrt[m]{D} \right| + 1, \quad |F_i| < \left| \sqrt[m]{D} \right|, \quad 3 \leq i \leq n \quad (10)$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen Zahlen  $u_k$ . Es sei  $\varphi$  der kleinste positive Wert von  $|F_2|$ , der diesen Lösungen entspricht.

Um unseren Satz zu beweisen, genügt es nun offenbar zu zeigen, daß  $\varphi < \left| \sqrt[m]{D} \right|$  ist. Denn eine von Null verschiedene ganze Zahl  $\xi$ , die den Ungleichungen (9) genügt, ist notwendig vom  $n^{\text{ten}}$  Grade, da ein Körper von Primzahlgrad keinen irrationalen Unterkörper hat.  $\varphi = \left| \sqrt[m]{D} \right|$  ist ausgeschlossen, da sonst  $|F_1| = \left| \sqrt[m]{D} \right| \geq 1$  wäre. Sollte es keine Lösungen der Ungleichungen (10) geben, so setze man  $\varphi = \left| \sqrt[m]{D} \right| + 1$ . Es sei sonst angenommen, daß  $\varphi > \left| \sqrt[m]{D} \right|$  sei. Wir bestimmen dann die positive Zahl  $\varepsilon$  so, daß

$$(1 + \varepsilon) \left| \sqrt[m]{D} \right| < \varphi$$

ist. Durch Anwendung des bekannten Minkowskischen Satzes über homogene lineare Formen<sup>4)</sup> ergibt sich nun:

Wenn  $F_2$  reell ist, haben die Ungleichungen

$$|F_1| \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1, \quad |F_2| \leq (1 + \varepsilon) \left| \sqrt[m]{D} \right| < \varphi, \\ |F_i| \leq \left| \sqrt[m]{D} \right|, \quad 3 \leq i \leq n,$$

Lösungen in nicht sämtlich verschwindenden ganzen rationalen  $u_k$ .

Wenn  $F_2$  und  $F_3$  konjugiert-imaginär sind, gilt dasselbe für die Ungleichungen

<sup>4)</sup> Siehe z. B. *E. Landau*, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Satz 116 (Leipzig 1927).

$$|F_1| \leq \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} < 1, \quad |F_2| = |F_3| \leq (1+\varepsilon) \left| \sqrt[m]{D} \right| < \varphi,$$

$$|F_i| \leq \left| \sqrt[m]{D} \right|, \quad 4 \leq i \leq n.$$

Die Gleichheitszeichen können hier niemals für  $|F_i|$  gelten; denn sonst würde  $|F_1| = \left| \sqrt[m]{D} \right| \geq 1$ . Hieraus folgt nun zunächst, daß die Ungleichungen (10) immer mindestens ein System von Lösungen haben. Ferner folgt, daß die Voraussetzung  $\varphi > \left| \sqrt[m]{D} \right|$  auf einen Widerspruch führt.

Unser Satz ist folglich bewiesen. Die Anzahl der zu untersuchenden Gleichungen (8) wird hier in bezug auf  $|D|$  von der Größenordnung  $|D|^{\frac{1}{4}n + \frac{1}{2}}$ ; die Ungleichungen (9) sind also bedeutend günstiger als die Ungleichungen (7) und (7').

Durch ähnliche Betrachtungen kann man den folgenden Satz beweisen:

*Es sei  $n$  eine ungerade natürliche Zahl  $\geq 3$ . Dann gibt es in jedem algebraischen Zahlkörper  $n^{\text{ten}}$  Grades mit der Diskriminante  $D$  eine ganze Zahl  $\xi$   $n^{\text{ten}}$  Grades, die mit ihren Konjugierten  $\xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \dots, \xi^{(n)}$  den folgenden Ungleichungen genügen,*

$$|\xi| < \left| \sqrt[4]{D} \right|, \quad |\xi^{(2)}| < \left| \sqrt[4]{D} \right|, \quad |\xi^{(i)}| < 1, \quad 3 \leq i \leq n.$$

*Wenn  $\xi$  imaginär ist, bedeutet hier  $\xi^{(2)}$  die zu  $\xi$  konjugiert-imaginäre Zahl.*

Diese Resultate gelten auch für algebraische Ringe.

Zur Bestimmung aller kubischen Körper mit der gegebenen Diskriminante  $D$  hat man eine andere, im allgemeinen bequemere Methode, die die Eigenschaften des durch  $\sqrt{-3D}$  erzeugten Körpers benutzt (Siehe die oben zitierte Arbeit von Berwick).

(Eingegangen den 1. Juni 1930)