Le jeu de pile ou face et les formules de Laplace et de J. Eggenberger

par D. MIRIMANOFF, Genève

Introduction

Dans une Note des Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris[1]) j'ai indiqué deux formules permettant de calculer, avec une approximation en général suffisante, les probabilités classiques envisagées dans le jeu de pile ou face.

Soient s le nombre de coups joués, T_l la probabilité pour que l'écart soit égal à l. Soit d'autre part P^l_{-l} la probabilité pour que cet écart soit compris entre $-l$ et l (je l'avais désignée par P_l dans la Note citée). J'ai montré que, sous des conditions très larges,

$$(1) \qquad T_l = \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{-t^2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{4} + t^2 - \frac{t^4}{3}\right)\frac{1}{s}\right\} + \frac{\varepsilon}{s^2\sqrt{\frac{s}{2}}},$$

où t est l'écart réduit $l\sqrt{\frac{2}{s}}$ et ε un nombre inférieur à 0,1 en valeur absolue, et que

$$(2) \qquad P^l_{-l} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt + T_l + \frac{e^{-t^2}}{3\sqrt{\pi}}\left(-\frac{7}{2}t + t^3\right)\frac{1}{s} + \frac{\lambda t}{s^2},$$

où $|\lambda| < 0{,}75$.

On a le droit d'appliquer ces formules chaque fois que les variables s et t vérifient les inégalités

$$(3) \qquad \begin{aligned} 32 \leq s < 50\,, \quad & t \leq 3 \\ s \geq 50\,, \quad & t \leq 4. \end{aligned}$$

Je rappelle que dans la pratique l'écart $t = 2{,}5$ est rarement dépassé.

Le problème analogue relatif au cas général des épreuves répétées

[1]) Comptes rendus, 182, 1926, p. 1119.

vérifiant les conditions de Jacques Bernoulli a été résolu d'une manière intéressante par M. R. Dovaz dans sa thèse « Les épreuves répétées et les formules de Laplace ».[2]

J'ai pensé qu'il y avait encore quelque intérêt à démontrer rigoureusement ce que en 1926 je me suis borné à énoncer.

Dans le premier chapitre de cette étude je vais établir la formule (1) et dans le second la formule (2) que j'appliquerai à l'étude des formules de Laplace et de J. Eggenberger.

Chapitre I. Etude de T_l

1. Indication de la méthode

On sait, et nous allons du reste le retrouver tout à l'heure, que T_l peut être mis sous la forme

$$T_l = \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{-t^2 + \frac{X}{s}},$$

où X est une fonction de t et de s qui pour $\frac{1}{s} = 0$ se réduit à $-\frac{1}{4} + t^2 - \frac{t^4}{3}$: Comme d'autre part

$$e^{\frac{X}{s}} = 1 + \frac{X}{s} + \frac{X^2}{2s^2} e^{\frac{\theta X}{s}},$$

θ étant un nombre positif < 1, il vient

$$(4)\quad T_l = \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{-t^2} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{4} + t^2 - \frac{t^4}{3} \right) \frac{1}{s} + \chi(t, s) \frac{1}{s^2} + \frac{X^2}{2s^2} e^{\frac{\theta X}{s}} \right\}$$

en posant

$$X = -\frac{1}{4} + t^2 - \frac{t^4}{3} + \chi(t, s) \frac{1}{s}.$$

[2] Imprimerie A. Kündig, Genève, 1928.

Cette formule fournit l'expression de Laplace si l'on remplace l'accolade par sa valeur asymptotique 1. Et l'on en déduit l'expression approchée (1) indiquée dans ma Note des C. R. en conservant aussi, dans l'accolade, le terme en $\frac{1}{s}$.

Pour calculer l'erreur correspondante, on voit qu'il suffit d'évaluer les limites supérieures de X, de $|X|$ et de $|\chi(t, s)|$. Nous serons conduits à poser $X = f + \varphi$, f et φ étant deux fonctions de t et s que je définirai dans le n° 2. Je montrerai que dans le domaine (3), les fonctions f, φ, χ vérifient les inégalités

$$(5) \qquad f + \varphi < 0{,}547, \quad |f + \varphi| < 0{,}36\, e^{\frac{t^2}{2}}, \quad |\chi| < \frac{1}{9} e^{t^2}.$$

2. Les fonctions $f(t, s)$ et $\varphi(t, s)$

Rappelons que T_l a pour expression

$$T_l = \frac{s!}{\left(\frac{s}{2} + l\right)!\left(\frac{s}{2} - l\right)!} \, \frac{1}{2^s},$$

que la formule de Stirling permet de mettre sous la forme

$$(6) \qquad T_l = \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{L_1 + L_2 + \frac{\varphi}{s}},$$

en posant

$$L_1 = -\left(\frac{1}{2} + l + \frac{s}{2}\right) \log\left(1 + \frac{2l}{s}\right) = -\left(\frac{1}{2} + t\sqrt{\frac{s}{2}} + \frac{s}{2}\right) \log\left(1 + t\sqrt{\frac{2}{s}}\right)$$

$$(7) \quad L_2 = -\left(\frac{1}{2} - l + \frac{s}{2}\right) \log\left(1 - \frac{2l}{s}\right) = -\left(\frac{1}{2} - t\sqrt{\frac{s}{2}} + \frac{s}{2}\right) \log\left(1 - t\sqrt{\frac{2}{s}}\right)$$

$$\frac{\varphi}{s} = u(s) - u\left(\frac{s}{2} + l\right) - u\left(\frac{s}{2} - l\right),$$

où $u(s)$ désigne une fonction de la forme $\frac{1}{12 s} - \frac{\vartheta(s)}{360 s^3}$, $\vartheta(s)$ étant un nombre positif inférieur à 1.

Je commencerai par transformer la somme $L_1 + L_2$. Partons des identités

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^k \int_0^x \frac{x^k}{1+x}\,dx$$

$$\log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^k}{k} - \int_0^x \frac{x^k}{1-x}\,dx$$

qui pour $k = 0$ s'écrivent

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}, \quad \log(1-x) = -\int_0^x \frac{dx}{1-x}.$$

En faisant $k = 0, 1, 2$, on en tire trois expressions pour $\log\left(1 + t\sqrt{\frac{2}{s}}\right)$ qu'on ajoutera après les avoir multipliées respectivement par $-\frac{1}{2}$, $-t\sqrt{\frac{s}{2}}$ et $-\frac{s}{2}$ et trois expressions pour $\log\left(1 - t\sqrt{\frac{2}{s}}\right)$ qu'on ajoutera après les avoir multipliées respectivement par $-\frac{1}{2}$, $t\sqrt{\frac{s}{2}}$, $-\frac{s}{2}$. Il viendra

$$L_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{s}}\int_0^t \frac{dz}{1+\sqrt{\frac{2}{s}}\,z} - t\sqrt{\frac{s}{2}}\left(t\sqrt{\frac{2}{s}} - \frac{2}{s}\int_0^t \frac{z\,dz}{1+\sqrt{\frac{2}{s}}\,z}\right)$$
$$-\frac{s}{2}\left(t\sqrt{\frac{2}{s}} - \frac{t^2}{s} + \frac{2}{s}\sqrt{\frac{2}{s}}\int_0^t \frac{z^2\,dz}{1+\sqrt{\frac{2}{s}}\,z}\right)$$

$$L_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{s}}\int_0^t \frac{dz}{1-\sqrt{\frac{2}{s}}\,z} + t\sqrt{\frac{s}{2}}\left(-t\sqrt{\frac{2}{s}} - \frac{2}{s}\int_0^t \frac{z\,dz}{1-\sqrt{\frac{2}{s}}\,z}\right)$$
$$-\frac{s}{2}\left(-t\sqrt{\frac{2}{s}} - \frac{t^2}{s} - \frac{2}{s}\sqrt{\frac{2}{s}}\int_0^t \frac{z^2\,dz}{1-\sqrt{\frac{2}{s}}\,z}\right)$$

et par suite

$$L_1 + L_2 = -t^2 + \frac{2}{s}\int_0^t \frac{z - 2tz^2 + 2z^3}{1 - \frac{2z^2}{s}}\,dz\,.$$

La formule (6) s'écrit par conséquent

$$T_l = \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\,e^{-t^2 + (f+\varphi)\frac{1}{s}}$$

en posant

$$f = 2\int_0^t \frac{z - 2tz^2 + 2z^3}{1 - \frac{2z^2}{s}}\,dz\,. \tag{8}$$

En effectuant l'intégration, on trouve l'expression suivante pour f qui nous sera utile

$$f = s\left\{t^2 - \frac{s+1}{2}\log\left(1 - \frac{2}{s}t^2\right) - t\sqrt{\frac{s}{2}}\log\frac{1 + \sqrt{\frac{2}{s}}\,t}{1 - \sqrt{\frac{2}{s}}\,t}\right\}. \tag{9}$$

On en tire immédiatement

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= 2s\left\{t + \frac{t}{s - 2t^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{2}}\log\frac{1 + \sqrt{\frac{2}{s}}\,t}{1 - \sqrt{\frac{2}{s}}\,t}\right\} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= 2\,\frac{1 - 2t^2 + \frac{2t^2}{s}(1 + 2t^2)}{\left(1 - \frac{2t^2}{s}\right)^2}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Cette expression de la dérivée seconde de f permet d'établir une propriété curieuse des courbes $y = f(t, s)$ (s constant). En posant $2t^2 = u$ et en désignant par u' et u'' ($u' < u''$) les zéros de $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, c'est-à-dire les racines de l'équation $u^2 - (s-1)u + s = 0$, on vérifie sans peine que u' et par conséquent $t' = \sqrt{\frac{u'}{2}}$ est une fonction décroissante du paramètre s, tandis que $t'' = \sqrt{\frac{u''}{2}}$ est une fonction croissante de s et comme pour $s = 32$ on a $t' < 0{,}74$, $t'' > 3$ et que pour $s = 50$, $t'' > 4$, il en résulte qu'à l'intérieur du domaine (3) et pour $t \geq 0{,}74$ les courbes $y = f(t, s)$ tournent leur concavité vers les y négatifs.

3. Développement de $\frac{f}{s}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{s}$

Pour obtenir ce développement il suffit de développer $\dfrac{1}{1 - \dfrac{2z^2}{s}}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{2z^2}{s}$ et intégrer. On trouve

$$\frac{f}{s} = \sum_{i=1}^{k} c_i \frac{1}{s^i} + r_k \, , \tag{11}$$

où

$$c_i = 2^i \, t^{2i} \left(\frac{1}{2i} - \frac{t^2}{(2i+1)(i+1)} \right),$$

$$r_k = \frac{2^{k+1}}{s^{k+1}} \int_0^t \frac{z^{2k+1} - 2t z^{2k+2} + 2 z^{2k+3}}{1 - \dfrac{2z^2}{s}} dz \, .$$

En désignant par t_i le zéro positif de c_i, on voit que c_i est positif pour $t < t_i$ et négatif pour $t > t_i$ et comme la suite t_i ($i = 1, 2, \ldots$) est croissante, il en résulte que pour $t \leq t_i$, les coefficients c_{i+1}, c_{i+2}, ... sont tous positifs.

4. Majorante et minorante pour φ.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, les variables t et s seront supposées, dans cette étude, vérifier les inégalités (3). Nous dirons qu'elles appartiennent au domaine D. La variable t est, pour $32 \leq s < 50$, intérieure à l'intervalle $(-3, 3)$ que j'appellerai l'intervalle I et, pour $s \geq 50$ intérieure à l'intervalle $(-4, 4)$ que j'appellerai l'intervalle II. De plus T_l étant une fonction paire de t, nous pouvons nous borner à l'étude de T_l pour t positif ou nul. Proposons-nous maintenant de trouver une majorante et une minorante pour f et φ dans le domaine D.

J'entendrai par majorante d'une fonction $g(t, s)$ des variables t et s toute fonction $G(t)$ de t telle que $G(t) \geq g(t, s)$ à l'intérieur de D. Définition analogue pour les minorantes.

Commençons par la fonction φ.

a) *Majorante pour* φ.

Je dis qu'à l'intérieur de D la fonction φ vérifie les inégalités suivantes

$$(\alpha) \qquad \varphi < -\frac{1}{4} \qquad \text{pour } t \geq 0{,}1$$

$$(\beta) \qquad \varphi < -\frac{1}{4} + 0{,}00005 \quad \text{pour } t < 0{,}1 \,.$$

Démonstration. En vertu de (7)

$$(12) \qquad \begin{aligned} \frac{\varphi}{s} = \frac{1}{12s} - \frac{\vartheta}{360 s^3} - \frac{2}{12 s \left(1 + t\sqrt{\frac{2}{s}}\right)} + \frac{8\vartheta_1}{360 s^3 \left(1 + t\sqrt{\frac{2}{s}}\right)^3} \\ - \frac{2}{12 s \left(1 - t\sqrt{\frac{2}{s}}\right)} + \frac{8\vartheta_2}{360 s^3 \left(1 - t\sqrt{\frac{2}{s}}\right)^3} \end{aligned}$$

ϑ, ϑ_1, ϑ_2 étant trois nombres positifs inférieurs à 1. Du reste la considération du terme en $\frac{1}{s^5}$ de $u(s)$ et des termes correspondants de $u\left(\frac{s}{2} + l\right)$, $u\left(\frac{s}{2} - l\right)$ permet de resserrer les limites entre lesquelles sont compris les nombres ϑ, ϑ_1, ϑ_2. Ils vérifient, en effet, les inégalités suivantes

$$(13) \qquad \begin{gathered} 1 - \frac{2}{7s^2} < \vartheta < 1 \\ 1 - \frac{8}{7s^2\left(1 + t\sqrt{\frac{2}{s}}\right)^2} < \vartheta_1 < 1 \\ 1 - \frac{8}{7s^2\left(1 - t\sqrt{\frac{2}{s}}\right)^2} < \vartheta_2 < 1. \end{gathered}$$

On tire de (12)

$$\varphi = -\frac{1}{4} - \varphi_1 + \varphi_2,$$

en posant

$$\varphi_1 = \frac{2\,t^2}{3\,s\left(1 - \frac{2\,t^2}{s}\right)},\quad \varphi_2 = -\frac{\vartheta}{360\,s^2} + \frac{\vartheta_1}{45\,s^2\left(1 + t\sqrt{\frac{2}{s}}\right)^3} + \frac{\vartheta_2}{45\,s^2\left(1 - t\sqrt{\frac{2}{s}}\right)^3}\,.$$

Il suffit donc de montrer que

$$-\varphi_1 + \varphi_2 < 0 \qquad \text{pour } t \geq 0{,}1 \text{ et que}$$

$$-\varphi_1 + \varphi_2 < 0{,}00005 \qquad \text{pour } t < 0{,}1\,.$$

Or

$$\varphi_2 < \frac{1}{45\,s^2}\left\{\frac{1}{\left(1 + t\sqrt{\frac{2}{s}}\right)^3} + \frac{1}{\left(1 - t\sqrt{\frac{2}{s}}\right)^3}\right\} = \frac{2 + \frac{12\,t^2}{s}}{45\,s^2\left(1 - \frac{2\,t^2}{s}\right)^3}\,.$$

Donc

$$-\varphi_1 + \varphi_2 < \frac{2}{3\,s\left(1 - \frac{2\,t^2}{s}\right)}\left\{-t^2 + \frac{1 + \frac{6\,t^2}{s}}{15\,s\left(1 - \frac{2\,t^2}{s}\right)^2}\right\}$$

et comme $\dfrac{1 + \frac{6\,t^2}{s}}{15\,s\left(1 - \frac{2\,t^2}{s}\right)^2}$ est une fonction décroissante de s, pour établir (α) il suffit de montrer que

$$-t^2 + \frac{s + 6\,t^2}{15\,(s - 2\,t^2)^2} < 0$$

dans I pour $s = 32$ et dans II pour $s = 50$, si $t \geq 0{,}1$, ce qui revient à montrer, en posant $\tau = t^2$, que

$$-\tau\,(s - 2\,\tau)^2 + \frac{2}{5}\,\tau + \frac{s}{15} < 0$$

dans ces intervalles pour $s = 32$, $s = 50$ et $\tau \geq 0{,}01$. La vérification ne présente aucune difficulté.

Pour établir (β) il suffit de faire remarquer que

$$-\varphi_1 + \varphi_2 < \varphi_2 < \frac{2}{45} \frac{s + 6t^2}{(s - 2t^2)^3}$$

et que

$$\frac{2}{45} \frac{s + 6t^2}{(s - 2t^2)^3} < 0{,}00005$$

pour $s = 32$ et $t = 0{,}1$.

Les inégalités (α) et (β) peuvent donc être considérées comme établies. Il en résulte qu'on peut prendre pour fonction majorante de φ dans D

$$y = -\frac{1}{4} + 0{,}00005 \quad \text{pour } t < 0{,}1$$

$$y = -\frac{1}{4} \qquad \text{pour } t \geq 0{,}1.$$

b) *Minorante pour φ.*

Je commencerai par faire remarquer que la fonction φ_2 est positive dans D. En effet, en vertu des inégalités (13), nous pouvons écrire

$$45\, s^2 \varphi_2 > -\frac{1}{8} + A - B$$

en posant

$$A = \frac{2 + \frac{12\, t^2}{s}}{\left(1 - \frac{2\, t^2}{s}\right)^3}, \quad B = \frac{8}{7\, s^2} \frac{2 + 20 \frac{2\, t^2}{s} + 10 \left(\frac{2\, t^2}{s}\right)^2}{\left(1 - \frac{2\, t^2}{s}\right)^5}.$$

Or $A > 2$; d'autre part B est une fonction croissante de t et décroissante de s et comme pour $t = 3$ et $s = 32$, $B < 1{,}15$ et que pour $t = 4$ et $s = 50$, $B < 1{,}43$, il en résulte que φ_2 est positive dans D.

Nous pouvons donc écrire

$$\varphi > -\frac{1}{4} - \varphi_1$$

dans D.

Or φ_1 étant une fonction décroissante de s, on a toujours $\varphi_1 \leq \varphi_1 (t, 32)$ pour $s \geq 32$, et $\varphi_1 \leq \varphi_1 (t, 50)$ pour $s \geq 50$.

Nous pouvons donc prendre pour minorante de φ dans D

$$y = -\frac{1}{4} - \varphi_1(t, 32), \quad \text{si } 32 \leq s < 50$$

et

$$y = -\frac{1}{4} - \varphi_1(t, 50), \quad \text{si } s \geq 50.$$

5. Majorante et minorante pour f

A chaque valeur de s correspond une courbe $y = f(t, s)$. Nous verrons que dans l'intervalle $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{15}}{2}$, que j'appellerai l'intervalle α, y est une fonction décroissante de s. Par conséquent dans la partie correspondante du domaine D on peut prendre pour majorante de f la fonction $y = f(t, 32)$ et pour minorante $y = f(t, \infty)$. Nous montrerons aussi qu'à l'intérieur de D et dans l'intervalle $2{,}156 \leq t \leq 4$, que j'appellerai l'intervalle γ, y est une fonction croissante de s. On pourra donc prendre pour majorante de f dans γ la fonction $y = f(t, \infty)$ et pour minorante $y = f(t, 32)$, si $t < 3$, et $y = f(t, 50)$, si $t \geq 3$. Nous envisagerons à part l'intervalle intermédiaire $\frac{\sqrt{15}}{2} < t < 2{,}156$, que j'appellerai l'intervalle β.

Montrons d'abord que f est une fonction décroissante de s dans α. On tire, en effet, de (11)

$$f = 2t^2\left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{6}\right) + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{c_i}{s^{i-1}}.$$

Or c_2 s'annule pour $t^2 = \frac{15}{4}$; donc, en vertu d'une propriété des c_i établie dans le n° 2, tous les c_i sont positifs pour $i > 2$ et $t \leq \frac{\sqrt{15}}{2}$, la série $\Sigma \frac{c_i}{s^{i-1}}$ définit par conséquent une fonction décroissante de s dans α.

Montrons maintenant que f est une fonction croissante de s dans γ. Il suffit pour cela de montrer que la dérivée $\frac{\partial f}{\partial s}$ est positive à l'intérieur de D pour $t > 2{,}156$. Or en dérivant la formule (8) par rapport à s, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -\frac{4}{s^2}\int_0^t \frac{z^3 - 2tz^4 + 2z^5}{\left(1 - \frac{2z^2}{s}\right)^2}\, dz$$

et en intégrant par parties

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -\frac{t^2}{s - 2t^2} + \frac{2}{s}\int_0^t \frac{z - 3tz^2 + 4z^3}{1 - \frac{2z^2}{s}}\, dz$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{2t^4}{s}\left\{ -\frac{1}{1 - \frac{2t^2}{s}} + 2\left(\frac{1}{4} + \frac{t^2}{15}\right) + \cdots \right\}.$$

Tous les termes de ce développement sont positifs, sauf le premier. Par conséquent $\frac{\partial f}{\partial s}$ est > 0 dans un intervalle, si la somme d'un certain nombre de premiers termes est positive dans cet intervalle. Mais on vérifie facilement que la somme des trois premiers termes est positive dans D pour $t > 2{,}156$, c'est-à-dire dans γ.

Occupons-nous maintenant de l'intervalle intermédiaire β compris entre $t = \frac{\sqrt{15}}{2} = 1{,}936$ et $t = 2{,}156$. Dans cet intervalle les courbes $y = f(t, s)$ se croisent. Aucune ne peut être prise pour majorante ou pour minorante.

Mais nous avons vu dans le n° 2 que pour $t \geq 0{,}74$ les courbes $y = f(t, s)$ tournent leur concavité vers les y négatifs. Comme première approximation on pourra donc prendre pour minorante dans β la droite joignant le point P_1 d'abscisse $t_1 = \frac{\sqrt{15}}{2}$ et d'ordonnée $y_1 = f(t_1, \infty)$ au point P_2 d'abscisse $t_2 = 2{,}156$ et d'ordonnée $y_2 = f(t_2, 32)$. On pourrait du reste, s'il le faut, intercaler entre t_1 et t_2 des points intermédiaires t', t'' ... et calculer les limites inférieures correspondantes de f à l'aide d'un procédé que j'indiquerai dans le paragraphe 9. Au lieu d'une ligne droite on aurait alors une ligne polygonale. Quant à la majorante on pourrait prendre la droite parallèle à l'axe des t passant par le point $(t_1, f(t_1, 32))$. Nous n'en aurons du reste pas besoin dans cette étude.

6. Majorante et minorante pour $f+\varphi$

On les obtient en ajoutant les expressions que nous avons indiquées dans les nos précédents.

Dans l'intervalle α une majorante pour $f+\varphi$ est donc fournie par la fonction

$$y=f(t,32)-\frac{1}{4}+0{,}00005\,, \quad \text{si } 0\leq t<0{,}1$$

et par

$$y=f(t,32)-\frac{1}{4}\,, \qquad \text{si } t\geq 0{,}1$$

et une minorante par la fonction

$$y=f(t,\infty)-\frac{1}{4}-\varphi_1(t,32)\,,$$

où

$$\varphi_1=\frac{2\,t^2}{3\,s\left(1-\frac{2\,t^2}{s}\right)}\,.$$

Dans l'intervalle β on peut prendre pour majorante de $f+\varphi$ la constante

$$y=f\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\,,\,32\right)-\frac{1}{4}$$

et pour minorante soit

$$y=Y-\frac{1}{4}-\varphi_1(t,32)\,,$$

$y=Y$ étant l'équation de la droite $P_1\,P_2$, soit, s'il le faut, l'une des fonctions analogues qu'on obtient en fractionnant l'intervalle β.

Enfin dans l'intervalle γ une majorante est fournie par la fonction

$$y=f(t,\infty)-\frac{1}{4}$$

et une minorante par

$$y = f(t, 32) - \frac{1}{4} - \varphi_1(t, 32) \quad \text{pour } t \leq 3$$

et par

$$y = f(t, 50) - \frac{1}{4} - \varphi_1(t, 50) \quad \text{pour } t > 3.$$

7. Inégalité $f + \varphi < 0{,}547$

Cherchons le maximum de la majorante de $f + \varphi$. Cette majorante ne dépendant pas de φ, notre problème se ramène à la recherche du maximum de f. Or à l'intérieur de D la dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}$ est positive pour $t^2 < \frac{3}{2}$ et négative pour $t^2 > 2$ (je suppose t positif).

En effet, en vertu de la formule (8)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{2t}{1 - \frac{2t^2}{s}} - 4\int_0^t \frac{z^2}{1 - \frac{2z^2}{s}} dz > \frac{2t}{1 - \frac{2t^2}{s}} - \frac{4}{1 - \frac{2t^2}{s}} \int_0^t z^2 \, dz$$

$$= \frac{2t}{1 - \frac{2t^2}{s}} \left(1 - \frac{2t^2}{3}\right) > 0$$

pour $t^2 < \frac{3}{2}$.

Mais la dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}$ est négative pour $t^2 > 2$. Nous avons vu, en effet, qu'à l'intérieur de D la dérivée seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ est négative pour $t > 0{,}74$. Donc $\frac{\partial f}{\partial t}$ est négative pour $t^2 > 2$, si elle est négative pour $t^2 = 2$.

Mais

$$\frac{\partial f}{\partial t} < \frac{2t}{1 - \frac{2t^2}{s}} - 4\int_0^t z^2 \, dz = 2t \left\{ \frac{1}{1 - \frac{2t^2}{s}} - \frac{2t^2}{3} \right\}$$

et l'accolade est < 0 pour $t^2 = 2$ et $s > 16$.

Il en résulte que chacune des fonctions $f(t, s)$ admet un maximum et un seul entre $t = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $t = \sqrt{2}$. Et comme dans cet intervalle la majorante de $f + \varphi$ est $f(t, 32) - \frac{1}{4}$, nous sommes conduits à calculer le maximum de $f(t, 32)$. Or pour un t donné les valeurs de f et de $\frac{\partial f}{\partial t}$ peuvent être calculées à l'aide des formules (9) et (10).

On trouve

$$f(t, 32) - \frac{1}{4} = 0{,}5468 \qquad \text{pour } t = \frac{5}{4}$$

$$f(t, 32) - \frac{1}{4} = 0{,}5413 \qquad \text{pour } t = 1{,}3 .$$

D'autre part

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0{,}00228 \qquad \text{pour } t = \frac{5}{4}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial t} < 0 \qquad \text{pour } t = 1{,}3 .$$

Il en résulte que le maximum cherché est inférieur à $0{,}5468 + 0{,}05 \,.\, 0{,}00228 < 0{,}547$.

On a donc bien

$$f + \varphi < 0{,}547. \tag{5}$$

La première des formules (5) du paragraphe 1 est ainsi établie.

8. Inégalité $|f + \varphi| < 0{,}36\, e^{\frac{t^2}{2}}$

Il est évident qu'à partir d'un α suffisamment grand la valeur absolue de $f + \varphi$ vérifie dans D l'inégalité

$$|f + \varphi| < \alpha\, e^{\frac{t^2}{2}} . \tag{14}$$

Quelle est la borne inférieure des α ?

Il ne sera pas nécessaire de calculer cette borne avec une grande exactitude. Nous montrerons qu'elle diffère peu de 0,36 et que

$$|f + \varphi| < 0{,}36\, e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Pour le voir il suffit de construire une majorante pour $|f + \varphi|$ à partir des inégalités du n° 6. Envisageons les valeurs absolues des minorantes et majorantes de $f + \varphi$. On aura deux courbes. A chaque valeur de t faisons correspondre la plus grande des deux ordonnées, on obtiendra ainsi une courbe nouvelle

$$y = M(t)$$

qui dans D est évidemment une majorante pour $y = |f + \varphi|$.

Au lieu de l'inégalité (14) il suffira donc d'envisager la suivante

$$M(t) < \alpha\, e^{\frac{t^2}{2}}. \tag{15}$$

Or il résulte immédiatement des expressions données dans le n° 6 qu'entre $t = 0$ et une valeur τ_1 de t voisine de 0,52, $M(t) = \frac{1}{4} + \varphi_1(t, 32) - f(t, \infty)$. Dans cet intervalle $M(t)$ est une fonction décroissante de t. Entre τ_1 et une valeur τ_2 de t voisine de 1,65, la fonction $M(t)$ est égale à $f(t, 32) - \frac{1}{4}$.

Dans ce second intervalle (τ_1, τ_2), $M(t)$ commence par croître, elle atteint son maximum, légèrement inférieur à 0,547, entre $t = 1{,}25$ et $t = 1{,}3$, elle décroit ensuite. Enfin pour $t > \tau_2$, la fonction $M(t)$ coïncide avec la minorante de $f + \varphi$ changée de signe, elle croît rapidement et pour $t = 2$, p. ex., est légèrement inférieure à 1,73.

Montrons d'abord que le facteur α dans (15) est supérieur à 0,35.

En effet, pour $t = 2{,}5$

$$0{,}35\, e^{\frac{t^2}{2}} = 7{,}965.$$

Or de $t = 2{,}156$ à $t = 3$, la majorante $M(t)$ a pour expression

$$-f(t, 32) + \frac{1}{4} + \frac{t^2}{3(16 - t^2)}.$$

En calculant $f(t, 32)$ à l'aide de la formule (9), on obtient $M(2, 5) = 8{,}1618$, valeur supérieure à $7{,}965$.

Le facteur α est donc certainement supérieur à $0{,}35$.

Je dis maintenant qu'on peut prendre $\alpha = 0{,}36$. Montrons d'abord que (15) est vérifiée pour $t \leq \tau_2$.

En effet $M(0) = 0{,}25 < 0{,}36$. D'autre part pour $t = 1$, $0{,}36\, e^{\frac{t^2}{2}}$ est déjà supérieur au maximum de $M(t)$ dans $(0, \tau_2)$ et la considération de la tangente à la courbe $y = 0{,}36\, e^{\frac{t^2}{2}}$ en $t = 1$ montre que l'inégalité (15) a lieu dans tout cet intervalle.

Pour montrer que (15) est vérifiée dans l'intervalle $(\tau_2, 2)$ il suffit de calculer les valeurs du second membre de (15) et de sa dérivée pour $t = 2$. On trouve

$$y = 0{,}36\, e^2 = 2{,}66\,; \quad \frac{dy}{dt} = 2y = 5{,}32.$$

Or un calcul simple, que je crois inutile d'indiquer, fournit l'inégalité $M(2) < 1{,}728$, et l'on voit alors que la partie de la courbe $y = M(t)$ relative à l'intervalle $(\tau_2, 2)$ est située au-dessous de la tangente dont nous venons de calculer le coefficient angulaire.

Dans l'intervalle (2, 3) les courbes $y = M(t)$ et $y = 0{,}36\, e^{\frac{t^2}{2}}$ se rapprochent, surtout dans le voisinage de $t = 2{,}5$. J'ai dû calculer les ordonnées des deux courbes pour $t = 2{,}4\,;\ 2{,}45\,;\ 2{,}5\,;\ 2{,}55$ et $2{,}6$ et ce n'est que par la considération des tangentes que j'ai pu établir l'inégalité (15) dans cet intervalle. Je crois inutile de donner ici les résultats de mes calculs.

Quant à l'intervalle (3, 4), la majorante $M(t)$ a ici pour expression

$$-f(t, 50) + \frac{1}{4} + \frac{t^2}{3\,(50 - t^2)}.$$

On trouve à l'aide de la formule (9)

$$M(3) = 21{,}\,14, \quad M(4) = 95{,}\,47.$$

Or pour $t = 3$

$$0{,}36\, e^{\frac{t^2}{2}} = 32{,}406$$

et la tangente à $y = 0{,}36\, e^{\frac{t^2}{2}}$ en $t = 3$ a pour coefficient angulaire 97,218; la courbe $y = M(t)$ étant située au-dessous de cette tangente, on voit que l'inégalité (15) est encore vérifiée dans l'intervalle (3, 4).

On a donc bien

$$|f + \varphi| < 0{,}36\, e^{\frac{t^2}{2}}$$

dans le domaine D.

La seconde des inégalités (5) est établie. Cherchons maintenant à établir la troisième.

9. Etude de $\chi(t, s)$

Nous avons posé (cf. le n° 1)

$$f + \varphi = -\frac{1}{4} + t^2 - \frac{t^4}{3} + \chi(t, s)\, \frac{1}{s}.$$

La fonction $\chi(t, s)$ a donc pour expression

$$\chi(t, s) = f_1(t, s) - s\varphi_1 + s\varphi_2,$$

où

$$(16) \qquad f_1(t, s) = 4\int_0^t \frac{z^3 - 2tz^4 + 2z^5}{1 - \frac{2z^2}{s}}\, dz = s\left\{ f(t, s) - f(t, \infty) \right\},$$

en particulier

$$f_1(t, \infty) = t^4 - \frac{4}{15} t^6.$$

Cette fonction f_1 jouera un rôle important dans l'étude de $\chi(t, s)$. En la développant suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{s}$, on trouve

$$(17) \qquad \frac{1}{4} f_1(t, s) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{15} + t^6\left(\frac{1}{3} - \frac{t^2}{14}\right)\frac{1}{s} + \dots.$$

D'autre part ses dérivées $\frac{\partial f_1}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}$ ont pour expressions

$$\frac{1}{4}\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{t^3}{1-\frac{2t^2}{s}} - 2\int_0^t \frac{z^4}{1-\frac{2z^2}{s}}\,dz$$

(18) $$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{3t^2 - \frac{2t^4}{s} - 2t^4 + \frac{4t^6}{s}}{\left(1-\frac{2t^2}{s}\right)^2}.$$

Dans l'étude de la fonction $\chi(t, s)$ nous serons encore conduits à décomposer l'intervalle total (0,4) en intervalles partiels:

Intervalle $0 \leq t \leq \sqrt{\frac{14}{3}}$. Dans cet intervalle $f_1(t, s)$ est une fonction décroissante de s. En effet, pour $t^2 \leq \frac{14}{3}$, le second terme de (17) et par conséquent tous ceux qui suivent sont positifs.

Il en résulte que pour $t \leq \sqrt{\frac{14}{3}} = 2{,}16$, $f_1(t, 32)$ est une majorante et $f_1(t, \infty)$ une minorante de $f_1(t, s)$.

D'autre part la fonction $-s\varphi_1$ vérifie dans notre domaine l'inégalité

$$-\frac{2}{3}\frac{t^2}{1-\frac{t^2}{16}} < -s\varphi_1 < -\frac{2}{3}t^2$$

et quant à $s\varphi_2$, nous avons déjà vu (n° 4) que cette fonction est toujours positive dans D.

On peut montrer de plus que dans l'intervalle $0 \leq t \leq \sqrt{\frac{14}{3}}$, $s\varphi_2$ vérifie l'inégalité

(19) $$s\varphi_2 < 0{,}00733.$$

En effet (n° 4)

$$s\varphi_2 < \frac{2}{45}\frac{1+\frac{6t^2}{s}}{s\left(1-\frac{2t^2}{s}\right)^3} \leq \frac{2}{45}\frac{1+\frac{6t^2}{32}}{32\left(1-\frac{2t^2}{32}\right)^3}.$$

Mais le second membre de la dernière inégalité est une fonction croissante de t^2 qui pour $t^2 = \frac{14}{3}$ est inférieure à 0,00733. A fortiori $s\varphi_2$ vérifie l'inégalité (19).

Du reste $s\varphi_2$ est même inférieur à 0,00577 pour $t \leq 2$.

Il en résulte que dans l'intervalle $\left(0, \sqrt{\frac{14}{3}}\right)$, $\chi(t, s)$ vérifie les inégalités suivantes:

$$\chi(t, s) < f_1(t, 32) - \frac{2}{3} t^2 + 0{,}00733$$

$$\chi(t, s) > f_1(t, \infty) - \frac{2}{3} \frac{t^2}{1 - \frac{t^2}{16}}.$$

Dans la première de ces inégalités on peut remplacer 0,00733 par 0,00577 pour $t \leq 2$.

Intervalle $\sqrt{\frac{14}{3}} < t \leq 3$. Lorsque $t > \sqrt{\frac{14}{3}}$, la fonction $f_1(t, s)$ n'est plus une fonction décroissante de s pour s suffisamment grand. La méthode précédente ne s'applique plus. Mais le problème qui nous occupe peut être abordé par un côté différent.

Envisageons les dérivées $\frac{\partial f_1}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}$. Si t_1^2, t_2^2 $(t_1 < t_2)$ sont les zéros non nuls du numérateur de $\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}$ (form. 18), ce numérateur et par conséquent $\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}$ est négatif dans l'intervalle (t_1, t_2).

Or t_1^2 est une fonction décroissante de s, tandis que t_2^2 croît avec s et comme pour $s = 32$ on a $t_1 < 1{,}27$ et $t_2 > 3{,}8$, la dérivée $\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}$ est négative dans l'intervalle $\left(\sqrt{\frac{14}{3}}, 3\right)$.

D'autre part on voit facilement que $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ est négative pour $t = 2$, donc f_1 est une fonction décroissante dans notre intervalle et les courbes $y = f_1(t, s)$ tournent leur concavité vers les y négatifs.

Envisageons maintenant une suite croissante quelconque $t' = \sqrt{\frac{14}{3}}$, t'', ... $t^{(n)} = 3$ de valeurs de t comprises dans l'intervalle $\left(\sqrt{\frac{14}{3}}, 3\right)$. Calculons des limites inférieures des $f_1(t, s)$ en t', t'', ... $t^{(n)}$ et soient P', P'', ... $P^{(n)}$ les points dont les abscisses sont t', t'', ... $t^{(n)}$ et les ordonnées les valeurs correspondantes des limites calculées. On pourra prendre pour minorante de $f_1(t, s)$ la ligne polygonale $P' P'' \ldots P^{(n)}$. Soit $y = Y(t)$ l'équation de cette ligne. Comme $s\varphi_2$ est > 0, la fonction $\chi(t, s)$ vérifie l'inégalité suivante

$$\chi(t, s) > Y(t) - \frac{2}{3} \frac{t^2}{1 - \frac{t^2}{16}}.$$

On pourra donc prendre pour minorante de $\chi(t, s)$ la fonction

$$y = Y(t) - \frac{2}{3} \frac{t^2}{1 - \frac{t^2}{16}}.$$

Voici maintenant comment on pourrait calculer une limite inférieure de $f_1(t, s)$ pour une valeur quelconque t comprise dans notre intervalle. Envisageons la série (17). En vertu des propriétés des coefficients établies dans le n° 3, si l'un de ces coefficients est positif pour une valeur de t, les coefficients des termes qui suivent le sont également. Or le coefficient de $\frac{1}{s^i}$ est positif pour $t^2 < \frac{(2i+5)(i+3)}{2(i+2)}$. Par conséquent pour tout t vérifiant cette inégalité, une limite inférieure de $\frac{1}{4} f_1(t, s)$ est fournie par la somme des i premiers termes de (17). Par exemple le coefficient de $\frac{1}{s^2}$ est positif pour $t^2 < \frac{45}{8}$; donc pour $t \leq \frac{\sqrt{90}}{4} = 2{,}37$ une limite inférieure de $\frac{1}{4} f_1(t, s)$ est donnée par la somme des deux premiers termes de (17). C'est à ce procédé de calcul que j'ai fait allusion à la fin du n° 5.

Nous n'aurons pas besoin d'envisager des majorantes pour $\chi(t, s)$ dans notre intervalle.

Intervalle (3, 4). Dans cet intervalle s est par hypothèse ≥ 50. Le numérateur de $\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}$ est négatif pour $t < 4{,}8$. Les mêmes raisonnements s'appliquent et par conséquent $\chi(t, s)$ vérifie dans l'intervalle (3, 4) l'inégalité

$$\chi(t, s) > Y(t) - \frac{2}{3} \frac{t^2}{1 - \frac{t^2}{25}},$$

en désignant encore par $Y(t)$ la minorante de $f_1(t, s)$ représentée par une ligne polygonale construite comme tout à l'heure.

10. Inégalité $|\chi(t, s)| < \frac{1}{9} e^{t^2}$

Nous aurons à résoudre un problème analogue à celui dont nous nous sommes occupés dans le n° 8. Demandons-nous à partir de quelle valeur de β la fonction $\chi(t, s)$ vérifie dans D l'inégalité

$$|\chi(t, s)| < \beta e^{t^2}.$$

Je montrerai que la borne inférieure de β n'est pas supérieure à $\frac{1}{9}$ et que par conséquent

$$|\chi(t, s)| < \frac{1}{9} e^{t^2}. \tag{20}$$

Envisageons, en effet, la majorante $y = M(t)$ pour $|\chi(t, s)|$ construite à partir des majorantes et minorantes de χ que nous venons d'obtenir (je me servirai des mêmes notations que dans le n° 8, mais une confusion n'est pas à craindre). On voit facilement qu'entre $t = 0$ et une valeur τ_1 de t voisine de $t = 1$ on peut poser

$$M(t) = f_1(t, \infty) - \frac{2}{3} \frac{t^2}{1 - \frac{t^2}{16}}.$$

Dans cet intervalle la fonction $M(t)$, nulle pour $t = 0$, commence par croître et atteint son maximum, qui ne dépasse pas 0,14, dans le voisinage de $t = 0{,}6$.

Entre $t = \tau_1$ et une valeur τ_2 de t comprise entre 1,8 et 1,9 on peut poser

$$M(t) = f_1(t, 32) - \frac{2}{3} t^2 + 0{,}00577. \tag{21}$$

Dans l'intervalle $\left(\tau_2, \sqrt{\frac{14}{3}}\right)$ on posera de nouveau

$$M(t) = f_1(t, \infty) - \frac{2}{3} \frac{t^2}{1 - \frac{t^2}{16}}.$$

Je commencerai par faire remarquer qu'en prenant pour majorante $M(t)$, le facteur β est certainement supérieur à $\frac{1}{10}$. En effet pour $t = 1{,}3$, on trouve $0{,}1\, e^{t^2} < 0{,}542$, tandis que la valeur correspondante de $M(t)$ (form. (21)) est supérieure à 0,58, comme on le voit aisément en calculant $f_1(t, 32)$ par la formule (16).

Mais on peu poser $\beta = \frac{1}{9}$. On le vérifie immédiatement pour $t \leq 1{,}2$. Entre $t = 1{,}2$ et $t = 1{,}4$ la vérification devient plus délicate et l'on est conduit à envisager la tangente à la courbe $y = M(t)$. La vérification est plus facile pour t compris entre 1,4 et $\sqrt{\frac{14}{3}}$.

Passons à l'intervalle $\left(\sqrt{\frac{14}{3}}, 3\right)$. Pour construire la majorante $M(t)$ on est conduit ici à appliquer la méthode indiquée dans le n° 9. J'ai calculé de cette manière $M(t)$ pour $t = 2{,}1$; $2{,}2$; ... 3 (de dixième en dixième) et la considération des tangentes à la courbe $y = \frac{1}{9} e^{t^2}$ m'a permis de montrer que l'inégalité (20) a lieu dans tout l'intervalle $\left(\sqrt{\frac{14}{3}}, 3\right)$.

La vérification ne présente aucune difficulté dans l'intervalle (3, 4). Je crois inutile d'indiquer les détails de mes calculs.

L'inégalité (20), qui est la troisième des inégalités (5), peut donc être considérée comme établie.

11. Expression approchée de T_l

Reprenons la formule (4) du n° 1. On peut l'écrire

$$T_l = \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{-t^2} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{4} + t^2 - \frac{t^4}{3} \right) \frac{1}{s} \right\} + R_1 + R_2$$

en posant

$$R_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{-t^2} \chi(t, s) \frac{1}{s^2}$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{-t^2} (f + \varphi)^2\, e^{\frac{\theta (f + \varphi)}{s}} \frac{1}{s^2}.$$

Or, en vertu de la dernière des inégalités (5)

$$|R_1| < \frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{s^2\sqrt{s}} < 0{,}062688\,\frac{1}{s^2}\sqrt{\frac{2}{s}}\,.$$

D'autre part, en vertu de la seconde des inégalités (5)

$$(f+\varphi)^2 < 0{,}1296\, e^{t^2}$$

et en vertu de la première

$$e^{\frac{\theta(f+\varphi)}{s}} < e^{\frac{0{,}547}{32}} < 1{,}01725.$$

On en tire

$$|R_2| < 0{,}037191\,\frac{1}{s^2}\sqrt{\frac{2}{s}}\,.$$

Par conséquent

$$|R_1 + R_2| < \frac{0{,}0999}{s^2\sqrt{\frac{s}{2}}}\,.$$

Nous obtenons ainsi la formule

$$(1)\qquad T_t = \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{-t^2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{4} + t^2 - \frac{t^4}{3}\right)\frac{1}{s}\right\} + \frac{\varepsilon}{s^2\sqrt{\frac{s}{2}}}\,,$$

où $|\varepsilon| < 0{,}1$.

Plus exactement ε est compris entre $-0{,}0627$ et $0{,}0372$, si χ est < 0, et entre 0 et $0{,}0999$, si χ est > 0. En effet R_2 étant toujours > 0, la somme $R_1 + R_2$ est comprise entre

$$-\frac{0{,}062688}{s^2\sqrt{\frac{s}{2}}} \text{ et } \frac{0{,}037191}{s^2\sqrt{\frac{s}{2}}}\,,$$

lorsque χ est < 0.

L'expression approchée de T_l indiquée dans la Note citée des C. R. est ainsi établie.

12. Exemples

Je prendrai d'abord l'exemple envisagé dans ma Note des C. R. Soient $s = 20000$, $l = 200$, d'où $t = 2$ et $\frac{1}{s^2 \sqrt{\frac{s}{2}}} = 2,5 \cdot 10^{-11}$.

M. Duarte a trouvé

$$\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{-t^2} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{4} + t^2 - \frac{t^4}{3} \right) \frac{1}{s} \right\} = 0{,}000\,103\,326\,746\,088\,8$$

pour les valeurs données de s et t.

Comme d'autre part $\chi(t, s) < 0$ pour $t = 2$, le facteur ε de la formule (1) est compris entre $-0{,}0627$ et $0{,}0372$. L'erreur entraînée par la formule (1) est donc comprise entre $-1{,}5675 \cdot 10^{-12}$ et $0{,}93 \cdot 10^{-12}$. Par conséquent la formule (1) donne la valeur de T_{200} avec au moins 11 décimales exactes. Ce résultat a été confirmé par M. Duarte qui a eu la patience de calculer directement T_{200} avec 15 décimales exactes. Il a trouvé

$$T_{200} = 0{,}000\,103\,326\,745\,448.$$

On voit que le nombre de décimales exactes fournies par la formule (1) ne dépasse pas 11, ce qui prouve que les limites calculées du facteur ε diffèrent peu de ses bornes réelles dans le domaine D.

Supposons maintenant que le nombre s des épreuves soit égal à 5000 et l'écart $l = 25$, d'où $t = \frac{1}{2}$. La valeur absolue du terme $\frac{\varepsilon}{s^2 \sqrt{\frac{s}{2}}}$ est ici inférieure à $8 \cdot 10^{-11}$ et la formule (1) donne

$$T_{25} = 0{,}008\,787\,789$$

avec 9 décimales exactes, la dixième décimale est ≤ 2.

Chapitre II.

La formule (2) et les expressions approchées de Laplace et de J. Eggenberger

13. La formulè (2)

Soit $P_{l_1}^{l_2}$ la probabilité pour que l'écart l soit compris entre deux limites données l_1, l_2 (au sens large) ou que l'écart réduit t soit compris entre les limites correspondantes t_1, t_2. Cette probabilité a pour expression

$$P_{l_1}^{l_2} = \sum_{l_1}^{l_2} T_l = \sum{}' T_l + \frac{1}{2}(T_{l_1} + T_{l_2}),$$

où

$$\sum{}' T_l = \frac{1}{2} T_{l_1} + T_{l_1+1} + \dots + T_{l_2-1} + \frac{1}{2} T_{l_2}.$$

Lorsque la variable l parcourt les valeurs l_1, $l_1 + 1$, ... l_2, la variable t parcourt les valeurs correspondantes t_1, $t_1 + h$, ... t_2, où

$$h = \frac{1}{\sqrt{2spq}} = \sqrt{\frac{2}{s}}.$$

Mais on peut écrire

$$\sum{}' T_l = h \sum{}' \frac{1}{h} T_l.$$

Appliquons à la somme ainsi transformée la formule sommatoire d'Euler Maclaurin

$$h \sum_a^{b}{}' f(t) = \int_a^b f(t)\,dt + \frac{B_1 h^2}{2!}\Big\{f'(b) - f'(a)\Big\} - \frac{B_2 h^4}{4!}\Big\{f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)\Big\} + \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{B_{n-1} h^{2n-2}}{(2n-2)!}\Big\{f^{(2n-3)}(b) - f^{(2n-3)}(a)\Big\} + \lambda (b-a) \frac{B_n h^{2n}}{2n!} M_{2n}, \tag{22}$$

où B_1, B_2, ... B_n sont les nombres de Bernoulli, λ un nombre compris entre -1 et $+1$ et M_{2n} la borne supérieure de $|f^{(2n)}(t)|$ dans l'intervalle (a, b).

Pour $n = 1$ cette formule s'écrit

$$(22') \qquad h\sum' f(t) = \int_a^b f(t)\, dt + \lambda\,(b-a)\frac{h^2}{12} M_2$$

et pour $n = 2$

$$(22'') \quad h\sum' f(t) = \int_a^b f(t)\, dt + \frac{h^2}{12}\left\{f'(b) - f'(a)\right\} + \lambda\,(b-a)\frac{h^4}{720} M_4.$$

Or dans le problème qui nous occupe $l_1 = -l$, $l_2 = l$, $t_1 = -t$, $t_2 = t$ et

$$f(t) = \sqrt{\frac{s}{2}}\, T_l = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{4} + t^2 - \frac{t^4}{3}\right)\frac{1}{s}\right\} + \frac{\varepsilon}{s^2}.$$

Par conséquent

$$(23) \sum' T_l = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum_{-t}^{t}{}' e^{-t^2} + \frac{h}{s\sqrt{\pi}} \sum_{-t}^{t}{}' e^{-t^2}\left(-\frac{1}{4} + t^2 - \frac{t^4}{3}\right) + \frac{h}{s^2}\sum_{-t}^{t}{}' \varepsilon.$$

Nous allons évaluer séparément les trois sommes qui figurent au second membre de cette égalité. Pour évaluer la première, je me servirai de la formule (22″) en posant $f(t) = e^{-t^2}$.

Il vient

$$(24) \qquad \frac{h}{\sqrt{\pi}}\sum' e^{-t^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\, dt - \frac{2e^{-t^2}\, t}{3\sqrt{\pi}\, s} + \lambda_1 \frac{2\, t\, M_4}{180\sqrt{\pi}} \frac{1}{s^2},$$

λ_1 étant un nombre compris entre -1 et $+1$.

Ici les dérivées de $f(t) = e^{-t^2}$ sont les polynômes d'Hermite multipliés par e^{-t^2}. En particulier

$$f^{(4)}(t) = e^{-t^2} H_4(t) = e^{-t^2}(16t^4 - 48t^2 + 12).$$

Un calcul facile montre que la borne supérieure de $|f^{(4)}(t)|$ est égale à 12. Par conséquent le module du dernier terme de (24) ne dépasse pas $\frac{2t}{15\sqrt{\pi}}\frac{1}{s^2} < 0{,}0753\,\frac{t}{s^2}$.

Nous pouvons donc écrire

$$(25)\quad \frac{h}{\sqrt{\pi}}\sum{}' e^{-t^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt - \frac{2e^{-t^2}}{3\sqrt{\pi}}\frac{t}{s}\frac{1}{s} + 0{,}0753\,\lambda_1\frac{t}{s^2}.$$

Pour calculer la seconde somme de (23) nous appliquerons la formule (22′) en posant

$$f(t) = e^{-t^2}\left(-\frac{1}{4} + t^2 - \frac{t^4}{3}\right)$$

et nous multiplierons le résultat final par $\frac{1}{s\sqrt{\pi}}$. Or

$$f''(t) = \frac{e^{-t^2}}{6}(15 - 90t^2 + 60t^4 - 8t^6)$$

et l'on peut montrer que la borne supérieure de $|f''(t)|$ est égale à $\frac{5}{2}$. D'autre part

$$\int_0^t e^{-t^2}\left(-\frac{1}{4} + t^2 - \frac{t^4}{3}\right)dt = e^{-t^2}\left(-\frac{t}{4} + \frac{t^3}{6}\right)$$

et l'on trouve

$$(26)\quad \frac{h}{s\sqrt{\pi}}\sum{}' e^{-t^2}\left(-\frac{1}{4} + t^2 - \frac{t^4}{3}\right) = \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{t}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\frac{1}{s} + 0{,}4702\,\frac{\lambda_2 t}{s^2},$$

λ_2 étant encore un nombre compris entre -1 et $+1$.

Envisageons maintenant la somme $\frac{h}{s^2}\sum{}'\varepsilon$. Comme $|\varepsilon| < 0{,}0999$, nous pouvons écrire

$$(27)\quad \frac{h}{s^2}\sum{}'\varepsilon = 0{,}1998\,\frac{\lambda_3 t}{s^2}$$

λ_3 étant aussi un nombre compris entre -1 et $+1$.

En réunissant les expressions des trois sommes (25), (26) et (27), on trouve

$$\sum' T_l = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt + \frac{e^{-t^2}}{3\sqrt{\pi}} \left(-\frac{7}{2} t + t^3 \right) \frac{1}{s} + \frac{\lambda t}{s^2},$$

où λ vérifie l'inégalité $|\lambda| < 0{,}75$, et par conséquent

$$(2) \qquad P_{-l}^{l} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt + T_l + \frac{e^{-t^2}}{3\sqrt{\pi}} \left(-\frac{7}{2} t + t^3 \right) \frac{1}{s} + \frac{\lambda t}{s^2}.$$

La formule (2) est ainsi établie.

14. Exemples

Reprenons les exemples envisagés dans le n° 12.

Soient d'abord $s = 20000$, $l = 200$, $t = 2$. Calculons la probabilité P_{-l}^{l} à l'aide de la formule (2). On trouve

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-t^2} dt = \theta(2) = 0{,}995\,322\,265\,02$$

$$\frac{e^{-t^2}}{3\sqrt{\pi}} \left(-\frac{7}{2} t + t^3 \right) \frac{1}{s} = 0{,}000\,000\,172\,22\,.$$

En y ajoutant la valeur de T_{200} calculée dans le n° 12, on trouve

$$P_{-l}^{l} = 0{,}995\,425\,763\,99 + \frac{2\lambda}{s^2}$$

et comme

$$\left| \frac{2\lambda}{s^2} \right| < 3{,}75 \cdot 10^{-9},$$

on voit que la formule (2) fournit la valeur de P_{-l}^{l} avec au moins 8 décimales exactes.

Soient maintenant $s = 5000$, $l = 25$, $t = \frac{1}{2}$. On trouve

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt = \theta\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}520\,499\,877$$

$$\frac{e^{-t^2}}{3\sqrt{\pi}} \left(-\frac{7}{2} t + t^3\right) \frac{1}{s} = -0{,}000\,047\,600\,.$$

En y ajoutant la valeur de T_{25} calculée dans le nº 12, on trouve

$$P_{-l}^{l} = 0{,}529\,240\,06$$

avec au moins 7 décimales exactes, puisque le module de l'erreur est inférieur à $1{,}5 \cdot 10^{-8}$.

15. Les expressions approchées de Laplace et de J. Eggenberger

Dans la formule (2) remplaçons T_l par son expression (1). Il viendra

$$P_{-l}^{l} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt + \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{-t^2} + E_1 \tag{28}$$

en posant

$$E_1 = \frac{e^{-t^2}}{3\sqrt{\pi}} \left(-\frac{7}{2} t + t^3\right) \frac{1}{s} + \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{4} + t^2 - \frac{t^4}{3}\right) \frac{1}{s} \sqrt{\frac{2}{s}}$$
$$+ \frac{\lambda t + \varepsilon \sqrt{\frac{2}{s}}}{s^2} \quad \left(\begin{matrix} |\lambda| < 0{,}75 \\ |\varepsilon| < 0{,}1 \end{matrix}\right).$$

La formule classique de Laplace s'obtient de (28) en négligeant E_1 qui représente l'erreur correspondante. Pour calculer les limites entre lesquelles est comprise cette erreur il suffit de donner à λ et ε les valeurs extrêmes $\pm 0{,}75$, $\pm 0{,}1$. Le premier terme de E_1 est négatif pour $t^2 < \frac{7}{2}$ ou pour $t < \frac{\sqrt{14}}{2} = 1{,}8708$, il est positif pour $t > \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Et comme pour $t^2 = \frac{7}{2}$ le second terme est négatif, il en résulte que pour s suffisamment grand, E_1 est négatif, si $t^2 \leq \frac{7}{2}$ et positif, si $t^2 > \frac{7}{2}$.

Reprenons nos deux exemples du n° 12. Soient d'abord $s = 20000$, $t = 2$. La formule de Laplace donne

$$P_{-l}^{l} = 0,99542560.$$

L'erreur correspondante

$$E_1 = 0,00000016;$$

l'approximation est excellente.

Soient maintenant $s = 5000$, $t = \frac{1}{2}$. La formule de Laplace donne

$$P_{-l}^{l} = 0,5292877$$

et l'on trouve

$$E_1 = -0,0000476.$$

Passons maintenant à la formule de J. Eggenberger. Au lieu d'ajouter à l'intégrale $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt = \Theta(t)$ le terme complémentaire $\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\, e^{-t^2}$ de Laplace, J. Eggenberger[3]) a proposé, en 1893, de remplacer la limite supérieure t de cette intégrale par $t' = t + \frac{1}{2\sqrt{2spq}} = t + \frac{1}{\sqrt{2s}}$.

Quelle est l'erreur entraînée par la formule d'Eggenberger? Son intégrale donne-t-elle une approximation plus grande que la formule de Laplace? La formule (2) va nous permettre de répondre à cette question.

Posons

$$P_{-l}^{l} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t'} e^{-t^2} dt + E_2. \tag{29}$$

[3]) *J. Eggenberger.* Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunktion und des Laplace'schen Integrals. Thèse, Berne, 1893.

Pour calculer E_2 nous allons transformer l'intégrale d'Eggenberger. Posons $h' = \frac{1}{\sqrt{2s}}$, il vient

$$\int_0^{t'} e^{-t^2} dt = \int_0^{t} e^{-t^2} dt + \int_0^{h'} e^{-(t+z)^2} dz$$

et en posant $f(t) = e^{-t^2}$,

$$e^{-(t+z)^2} = f(t+z) = f(t) + f'(t)\, z + \frac{f''(t)}{2!} z^2 + \frac{f^{(3)}(t)}{3!} z^3 + \frac{f^{(4)}(t+\vartheta z)}{4!} z^4,$$

ϑ étant un nombre positif < 1.

Or les dérivées de $f(t)$ sont les polynômes d'Hermite multipliés par e^{-t^2}, en particulier

$$f^{(4)}(t) = e^{-t^2}(12 - 48\,t^2 + 16\,t^4)$$

et nous savons que la borne supérieure de $|f^{(4)}(t)|$ est égale à 12. On trouve donc en intégrant

$$\int_0^{h'} e^{-(t+z)^2} dz = e^{-t^2}\left\{h' - t\,h'^2 + \frac{-1+2\,t^2}{3} h'^3 + \frac{3\,t - 2\,t^3}{6} h'^4\right\} + \frac{\mu}{10} h'^5,$$

le nombre μ vérifiant l'inégalité $|\mu| < 1$.

En remplaçant h' par sa valeur $\frac{1}{\sqrt{2s}}$, on trouve

$$\theta(t') = \theta(t) + \sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{-t^2} + \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\left\{-\frac{t}{s} + \frac{-1+2\,t^2}{3} \frac{1}{s\sqrt{2s}} + \frac{3\,t - 2\,t^3}{12} \frac{1}{s^2}\right\} + \frac{\mu}{20\sqrt{\pi}} \frac{1}{s^2\sqrt{2s}} \tag{30}$$

et comme $E_2 = P^l_{-l} - \theta(t')$, on a en remplaçant P^l_{-l} par son expression (2)

$$E_2 = \frac{e^{-t^2}}{3\sqrt{\pi}}\left(-\frac{t}{2}+t^3\right)\frac{1}{s} + \frac{e^{-t^2}}{12\sqrt{\pi}}(-1+8t^2-4t^4)\frac{1}{s}\sqrt{\frac{2}{s}}$$

$$+\left\{\lambda t - \frac{e^{-t^2}}{12\sqrt{\pi}}(3t-2t^3)\right\}\frac{1}{s^2} + \left(\varepsilon - \frac{\mu}{40\sqrt{\pi}}\right)\frac{1}{s^2}\sqrt{\frac{2}{s}},$$

les nombres λ, ε, μ vérifiant les inégalités

$$|\lambda| < 0{,}75, \quad |\varepsilon| < 0{,}1, \quad |\mu| < 1.$$

Telle est l'expression de l'erreur E_2 entraînée par la formule d'Eggenberger. On peut la simplifier en calculant les limites supérieures des modules des deux derniers termes. On trouve

$$t\left|\lambda - \frac{e^{-t^2}}{12\sqrt{\pi}}(3-2t^2)\right| < 0{,}9\,t$$

$$\left|\varepsilon - \frac{\mu}{40\sqrt{\pi}}\right| < 0{,}12$$

et par conséquent

$$(31)\qquad E_2 = \frac{e^{-t^2}}{6\sqrt{\pi}}\left\{(-t+2t^3)\frac{1}{s} + (-1+8t^2-4t^4)\frac{1}{2s}\sqrt{\frac{2}{s}}\right\} + \nu\left(0{,}9\,t + 0{,}12\sqrt{\frac{2}{s}}\right)\frac{1}{s^2},$$

le nombre ν vérifiant l'inégalité $|\nu| < 1$.

Il en résulte que pour s suffisamment grand, l'erreur E_2 est négative, si $t^2 < \frac{1}{2}$ ou $t < \frac{\sqrt{2}}{2}$ et positive, si $t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Reprenons encore nos deux exemples du nº 12. Soient d'abord $s = 20000$, $t = 2$. La limite supérieure t' étant égale à 2,005, on a

$$\theta(t') = \theta(2{,}005) = 0{,}995\,424\,57$$

et l'une ou l'autre des formules (29), (31) donne

$$E_2 = 0,00000119\,.$$

On voit que la formule d'Eggenberger fournit dans cet exemple une approximation moins bonne que la formule de Laplace, l'erreur correspondante étant environ 7 fois plus forte.

Soient maintenant $s = 5000$, $t = \frac{1}{2}$. Ici $t' = 0,51$

$$\theta(0,51) = 0,5292437$$

et l'erreur E_2 a pour valeur

$$E_2 = -0,0000037$$

Elle est 12 fois plus petite en valeur absolue que l'erreur E_1 entraînée par la formule de Laplace.

On voit donc que la différence $|E_1| - |E_2|$ est tantôt négative et tantôt positive. Je montrerai que pour s suffisamment grand, la formule de Laplace donne une précision plus petite si $t < \sqrt{2}$ et une précision plus grande, si $t \geq \sqrt{2}$. Décomposons l'intervalle (0, 4) en trois parties: les intervalles $0 \leq t < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{14}}{2}$ et $\frac{\sqrt{14}}{2} < t \leq 4$. Dans le premier de ces intervalles les deux erreurs E_1 et E_2 sont négatives et par conséquent $|E_1| - |E_2| = -(E_1 - E_2)$, dans le second E_1 est négative et E_2 positive, donc $|E_1| - |E_2| = -(E_1 + E_2)$, dans le troisième les deux sont positives, par conséquent $|E_1| - |E_2| = E_1 - E_2$.

$$\text{Or} \quad E_1 - E_2 = -\frac{e^{-t^2}t}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{s} + \frac{e^{-t^2}(-1+2t^2)}{6\sqrt{\pi}}\frac{1}{s}\sqrt{\frac{2}{s}} + \frac{\varrho}{s^2}$$

$$E_1 + E_2 = \frac{2e^{-t^2}t}{3\sqrt{\pi}}(-2+t^2)\frac{1}{s} + \frac{e^{-t^2}}{3\sqrt{\pi}}(-1+5t^2-2t^4)\frac{1}{s}\sqrt{\frac{2}{s}} + \frac{\varrho'}{s^2}\,,$$

ϱ et ϱ' étant bornés dans D. Et comme, pour s suffisamment grand, $E_1 - E_2 < 0$, il en résulte que dans le premier intervalle $|E_1| > |E_2|$ et dans le troisième $|E_1| < |E_2|$. Quant à la somme $E_1 + E_2$, elle est négative pour $t < \sqrt{2}$ et positive pour $t \geq \sqrt{2}$ et s suffisamment grand. Donc $|E_1|-|E_2|>0$ pour $t<\sqrt{2}$ et $|E_1|-|E_2<0$ pour $t\geq\sqrt{2}$, et le théorème est démontré.

On pourrait préciser ce résultat en délimitant le domaine à l'intérieur duquel nos inégalités sont vérifiées, mais je crois inutile, pour le moment du moins, de pousser cette étude plus loin.

16. Sur une expression approchée de T_l

Comme valeur approchée de T_l on prend ordinairement sa valeur asymptotique

$$T_l=\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi spq}}=\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\,e^{-t^2}. \tag{32}$$

C'est l'expression approchée de Laplace.

Posons

$$T_l=\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\,e^{-t^2}+\mathcal{E}_1.$$

La formule (1) donne immédiatement

$$\mathcal{E}_1=\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{4}+t^2-\frac{t^4}{3}\right)\frac{1}{s}\sqrt{\frac{2}{s}}+\frac{\varepsilon}{s^2}\sqrt{\frac{2}{s}},$$

le nombre ε vérifiant l'inégalité $|\varepsilon|<0{,}1$.

Dans un article récent[4]) M. R. de Montessus de Ballore a proposé pour T_l l'expression approchée suivante

$$T_l=\frac{1}{2}\left\{\theta(t+h')-\theta(t-h')\right\} \tag{33}$$

où $h'=\dfrac{1}{\sqrt{2s}}$.

Posons

$$T_l=\frac{1}{2}\left\{\theta(t+h')-\theta(t-h')\right\}+\mathcal{E}_2.$$

---

[4]) *R. de Montessus de Ballore.* La fonction thêta dans le calcul des probabilités et l'écart probable. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, 2me partie, Mémoires, 1929, p. 60—73.

$\mathcal{E}_2$ est l'erreur entraînée par la formule (33). Cette erreur se calcule à partir des formules (30) et (1). En effet, en vertu de (30)

$$\frac{1}{2}\left\{\theta(t+h')-\theta(t-h')\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi s}}\,e^{-t^2}+\frac{e^{-t^2}}{6\sqrt{\pi}}(-1+2t^2)\frac{1}{s}\sqrt{\frac{2}{s}}$$
$$+\frac{\delta}{40\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{s^2}\sqrt{\frac{2}{s}},$$

δ étant un nombre vérifiant l'inégalité $|\delta|<1$. On en tire

$$\mathcal{E}_2=\frac{e^{-t^2}}{3\sqrt{\pi}}\left\{-\frac{1}{4}+2t^2-t^4\right\}\frac{1}{s}\sqrt{\frac{2}{s}}+\frac{0{,}12\,\varkappa}{s^2}\sqrt{\frac{2}{s}},$$

$\varkappa$ vérifiant l'inégalité $|\varkappa|<1$.

Posons $D=|\mathcal{E}_1|-|\mathcal{E}_2|$. Par un raisonnement analogue à celui dont nous nous sommes servi dans le n° précédent, on démontre facilement que pour s suffisamment grand,

$$D>0 \text{ pour } 0<t<\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}=0{,}468$$

$$D<0 \text{ pour } 0{,}468<t<\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}707$$

$$D>0 \text{ pour } \frac{\sqrt{2}}{2}<t<\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}=1{,}51$$

$$D<0 \text{ pour } 1{,}51<t\leq 4.$$

On voit donc que pour s suffisamment grand, la formule de Laplace (32) donne une précision plus petite dans les intervalles

$$0<t<0{,}468 \quad\text{et}\quad \frac{\sqrt{2}}{2}<t<1{,}51$$

et une précision plus grande dans les intervalles

$$0{,}468<t<\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\text{et}\quad 1{,}51<t\leq 4.$$

Je prendrai deux exemples. Soient $s = 200$ et $l = 10$, donc $t = 1$. La formule (1) donne

$$T_{10} = 0{,}0207987$$

avec une erreur ne dépassant pas $2{,}5 \cdot 10^{-7}$ en valeur absolue. Or les formules (32) et (33) donnent respectivement les valeurs approchées suivantes

$$T_{10} = 0{,}0207554, \quad T_{10} = 0{,}0207726$$

d'où

$$\mathcal{E}_1 = 0{,}000043, \quad \mathcal{E}_2 = 0{,}000026$$

et l'on voit qu'effectivement la formule de M. de Montessus de Ballore donne ici une précision plus grande.

Soient maintenant $s = 200$, $l = 20$, donc $t = 2$. La formule (1) donne

$$T_{20} = 0{,}0010251$$

tandis que les formules (32) et (33) donnent

$$T_{20} = 0{,}0010333, \quad T_{20} = 0{,}0010393$$

d'où

$$\mathcal{E}_1 = -0{,}000008, \quad \mathcal{E}_2 = -0{,}000014$$

et l'on voit que c'est la formule de Laplace qui donne cette fois-ci une meilleure approximation.

Ici encore on pourrait préciser les critères donnés en délimitant le domaine à l'intérieur duquel ont lieu les inégalités $D > 0$ et $D < 0$.

Je tiens à ajouter en terminant que les critères établis par M. R. Dovaz dans sa thèse permettent d'aborder l'étude des problèmes analogues dans le cas général de $p \leq \frac{1}{2}$.

(Reçu le 3 avril 1930)