

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	2 (1930)
<b>Artikel:</b>	Sur une méthode rigoureuse dans la recherche des figures planétaires.
<b>Autor:</b>	Wavre, R.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-3613">https://doi.org/10.5169/seals-3613</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur une méthode rigoureuse dans la recherche des figures planétaires

par R. WAVRE, Genève.

## § 1. Introduction. Le desideratum formulé par Tisserand

Dans un article précédent<sup>1)</sup>, j'ai fait une distinction assez nette entre des conditions différentielles et des conditions intégrales, pour qu'un fluide en rotation puisse atteindre un état d'équilibre relatif, sous l'influence de l'attraction de ses particules. Depuis la publication de ce petit mémoire, j'ai poursuivi mes recherches précisément dans ces deux directions<sup>2)</sup>.

*Je vais montrer ici qu'une certaine condition intégrale d'équilibre relatif, qui est manifestement nécessaire, est aussi suffisante. Cette méthode vise à la fois à la rigueur et à la fécondité.*

Quelques auteurs classiques ont développé l'inverse de la distance en série procédant suivant les polynômes de Legendre  $X_n$ . On sait que ce développement procède aussi suivant les puissances des distances  $\overline{OP}$  et  $\overline{OP'}$  des deux points  $P$  et  $P'$  à une origine comme  $O$ . Si  $r = \overline{PP'}$  et si  $\gamma$  représente l'angle  $POP'$  on peut écrire d'une part

$$\frac{I}{r} = \frac{I}{\overline{OP}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} \right)^n X_n (\cos \gamma) \quad \overline{OP'} < \overline{OP}$$

et d'autre part

$$\frac{I}{r} = \frac{I}{\overline{OP'}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{\overline{OP}}{\overline{OP'}} \right)^n X_n (\cos \gamma) \quad \overline{OP} < \overline{OP'}.$$

Le premier développement diverge si  $\overline{OP'} > \overline{OP}$ , le second si  $\overline{OP} > \overline{OP'}$ .

Supposons que l'on cherche à calculer le potentiel en un point  $P$  de la planète. Le point potentiant  $P'$  devra balayer l'astre tout entier, il

<sup>1)</sup> Commentarii Mathematici Helveticae V. 1, p. 3—15, 1929.

<sup>2)</sup> Mathematische Annalen Bd. 102, H. 3, 1929, p. 477—483, et Archives des Sciences Physiques et Naturelles V. 11, 1929, p. 131—144, p. 19—32, p. 295—311.

sera à une distance  $\overline{OP'}$  de l'origine, tantôt plus grande, tantôt plus petite que la distance  $\overline{OP}$ . Il est donc impossible de calculer ce potentiel en faisant usage d'un seul des développements précédents. Il faudrait les employer tous les deux, l'un pour la matière intérieure à la sphère de rayon  $\overline{OP}$ , l'autre pour la matière extérieure. Cela conduirait à d'inextricables difficultés théoriques et pratiques.

Il n'est même pas possible, en toute rigueur, d'employer comme l'ont fait Laplace et Poincaré le premier développement pour calculer le potentiel en un point de la surface libre, car il peut y avoir des points  $P'$  plus éloignés de  $O$  que le point  $P$ .

Certes on peut légitimer, dans certains cas, l'emploi du développement divergent. Poisson a fait d'intéressantes remarques à ce propos. Mais il est préférable de satisfaire au *desideratum* que Tisserand formulait à la page 317 du Tome II de son «Traité de Mécanique Céleste». Cet auteur demande que ces difficultés de convergence du développement de  $\frac{1}{r}$  soient rigoureusement surmontées. La méthode que je vais exposer ici satisfait à ce vœu; la difficulté sera évitée, en creusant une cavité à l'intérieur de la masse fluide, en remplaçant la matière enlevée par une couche de niveau et en plaçant le point potentiel dans la cavité et aussi près de l'origine que l'on voudra. Pour cela, nous aurons besoin de quelques propositions classiques d'analyse que nous rappellerons tout d'abord.

## § 2. Quelques propositions d'analyse

Une fonction  $\varphi(x, y, z)$  sera dite *régulière* dans un domaine  $D$  si elle est continue, ainsi que ses dérivées partielles premières et secondes dans  $D$ .

Une surface sera dite *régulière* si elle admet en tout point un plan tangent et si ce plan varie d'une manière continue quand le point de contact décrit la surface.

Si  $u, v$  sont les paramètres et  $x, y, z$  l'espace cartésien, cela revient à supposer que les fonctions

$$x(u, v) \quad y(u, v) \quad z(u, v)$$

sont continues et admettent des dérivées partielles premières continues en tout point  $u, v$ .

Une fonction régulière  $\varphi$  sera *harmonique* à l'intérieur d'un domaine  $D$  si elle satisfait à l'équation de Laplace  $\Delta \varphi = 0$  dans  $D$ .

Une fonction régulière et harmonique dans un domaine est *analytique* dans  $D$ . Elle est donc développable en une série de Taylor procédant suivant les puissances des trois variables  $x, y, z$  au voisinage de chaque point  $M$  de  $D$ . La fonction pourrait se définir de proche en proche dans tout le domaine  $D$  par prolongement analytique. Elle est holomorphe dans  $D$  et, si elle est identiquement nulle au voisinage d'un point particulier  $M_0$ , elle est identiquement nulle dans  $D$ .

J'appellerai *identité de Green* la relation suivante :

$$(1) \quad \iiint (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV + \iint \left( \varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn} \right) dS = 0$$

où  $S$  représente une ou plusieurs surfaces fermées et régulières limitant un volume  $V$ .

Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont supposées régulières dans le volume  $V$  et sur sa frontière  $S$ . Dans l'intégrale de surface les dérivées normales sont prises du côté de  $V$ .

L'identité de Green est encore valable dans des circonstances plus larges ; notamment dans le cas où les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  cesseraient d'être régulières sur une surface  $S_1$  fermée, intérieure à  $V$ .

Avec plus de précisions, voici un cas que nous renconterons plus tard.

Soient  $S$  une surface fermée de connexion sphérique, régulière, limitant un volume  $V$  et  $S_1$  une surface fermée de même connexité, régulière, intérieure à  $V$  et limitant un volume  $V_1$ . Soit, enfin,  $Z$  la zone comprise entre  $S$  et  $S_1$ .

Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  seront supposées continues ainsi que leurs dérivées premières dans le domaine total  $V_1 + S_1 + Z + S$ . Elles seront régulières dans  $V_1$  et dans  $Z$ . Les dérivées secondes pourront subir une discontinuité sur  $S_1$ , mais  $\Delta \varphi$  et  $\Delta \psi$  seront supposés continus et bornés dans  $V_1$  et dans  $Z$ .

Alors l'identité de Green s'applique encore aux domaines  $V_1$  et  $Z$  :

$$\iiint (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV_1 + \iint \left( \varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn} \right) dS_1 = 0$$

$$\iiint (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dZ + \iint \left( \varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn} \right) (dS_1 + dS) = 0.$$

Les normales sont dirigées vers  $V_1$  pour la première équation, vers  $Z$  pour la seconde. L'addition des deux formules fait disparaître  $S_1$  et donne,  $V$  étant le volume total,

$$\iiint (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV + \iint \left( \varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn} \right) dS = 0.$$

On voit donc que la formule primitive (1) subsiste dans ce cas.

### § 3. Quelques propositions sur les potentiels

Soit  $\rho(x, y, z)$  une répartition de densité à l'intérieur d'un volume  $V$  limité par une ou plusieurs surfaces fermées  $S$ . Nous supposerons que la fonction  $\rho$  est continue, ainsi que ses dérivées partielles premières, dans le volume  $V$ . Soit enfin  $r$  la distance d'un point potentiel  $P$  à un point potentiant  $P'$ . Le *potentiel newtonien*  $U$

$$U(P) = \iiint \frac{1}{r} \rho(P') dV$$

représente une fonction régulière, harmonique, et analytique à l'extérieur de la masse, donc à l'extérieur de  $V$ . Il satisfait d'ailleurs à l'intérieur à l'équation de Poisson

$$\Delta U = -4\pi \rho.$$

La fonction  $U$  est aussi régulière dans  $V$ , mais les dérivées secondes subissent sur  $S$  une discontinuité, si  $\rho$  n'est pas nul sur  $S$ .

Soit maintenant  $\rho$  une répartition continue de matière sur une surface fermée  $S$ . Le *potentiel de simple couche*

$$U = \iint \frac{1}{r} \rho dS$$

est continu dans tout l'espace. Il est régulier, harmonique, et analytique partout sauf sur la surface  $S$ .

Cette discontinuité se manifeste sur les dérivées normales suivant qu'on les prend vers l'intérieur  $dn_\gamma$  ou vers l'extérieur  $dn_E$  de  $S$ .

On a, en effet, en un même point

$$(2) \quad \frac{dU}{dn_\gamma} + \frac{dU}{dn_E} = -4\pi \rho.$$

Le potentiel de double couche est défini comme suit:

$$U = \iint \varrho \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dn} dS.$$

La dérivée normale est à prendre au point potentiant vers l'intérieur de  $S$ .

C'est une fonction, régulière, harmonique, analytique, partout sauf sur  $S$ . Elle subit, en général, une discontinuité lorsqu'on traverse la surface.

Si la densité est égale à l'unité, le potentiel de double couche se réduit à l'intégrale de Gauss et l'expression

$$\iint \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dn} dS$$

est égale à  $4\pi$  à l'intérieur de  $S$ , à  $2\pi$  sur  $S$  et à 0 à l'extérieur.

*Le potentiel dû à une masse homogène est analytique dans la masse.*

Envisageons une répartition homogène dans un volume  $V$  et soit  $s$  une sphère contenant tout le volume  $V$ ; soit enfin  $Z$  la partie de la sphère extérieure à  $V$ .

Le potentiel créé par  $V$  est la différence des potentiels créés par la sphère entière et par la zone, la densité étant toujours la même. Or le potentiel dû à la sphère est analytique dans  $V$  ainsi que le potentiel dû à la zone, leur différence l'est aussi.

#### § 4. Sur les charges électriques en équilibre

Envisageons un potentiel  $U$  de simple couche et supposons qu'il soit constant à l'intérieur de la surface  $S$ . Alors, l'équation (2) se réduit à:

$$\frac{dU}{dn_E} = -4\pi \varrho.$$

Je dis que la densité et le potentiel à l'intérieur  $U_f$  ont toujours et en chaque point le même signe. En effet, si  $U_f$  était positif et la densité  $\varrho$  négative en un point  $M_0$ , la dérivée  $\frac{dU}{dn_E}$  serait positive. Le potentiel croîtrait quand on traverse la surface vers l'extérieur, il devrait avoir un maximum à l'extérieur, car il est nul à l'infini. Or on sait qu'une fonction harmonique n'a pas de maximum.

Si  $U_{\mathcal{F}}$  est négatif ce raisonnement se conduit de façon analogue. Enfin, si  $U_{\mathcal{F}}$  est nul, la densité est nulle partout; le potentiel, en effet, nul sur  $S$  et à l'infini, aurait un maximum ou un minimum à l'extérieur de  $S$ .

Traduite en terme d'électricité, cette proposition devient immédiate. Une charge en équilibre à la surface d'un conducteur ne peut pas changer de signe. Elle a le signe du potentiel, et si celui-ci est nul, la charge est nulle partout.

## § 5. Le problème des figures d'équilibre

Envisageons une masse fluide hétérogène. Supposons que les différentes particules du fluide s'attirent suivant la loi de Newton et que, en l'absence de toute action des corps extérieurs, le fluide ait atteint un état d'équilibre relatif et tourne tout d'une pièce autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante  $\omega$ . On sait que les équations de l'hydrostatique impliquent la relation suivante:

$$(3) \quad \Phi(\rho) = U + Q$$

où  $U$  est le potentiel newtonien,  $Q$  le potentiel de la force centrifuge et  $\Phi$  le potentiel du champ de la pesanteur; ce dernier ne doit dépendre que de la densité  $\rho$  à l'intérieur de l'astre.

L'équation (3) doit être satisfaite dans la masse fluide entière. Elle résume les trois équations de l'hydrostatique. Il n'y a pas ici d'équation de continuité à faire intervenir. Enfin, jointe à la condition que la densité croisse de la surface libre à connexion sphérique au centre de l'astre, l'équation (3) représente la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre relatif du fluide.

Le potentiel de la force centrifuge est  $Q = \frac{I}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$ ; il est défini dans l'espace entier, ainsi que  $U$ ; l'équation (3) définit à son tour  $\Phi$  à l'extérieur de l'astre. Nous appellerons  $S_1$  la surface libre et *surfaces de niveau* les surfaces  $S$  à  $\Phi$  constant; elles coïncident à l'intérieur de la masse avec les surfaces d'égale densité. Les surfaces de niveau auront la connexité de la sphère à l'extérieur proche de la planète. La dérivée normale de  $\Phi$  prise vers l'intérieur de  $S$  fournit l'intensité  $g$  de la pesanteur.

Dans la suite nous envisagerons souvent une surface fermée  $S$ , l'espace intérieur  $\mathcal{F}$  et l'espace extérieur  $E$  et nous ferons comme précéd-

demment suivre une formule de l'une des lettres  $\mathcal{F}$ ,  $S$ ,  $E$  pour indiquer que la relation exprimée est valable dans la région correspondante.

La fonction  $Q$  est analytique dans tout l'espace. La fonction  $U$  l'est à l'extérieur de l'astre. Elle est régulière à l'intérieur de la masse. La fonction  $\Phi$  est donc régulière dans l'astre et analytique à l'extérieur. L'équation de Poisson et l'expression de  $Q$  donnent:

$$\Delta \Phi = -4\pi i \rho + 2\omega^2 \quad \mathcal{F}, E;$$

$i$  est la constante de l'attraction universelle qui s'introduit dans le potentiel newtonien. Le laplacien de  $\Phi$  est donc continu dans l'astre.

## § 6. Usage de l'identité de Green

Revenons à l'analyse. Soit  $\Phi(P')$  une fonction régulière dans un volume  $V$ , limité par une surface fermée régulière  $S$ , et sur cette surface elle-même. Soit  $r$  la distance du point  $P'$  à un point  $P$ . Supposons en plus la fonction  $\Phi$  constante sur  $S$ , et soit  $\Phi_S$  sa valeur.

*Si le point  $P$  est extérieur à  $S$ , la fonction  $\frac{1}{r}$  de  $P'$  est régulière dans  $V$  et sur  $S$ . L'identité de Green (1) donne:*

$$\int \frac{1}{r} \Delta \Phi dV - \int \Phi \Delta \frac{1}{r} dV + \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS - \int \Phi \frac{d^2}{dn^2} dS = o(E).$$

Nous employons la notation de l'intégrale simple, l'élément de volume  $dV$  ou de surface  $dS$  indique qu'il s'agit d'intégrales triples ou doubles.

La seconde intégrale est nulle puisque  $\frac{1}{r}$  est harmonique dans  $V$ , la dernière intégrale est égale à  $\Phi_S$  que multiplie une intégrale de Gauss nulle. Il reste simplement:

$$\int \frac{1}{r} \Delta \Phi dV + \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS = o(E).$$

*Si le point  $P$  est extérieur à  $V$ , il faut entourer  $P$  d'une petite sphère  $\sigma$  entièrement intérieure à  $V$  et appliquer l'identité de Green au volume  $V'$  limité par  $S$  et  $\sigma$ . On aura, les fonctions  $\Phi$  et  $\frac{1}{r}$  étant régulières sur  $\sigma + V' + S$ :*

$$\int \frac{1}{r} \Delta \Phi dV' - \int \Phi \Delta \frac{1}{r} dV' + \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} (dS + d\sigma) \\ - \int \Phi \frac{d^{\frac{1}{r}}}{dn} (dS + d\sigma) = o \quad \mathcal{J}.$$

La seconde intégrale est encore nulle, la première intégrale étendue à  $\sigma$  tendra vers zéro avec le rayon de  $\sigma$ , et la dernière intégrale étendue à  $\sigma$  tendra vers la valeur  $\Phi_P$  fois l'intégrale de Gauss étendue à  $\sigma$ . La seconde intégrale étendue à  $S$  est égale à  $\Phi_S$  fois l'intégrale de Gauss. D'autre part lorsque  $\sigma$  tend vers zéro, la première intégrale tend vers l'intégrale prise dans  $V$ . On a donc, à la limite :

$$\int \frac{1}{r} \Delta \Phi dV + \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS - 4\pi(\Phi_S - \Phi_P) = o \quad \mathcal{J}.$$

*Si le point  $P$  est sur la surface  $S$  on construira de nouveau la petite sphère  $\sigma$ . La deuxième intégrale double étendue à  $S$  donnera  $-2\pi\Phi_S$ , et l'intégrale en  $\sigma$  est à étendre seulement à la demi-sphère  $\sigma$  intérieure à  $S$ , ce qui donne  $2\pi\Phi_P$ . On a dans ce cas :*

$$\int \frac{1}{r} \Delta \Phi dV + \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS - 2\pi(\Phi_S - \Phi_P) = o \quad S.$$

Mais  $\Phi_P = \Phi_S$  et l'on peut résumer cette discussion de la manière suivante :

$$(4) \quad \int \frac{1}{r} \Delta \Phi dV + \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS = \begin{cases} o & E, S \\ 4\pi(\Phi_S - \Phi_P) & \mathcal{J}, S \end{cases}.$$

Si  $\Delta \Phi$  subit, sur une surface  $S_1$ , intérieure à  $S$ , la discontinuité de première espèce signalée au paragraphe précédent, l'identité de Green n'en subsiste pas moins, comme nous l'avons vu au début de ce mémoire. Les relations précédentes (4) subsistent également.

## § 7. La transformation fondamentale

Le potentiel  $\Phi$  de la pesanteur satisfait aux conditions requises pour l'application de l'identité de Green et les relations (4) sont valables, que la surface de niveau  $S$  soit intérieure ou extérieure à l'astre. Les surfaces  $S$  sont régulières.

Nous avions d'autre part:

$$(5) \quad \Phi = U + Q \quad (6) \quad \Delta \Phi = -4\pi i \rho + 2\omega^2.$$

Enfin le potentiel newtonien s'exprime ainsi:

$$(7) \quad U = i \int \frac{1}{r} \rho dV.$$

Tirons la densité  $\rho$  de l'équation (6) et portons-la dans (7). On trouve:

$$4\pi U = 2\omega^2 \int \frac{1}{r} \rho dV - \int \frac{1}{r} \Delta \Phi dV.$$

Remplaçons la seconde intégrale par sa valeur extraite de (4):

$$4\pi U = 2\omega^2 \int \frac{1}{r} dV + \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS + \begin{cases} 0 & E, S \\ 4\pi (\Phi_S - \Phi_P) & \mathcal{J}, S \end{cases}.$$

Puis remplaçons  $U$  par sa valeur extraite de (5). Elle est à prendre en  $P$ . On trouvera:

$$(8) \quad 0 = \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS + 2\omega^2 \int \frac{1}{r} dV + 4\pi Q_P - 4\pi \times \begin{cases} \Phi_P & E, S \\ \Phi_S & \mathcal{J}, S \end{cases}.$$

## § 8. La transformation générale

Décomposons le volume  $V$  en deux parties par une surface  $S$  de niveau. Soient  $C$  la cavité intérieure à  $S$  et  $Z$  la zone comprise entre  $S$  et la surface libre  $S_1$ . Si  $S$  est extérieur à l'astre, la cavité est plus grande que l'astre et la zone  $Z$  qui devient soustractive est remplie d'une densité nulle.

Le potentiel peut, en tout état de cause, être décomposé en deux parties relatives à  $C$  et à  $Z$ :

$$U = i \int \frac{1}{r} \rho dC + i \int \frac{1}{r} \rho dZ.$$

Faisons subir à la première intégrale seule, la transformation fondamentale exposée au paragraphe précédent. On obtiendra simplement:

$$(9) \quad U = i \int \frac{1}{r} \varrho dZ + \frac{\omega^2}{2\pi} \int \frac{1}{r} dC + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS + \begin{cases} \circ & E, S \\ \Phi_P - \Phi_S & \mathcal{F}, S \end{cases}$$

et remplaçons  $U$  par sa valeur  $\Phi - Q$  à prendre en  $P$ :

$$\circ = i \int \frac{1}{r} \varrho dZ + \frac{\omega^2}{2\pi} \int \frac{1}{r} dC + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS + Q_P - \begin{cases} \Phi_P & E, S \\ \Phi_S & \mathcal{F}, S \end{cases}.$$

Cette relation doit être vérifiée quelle que soit la surface  $S$  intérieure à l'astre.

### § 9. La condition nécessaire et suffisante

Reprendons la relation générale précédente exprimée pour l'intérieur d'une surface de niveau  $S$ , elle-même intérieure à l'astre.

$$(10) \quad \circ = i \int \frac{1}{r} \varrho dZ + \frac{\omega^2}{2\pi} \int \frac{1}{r} dC + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS + Q_P - \Phi_S \quad \mathcal{F}.$$

Il est bien entendu que  $\varrho$  et  $\Phi$  doivent être constants sur  $S$ . Pour que l'équation fondamentale (3) soit satisfaite, il faut et il suffit que l'équation (10) soit satisfaite par une fonction régulière  $\Phi$ , quelle que soit la surface de niveau  $S$  intérieure à l'astre et quel que soit le point potentiel  $P$  intérieur à  $S$ .

*Jointe à la condition que la densité croisse avec la profondeur, cette relation (10) représente donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait équilibre relatif.*

La condition est évidemment nécessaire puisqu'elle est impliquée par les équations de l'équilibre et par elles seules.

Je dis qu'elle est suffisante. En effet, en vertu de l'identité (4) on peut écrire :

$$\int \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS = - \int \frac{1}{r} \Delta \Phi dV + 4\pi (\Phi_S - \Phi_P) \quad \mathcal{F}$$

et la relation (10), satisfaite pour une fonction régulière  $\Phi$ , donne :

$$(11) \quad \circ = \int \frac{1}{r} (2\omega^2 - \Delta \Phi) dC + 4\pi i \int \frac{1}{r} \varrho dZ + 4\pi (Q_P - \Phi_P) \quad C.$$

Considérons, alors, une nouvelle surface de niveau  $S'$  et soient  $C'$  et  $Z'$  la cavité et la zone correspondantes. On aura :

$$0 = \int \frac{1}{r} (2\omega^2 - \Delta \Phi) dC' + 4\pi i \int \frac{1}{r} \rho dZ' + 4\pi (Q_P - \Phi_P) C'.$$

Soustrayons membre à membre les deux équations précédentes, on trouve :

$$0 = \int \frac{1}{r} (2\omega^2 - \Delta \Phi - 4\pi i \rho) dZ'' - C''$$

$Z''$  étant la zone comprise entre  $S$  et  $S'$  et  $C''$  la partie commune à  $C$  et à  $C'$ .

Le potentiel créé par la densité  $2\omega^2 - \Delta \Phi - 4\pi i \rho$  est donc nul à l'intérieur de  $C''$  et cela quelle que soit l'épaisseur de la zone  $Z''$ . A la limite, lorsque  $S'$  tend vers  $S$ , on a affaire à un potentiel de simple couche, nul à l'intérieur de  $S$ . La charge est en équilibre électrostatique et nous savons qu'elle doit être nulle partout puisque le potentiel est nul dans le conducteur. On aura donc bien :

$$(12) \quad \Delta \Phi = -4\pi i \rho + 2\omega^2$$

dans l'astre entier et la relation (11) donne en vertu de (12) :

$$0 = i \int \frac{1}{r} \rho dC + i \int \frac{1}{r} \rho dZ + Q_P - \Phi_P$$

dans toute la planète, mais cette relation s'écrit :

$$\Phi = U + Q.$$

C'est l'équation d'équilibre relatif, *C. Q. F. D.*

## § 10. Le procédé de la cavité et le desideratum de Tisserand

L'artifice précédent revient à creuser une cavité variable  $C$  à l'intérieur de l'astre et à remplacer la matière enlevée par une couche de niveau, de densité égale à la pesanteur

$$g = \frac{d\Phi}{dn}$$

étalée sur la frontière de la cavité. L'équation à résoudre s'écrit donc

$$(13) \quad \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} g dS + i \int \frac{1}{r} \varrho dZ + \frac{\omega^2}{2\pi} \int \frac{1}{r} dC + Q_P - \Phi_S = 0.$$

Or le premier membre est une fonction analytique dans la cavité.

En effet, il en est ainsi des trois potentiels et de  $Q$ . Quant à  $\Phi_S$ , c'est une constante indépendante du point  $P$ . Le premier membre est entièrement défini par son développement taylorien au voisinage d'un point, de l'origine par exemple. Pour que l'équation (13) soit satisfaite, il faut et il suffit que cet élément de fonction analytique soit identiquement nul au voisinage de l'origine.

Cette remarque faite, divisons la cavité en une sphère  $s$  de même pôle que  $S$  et une marge  $C^+$ . Le potentiel de la masse homogène se calculera directement pour la sphère et il ne subsistera que le potentiel dû à  $C^+$ . L'équation (13) devient :

$$(14) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} g dS + i \int \frac{1}{r} \varrho dZ + \frac{\omega^2}{2\pi} \int \frac{1}{r} dC^+ \\ & + \omega^2 \left( t^2 + \frac{\tau^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{\tau^2}{3} \right) - \Phi_S = 0 \end{aligned}$$

$\tau$  désignant le rayon vecteur du point  $P$ ,  $t$  le rayon de  $s$  et  $\theta$  le complément de la latitude géocentrique.

Soient, enfin,  $R$  le rayon vecteur du point  $P'$  et  $\gamma$  l'angle des deux rayons. On pourra écrire :

$$(15) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R} \sum_{q=0}^{+\infty} \left( \frac{\tau}{R} \right)^q X_q (\cos \gamma).$$

Le point  $P$  pourra être placé aussi près que l'on voudra de l'origine, tandis que le point  $P'$  balaye  $C^+$ ,  $S$  et  $Z$ .  $R$  sera, pour une surface  $S$  donnée, supérieur à un nombre positif. On pourra donc supposer que l'on a relativement à chaque  $S$

$$\frac{\tau}{R} < \frac{1}{2}.$$

Le développement (14) convergera absolument et uniformément, on peut l'employer en toute sécurité.

*Le desideratum de Tisserand est ainsi satisfait. La condition nécessaire et suffisante s'exprimera maintenant par l'annulation des coefficients de toutes les puissances de  $\tau$  en remplaçant  $\frac{1}{r}$  par le développement (15) dans (14).*

On obtient ainsi la suite de relations :

$$(16) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int X_q \frac{g}{R^{q+1}} dS + i \int X_q \frac{\varrho}{R^{q+1}} dZ + \frac{\omega^2}{2\pi} \int X_q \frac{dC^+}{R^{q+1}} \\ &= \begin{cases} \Phi_S - \omega^2 t^2 & \text{si } q = 0 \\ \frac{\omega^2}{3} X_2(\cos \theta) & \text{si } q = 2 \\ 0 & \text{si } q = 1, 3, 4, 5, \dots \end{cases}. \end{aligned}$$

*Ce tableau exprime, lui aussi, la condition nécessaire et suffisante d'équilibre.*

## § 11. Intervention de la masse totale

Reprenons l'équation de Poisson pour le champ de la pesanteur

$$\Delta \Phi = -4\pi i \varrho + 2\omega^2.$$

Intégrons cette équation dans le volume  $V$ , appliquons au premier membre la formule du flux et de la divergence, et soit  $M$  la masse totale. On aura

$$\iint \frac{d\Phi}{dn} dS = 4\pi i M - 2\omega^2 V.$$

Cette équation est due à Poincaré. En subdivisant de nouveau le volume en une cavité  $C$  et une zone  $Z$ , nous trouvons par le même procédé que précédemment

$$\frac{1}{4\pi} \int g dS + i \int \varrho dZ + \frac{\omega^2}{2\pi} \int dC^+ = iM - \frac{2}{3} \omega^2 t^3.$$

Cette équation que nous appellerons relation de Poincaré transformée peut facilement être incorporée au tableau (16). En effet, elle correspond à  $q = -1$ , en convenant de poser  $X_{-1} = 1$ . Elle donnera  $M$ .

Le tableau s'écrit maintenant:

$$(17) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int X_q \frac{\sigma}{R^{q+1}} dS + i \int X_q \frac{\varrho}{R^{q+1}} dZ + \frac{\omega^2}{2\pi} \int X_q \frac{dC^+}{R^{q+1}} \\ &= \begin{cases} iM - \frac{2}{3}\omega^2 t^3 & \text{si } q = -1 \\ \Phi_S - \omega^2 t^2 & \text{si } q = 0 \\ \frac{\omega^2}{3} X_2(\cos \theta) & \text{si } q = 2 \\ 0 & \text{si } q = 1, 3, 4, 5, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

## § 12. Les éléments géométriques du problème

Envisageons une surface de niveau  $S$ ; soit, comme précédemment,  $t$  son rayon polaire;  $t$  servira de paramètre pour distinguer les surfaces  $S$  les unes des autres. Le rayon vecteur allant du centre  $O$  de l'astre à un point  $M$  de  $S$  s'écrira

$$R = t(1 + e).$$

Nous appellerons  $e$  la déformation, c'est une fonction de  $t$ , de la longitude  $\psi$  et du complément de la latitude  $\theta$ .

Appelons  $\nu$  l'angle de la normale extérieure  $N$  en  $M$  à  $S$  et du rayon  $OM$  prolongé. Les coordonnées de  $M$  sont:

$$x = R \sin \theta \cos \psi, \quad y = R \sin \theta \sin \psi, \quad z = R \cos \theta.$$

Les cosinus directeurs de  $OM$  sont:

$$M_x = \sin \theta \cos \psi, \quad M_y = \sin \theta \sin \psi, \quad M_z = \cos \theta.$$

Les paramètres directeurs de  $N$  sont:

$$N_x = \frac{D(y, z)}{D(\theta, \psi)}, \quad N_y = \frac{D(z, x)}{D(\theta, \psi)}, \quad N_z = \frac{D(x, y)}{D(\theta, \psi)}$$

et l'on a, par une propriété connue du produit intérieur:

$$\cos \nu = \frac{M_x N_x + N_y N_y + M_z N_z}{\left(N_x^2 + N_y^2 + N_z^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

On trouve tout calcul fait:

$$\frac{I}{\cos^2 \nu} = 1 + \left( \frac{I}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{I}{\sin^2 \theta} \left( \frac{I}{R} \frac{\partial R}{\partial \psi} \right)^2.$$

Cette expression donnera  $\cos \nu$  en fonction de  $t$ , de  $\theta$  et de  $\psi$ . Soit, maintenant  $d\mathbf{n}$  un élément de normale à la surface  $S$  en  $M$ . Cet élément sera compté positivement vers l'extérieur. Comme nous prendrons la pesanteur  $g$  positivement vers l'intérieur, il faut écrire ici:

$$g = - \frac{d\Phi}{d\mathbf{n}}.$$

Or  $\Phi$  ne dépend que de  $t$  puisque les surfaces  $S$  de paramètre  $t$  sont à  $t$  constant. On peut donc écrire

$$g = - \frac{d\Phi}{dt} \frac{dt}{d\mathbf{n}}.$$

Le segment de normale en  $M$  à  $S$  s'exprime au moyen de l'accroissement  $dR$  dû à une variation  $dt$  de  $t$  seul, donc à  $\theta$  et  $\psi$  constants et l'on a

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} \cos \nu.$$

L'élément de surface  $dS$  s'exprime au moyen de l'angle solide élémentaire  $d\Omega$  par la relation

$$R^2 d\Omega = dS \cos \nu.$$

L'élément de volume  $dZ$  s'exprime comme il suit:

$$dZ = dS d\mathbf{n}.$$

On a:

$$dZ = R^2 \frac{\partial R}{\partial t} dt d\Omega.$$

Le  $\cos \nu$  n'intervient que par son carré dans

$$g dS = -\frac{d\Phi}{dt} \frac{R^2 d\Omega}{\frac{\partial R}{\partial t} \cos^2 \nu}.$$

### § 13. Transformation du système fondamental

En tenant compte des expressions précédentes, le tableau s'écrira :

$$\begin{aligned} & -\frac{I}{4\pi} \frac{d\Phi}{dt} \int X_q R^{1-q} \left( \frac{\partial R}{\partial t} \right)^{-1} \left[ I + \left( \frac{I}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{I}{\sin^2 \theta} \left( \frac{I}{R} \frac{\partial R}{\partial \psi} \right)^2 \right] d\Omega \\ & + i \int_t^{t_1} \varrho dt \int X_q R^{1-q} \frac{\partial R}{\partial t} d\Omega + \frac{\omega^2}{2\pi} \int X_q d\Omega \int_t^R R^{1-q} \frac{\partial R}{\partial t} dt \\ & = \begin{cases} iM - \frac{2}{3}\omega^2 t^3 & \text{si } q = -1 \\ \Phi(t) - \omega^2 t^2 & \text{si } q = 0 \\ \frac{\omega^2}{3} X_2(\cos \theta) & \text{si } q = 2 \\ 0 & \text{si } q = 1, 3, 4, 5, \dots . \end{cases} \end{aligned}$$

Le problème est ainsi ramené à la recherche de trois fonctions  $\varrho(t)$ ,  $\Phi(t)$  et  $R(t, \theta, \psi)$ .

Enfin, mettons en évidence la déformation  $e$  ainsi que la partie linéaire en  $e$ . Le tableau précédent devient :

$$\begin{aligned} & -\frac{I}{4\pi} \frac{d\Phi}{dt} t^{1-q} \int \left[ I - qe - t \frac{\partial e}{\partial t} + G(e) \right] X_q d\Omega \\ & + i \int_t^{t_1} \varrho t^{1-q} dt \int \left[ I + (2-q)e + t \frac{\partial e}{\partial t} + H(e) \right] X_q d\Omega \\ & + \frac{\omega^2}{2\pi} t^{2-q} \int [e + K(e)] X_q d\Omega \\ & = \begin{cases} iM - \frac{2}{3}\omega^2 t^3 & \text{si } q = -1 \\ \Phi(t) - \omega^2 t^2 & \text{si } q = 0 \\ \frac{\omega^2}{3} X_2(\cos \theta) & \text{si } q = 2 \\ 0 & \text{si } q = 1, 3, 4, 5, \dots . \end{cases} \end{aligned}$$

Les fonctions  $G(e)$ ,  $H(e)$ ,  $K(e)$  représentent des expressions contenant en facteur un terme du second degré en  $e$ ,  $\frac{\partial e}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial e}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial e}{\partial \psi}$ .

Ces équations doivent être satisfaites, quels que soient  $\theta$ ,  $\psi$  et  $t$ . Cette dernière variable prendra toute valeur comprise entre  $o$  et  $t_1$  rayon de  $S_1$ . Ces conditions sont suffisantes. Mais on sait que la surface  $S$  peut être extérieure à l'astre pourvu qu'elle reste fermée. On peut donc prendre aussi  $t > t_1$ , et le second terme disparaît puisque  $\varrho$  est nul.

*Ensuite, on peut éliminer  $\Phi$ , et l'on obtient des conditions ne portant que sur  $R$ , ce sont des conditions nécessaires d'ordre purement géométrique.*

## § 14. Le principe des approximations et la théorie classique

Nous supposerons maintenant petite la vitesse angulaire  $\omega$  et la déformation. Nous poserons :

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi^{(0)} + \omega^2 \Phi^{(1)} + \omega^4 \Phi^{(2)} + \dots + \omega^{2n} \Phi^{(n)} + \dots \\ e &= o + \omega^2 e^{(1)} + \omega^4 e^{(2)} + \dots + \omega^{2n} e^{(n)} + \dots.\end{aligned}$$

Les fonctions  $\Phi^{(n)}$  ne dépendent que de  $t$ , tandis que les  $e^{(n)}$  dépendent de  $t$ , de  $\theta$  et de  $\psi$ .

En portant ces développements dans le tableau précédent, ce dernier devra être satisfait quels que soient  $t$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  et  $\omega$ .

On identifiera tout d'abord les coefficients des termes en  $\omega^0$ , cela nous donnera un système régissant l'approximation d'ordre zéro. On identifiera ensuite les termes en  $\omega^2$ , ce sera *l'approximation d'ordre un*, *le système qui l'a régi domine la théorie classique*. L'approximation d'ordre deux fournira des relations nouvelles dont la connaissance est essentielle pour la géodésie supérieure. Et l'on formerait aussi les approximations d'ordre trois, quatre, etc., par identification des termes en  $\omega^6$ ,  $\omega^8$ , ... .

Pour se convaincre de la fécondité de cette méthode, le lecteur pourra se référer à mes quatre articles des „Archives des Sciences Physiques et Naturelles“ mentionnés plus haut. C'est sur la *rigueur* que j'ai voulu insister ici.

(Reçu le 12 mars 1930)