

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 1 (1929)

**Artikel:** Einige Eigenschaften der Grundpunkte eines Büschels von Kurven dritter Ordnung.  
**Autor:** Emch, Arnold  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1138>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Einige Eigenschaften der Grundpunkte eines Büschels von Kurven dritter Ordnung

Von ARNOLD EMCH, Basel.

Von der Konfiguration von neun sogenannten assoziierten Punkte ( $A$ ) im Zusammenhang mit der dadurch eindeutig bestimmten Gruppe ( $B$ ) der zwölf Doppelpunkte der Doppelpunktskurven dritter Ordnung des Büschels auf ( $A$ ) scheint bis dahin noch sehr wenig bekannt zu sein. Im Folgenden sollen einige Zusammenhänge von Kurven mit dieser interessanten Konfiguration festgestellt werden.

Seien  $A_1 \dots A_9$  die Grundpunkte eines allgemeinen Büschels von Kurven dritter Ordnung. Je acht dieser Punkte bestimmen den neunten eindeutig. Man kann also acht Punkte in ganz allgemeiner Lage annehmen, wodurch dann der neunte bestimmt ist. Auf diese Weise erhält man eine homogene Gruppe von «neun assoziierten Punkten».

Unter den Kurven des Büschels befinden sich bekanntlich zwölf mit Doppelpunkten, die mit  $B_1 \dots B_{12}$  bezeichnet werden sollen und die Gruppe ( $B$ ) bilden.

Die Hessesche Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt ist eine ebensolche Kurve mit denselben Doppelpunktstangenten.

Wenn

$$\Phi - \lambda \Psi = 0$$

das Kurvenbüschel auf ( $A$ ) ist, so bilden die Hesseschen Kurven ein  $\infty^1$  System vom Index 3:

$$\lambda^3 f + \lambda^2 g + \lambda h + k = 0,$$

worin  $f, g, h, k$  kubische Polynome in ( $x$ ) sind. Eliminiert man  $\lambda$  aus beiden Gleichungen, so erhält man

$$\Phi^3 f + \Phi^2 \Psi g + \Phi \Psi^2 h + \Psi^3 k = 0.$$

Daraus und aus der oben angegebenen Eigenschaft einer Doppelpunktskurve ergibt sich der

*Lehrsatz: Der Ort der Wendepunkte der Kurven des Büschels ist eine Kurve zwölfter Ordnung mit Tripelpunkten in jedem  $A$  und Doppelpunkten in jedem  $B$ . Durch jeden Punkt  $A$  gehen drei Kurven, die dort einen Wendepunkt haben.*

Man hat ferner den

*Lehrsatz: Das Büschel der Tangenten in einem Punkte  $A$ , den wir als Koordinatenecke  $(1, 0, 0)$  annehmen können, erzeugt mit dem projektiven Kurvenbüschel eine rationale Kurve vierter Ordnung, die in  $A_1$  einen dreifachen Punkt hat und einfach durch die übrigen Grundpunkte geht. Die Tangenten im dreifachen Punkte sind die Wendetangenten der drei Kurven, die Wendepunkte in  $A_1$  haben.*

Das sieht man schon einfach daraus, daß man das Büschel in der Form schreibt:

$$x_1^2 x_2 + x_1 f_2(x_2, x_3) + f_3(x_2, x_3) \\ - \lambda \{x_1^2 x_3 + x_1 g_2(x_2, x_3) + g_3(x_2, x_3)\} = 0.$$

Dann ist das Tangentenbüschel in  $A_1$

$$x_2 - \lambda x_3 = 0,$$

wodurch das Erzeugnis der Projektivität

$$x_1(x_3 f_2 - x_2 g_2) + x_3 f_3 - x_2 g_3 = 0$$

wird.

Mit jeder aus den neun Punkten gewählten Gruppe von sieben Punkten ist eine *Geiser-Transformation* eindeutig verbunden. Diese Involution besteht bekanntlich darin, daß alle Kurven der dritten Ordnung, welche durch sieben feste Punkte und einen veränderlichen achten Punkt  $P$  gehen, durch einen neunten mit diesem veränderlichen Punkt  $P'$  gehen. Dann bilden  $P$  und  $P'$  ein Paar der Geiserschen Transformation. Der Ort der zusammenfallenden Paare  $P \equiv P'$  ist die bekannte *Aronhold'sche* Kurve sechster Ordnung mit Doppelpunkten in jedem der sieben Fundamentalpunkte der Transformation. Diese ist auch der Ort der Doppelpunkte der

Kurven des Netzes durch die sieben Punkte, oder die Jacobische Kurve des Netzes. Unter diesen Kurven mit Doppelpunkten befinden sich natürlich auch die zwölf Kurven des Büschels  $A_1 \dots A_9$  mit Doppelpunkten. Daraus folgt, daß die Aronholdkurve  $I_6$  durch zwölf Punkte  $B$  geht. Da es unter den  $A$  36 Auswahlen von je sieben Punkten gibt, so hat man somit den

*Lehrsatz: Die 36 Aronholdkurven der 36 Geiser-Transformationen, welche mit den 9 Grundpunkten eines Büschels von Kurven dritter Ordnung verbunden sind, gehen alle durch die 12 Doppelpunkte der Doppelpunktskurven des Büschels. Diese 12 Punkte sind also die Doppelpunkte der Kurve zwölfter Ordnung als Ort der Wendepunkte der Kurven des Büschels.*

Jede aus den Grundpunkten gewählte Gruppe von acht Punkten bestimmt eine involutorische *Bertini-Transformation*. Diese ergibt sich, wie bekannt, aus dem Gebüsch von Kurven sechster Ordnung mit gewöhnlichen Knoten in den acht Punkten, durch welche sie gehen. Da sie vom Geschlecht zwei, und infolgedessen hyperelliptisch sind, haben sie die Eigenschaft, daß alle  $\infty^2$  Kurven des Gebüsches, welche durch einen weitem veränderlichen Punkt  $P$  gehen, in der Folge noch durch einen auch mit  $P$  veränderlichen Punkt  $P'$  gehen. Dann bilden  $P$  und  $P'$  ein Paar der Bertinischen Transformation. Dieselbe besitzt eine punktweise invariante Kurve der neunten Ordnung  $I_9$  und ist von der 17. Ordnung mit den acht Punkten als sechsfachen Fundamentalpunkten. Diesen entsprechen in der Transformation rationale Kurven sechster Ordnung mit einem dreifachen Punkt im entsprechenden Fundamentalpunkt und Doppelpunkten in den übrigen Fundamentalpunkten. Die Tangenten im Tripelpunkte sind dieselben, wie die der dort durchgehenden  $I_9$ . Sind  $A_1 \dots A_8$  die Fundamentalpunkte der Bertini-Transformation, so ist der neunte Punkt  $A_9$  des zugehörigen Büschels von Kurven dritter Ordnung ein invarianter Punkt.

Eine isologe Kurve wird nach De Jonquières eine Kurve genannt, welche der Ort der Punktpaare einer Cremona-Transformation auf den Strahlen eines Büschels ist. Im Falle der Geiser-Transformation sind diese einfach die Kurven des Netzes durch  $A_1 \dots A_7$ . Bei der Bertini-Transformation sind es Kurven neunter Ordnung mit dreifachen Punkten in  $A_1 \dots A_8$ , und einem ein-

fachen Punkt in  $A_9$ . Jedem Punkte ist eine solche Kurve zugeordnet.

*Die oben erwähnte Kurve vierter Ordnung ist jetzt der Ort der Punkte, für welche die zugehörigen isologen Kurven in Kurven dritter Ordnung des Büschels und solche sechster Ordnung zerfallen<sup>1)</sup>.*

Die punktweise invariante  $I_9$  ist auch der Ort der Doppelpunkte der Kurven sechster Ordnung des Gebüsches, oder dieselbe Jacobische Kurve für alle Netze des Gebüsches. Unter diesen Kurven befinden sich auch diejenigen, welche sich aus je zwei Kurven dritter Ordnung mit Doppelpunkten des Büschels durch  $A_1 \dots A_9$  zusammensetzen. Folglich hat man den

*Lehrsatz: Die 9 punktweise invariante Kurven 9. Ordnung in den 9 Bertini-Transformationen, die sich auf die Grundpunkte des Büschels  $A_1 \dots A_9$  aufbauen, gehen durch die 12 Punkte  $B$  der Doppelpunktskurven des Büschels.*

Jede dieser  $I_9$  ist eindeutig bestimmt durch die 8 Tripelpunkte, und die 12 Punkte  $B$ . Man hat tatsächlich  $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 < 8 \cdot 6 + 12$ , was davon abhängt, daß die Punkte  $A$  und  $B$  nicht unabhängig sind.

Die 36 Aronhold-Kurven durch die 12 Punkte  $B$ , welche durch die 9 Grundpunkte eindeutig bestimmt sind, ergeben sich nicht alle als linear abhängig. Es gibt  $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 - 12 + 1 = 16$  linear unabhängige Kurven sechster Ordnung durch 12 Punkte, so daß von den 36 Aronhold-Kurven 20 durch 16 linear abhängigen von ihnen ausgedrückt werden können. Unter diesen Abhängigkeitsverhältnissen muß es noch interessante Beziehungen geben.

Z. B. schneiden sich zwei Aronhold-Kurven  $I_{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7}$  und  $I_{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8}$  in 36 Punkten, welche durch die Punkte  $A_1 \dots A_6$  und die Punkte  $B$  absorbiert werden. Folglich kann jede Kurve  $C_6$  mit Doppelpunkten in  $A_1 \dots A_6$  und durch die  $B$  in the Form

$$C_6 = \lambda I_{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7} + \mu I_{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 8},$$

<sup>1)</sup> Ueber die Angaben bezüglich der Transformationen von Geiser und Bertini und ihre Anwendungen, sowie die am Anfang gemachten, sehe man A. Emch: (1) On the construction of hyperelliptic curves, The Tohoku Mathematical Journal, Vol. 29, pp. 329—347 (1928). (2) On surfaces and curves which are invariant under involutory Cremona transformations. American Journal of Mathematics, Vol. 48, pp. 21—44 (1926).

folglich auch  $I_{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 9}$  als eine solche  $C_6$  geschrieben werden. Das führt zu dem

*Lehrsatz: Drei von den 36 Aronhold-Kurven mit Doppelpunkten in denselben 6 von den 9 Grundpunkten  $A$ , sind linear abhängig.*

Im Falle des syzygetischen Büschels ist die Konfiguration ( $A$ ) mit ihren interessanten Gruppeneigenschaften sehr wohl bekannt. In diesem Falle zerfällt die Kurve zwölfter Ordnung in die zwölf Wendepunktlinien. Die Doppelpunktskurven des Büschels sind die Wendedreiecke, und die Gruppe ( $B$ ) besteht aus den Ecken der vier Wendepunktsdreiecke.

(Eingegangen den 26. Oktober 1928)