

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 1 (1929)

Artikel: Somengeometrie und Nicht-Euklidische Gemetrie.
Autor: Benteli, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1137>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Somengeometrie und Nicht-Euklidische Geometrie

Von W. BENTELI, Zürich

Der Gedanke, statt der Punkte höhere Gebilde als Grundelemente für eine Geometrie einzuführen, geht auf J. Plücker zurück. In diesem Sinne wurde von E. Study (Geometrie der Dynamen, 1903) das «Soma» als neuer Grundbegriff in die Geometrie und analytische Kinematik eingeführt. Unter Soma verstehen wir einen starren Körper in irgend einer seiner ∞^6 Lagen im Raume. Der gewöhnliche Raum wird somit zum Träger einer 6-dimensionalen Mannigfaltigkeit von Somen. Die Somengeometrie wurde bald Gegenstand heftiger Diskussionen, wir erinnern an Herrn de Saussure und seine diesbezüglichen Verdienste, die später Herrn Cailler die Vielseitigkeit dieser Geometrie erkennen ließen¹⁾.

Auf Grund des Homomorphismus der Gruppen H_6 der hyperbolischen Bewegungen des Raumes und L_6 der linearen Transformationen der Gaußschen Ebene, wurden in der vorliegenden Arbeit neue Somenkoordinaten eingeführt. Für die vollständige Lösung des von Cailler aufgeworfenen Problems, die 3-dimensionalen nicht-euklidischen Geometrien durch gewisse Somenmannigfaltigkeiten darzustellen, erweisen sich diese Koordinaten als besonders geeignet. Vor allem aber führt diese Fassung der Somengeometrie die Idee der Metrik und den Gruppenbegriff mit sich, und durch sie werden wir die metrischen, sowie die Gruppeneigenschaften der Somenmannigfaltigkeiten leicht schildern können.

1. Das abstrakte Bild der Gruppe H_6 der hyperbolischen Bewegungen.

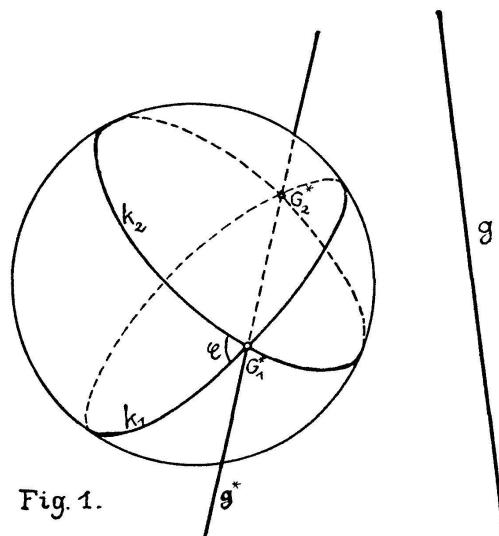
Die Abbildung der Gruppe H_6 auf die Gruppe L_6 .

Die Polarebene eines Raumpunktes P , in bezug auf eine beliebig gewählte Grundkugel, schneidet diese im Kreise k . Durch die

¹⁾ C. Cailler: «Géométrie des corps solides et géométrie imaginaire». Archives des sciences physiques et naturelles. 1916. No. 8, 9, 10.

stereographische Projektion dieser Grundkugel auf die Ebene E , wird jedem Punkte P des Raumes ein Kreis k der Ebene E umkehrbar eindeutig zugeordnet. Der Kreis k ist reell, nullteilig oder ein Nullkreis, je nachdem der entsprechende Punkt P außerhalb, innerhalb oder auf der Grundkugel liegt. Den Punktmanigfaltigkeiten des Raumes werden weiterhin Kreismannigfaltigkeiten der Ebene umkehrbar eindeutig zugeordnet. Z. B. wird eine Gerade g des Raumes, welche die Grundkugel nicht schneidet, durch ein Kreisbüschel 1. Art mit den Trägern G_1^* und G_2^* dargestellt, während eine Gerade g^* , welche die Grundkugel in zwei reellen Punkten trifft, das Bild des Kreisbüschels 2. Art mit den beiden Grenzpunkten G_1^* und G_2^* ist.

Die eben beschriebene Abbildung der Punktgeometrie des Raumes auf die Kreisgeometrie der Ebene läßt weiter die Uebertragung der Metrik zu. Wird nämlich die Grundkugel als die absolute Fläche Ω des Raumes betrachtet, so zeigt eine kleine Rechnung, daß der nicht-euklidische Abstand θ zweier Raumpunkte dem Winkel φ ihrer beiden entsprechenden Kreise gleich ist, d. h. es ist



$$\cos \varphi = \frac{\Omega_{12}}{\sqrt{\Omega_{11} \Omega_{22}}} = \cos \theta$$

Liegen die beiden Punkte konjugiert in bezug auf die Grundkugel, so wird $\Omega_{12} = 0$ und ihre entsprechenden Kreise schneiden sich rechtwinklig. Einer Ebene des Raumes werden daher alle Kreise ent-

sprechen, die auf dem Kreise ihres Poles senkrecht stehen. Dieser Kreis ist der Schnittkreis der Ebene mit der Kugel selber. Zwei konjugierte Geraden g und g^* stellen zwei Kreisbüschel verschiedener Art dar, von denen das eine aus den orthogonalen Trajektorien des andern besteht.

Im folgenden sei die Kreisebene als Gaußsche Zahlenebene gedacht. Ihre allgemeine lineare Transformation

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{mit} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$$

führt Kreise (speziell Nullkreise) wieder in solche über und erzeugt also im hyperbolischen Raum eine Punkttransformation, welche die absolute Fläche invariant lässt. Fernerhin ist diese Transformation winkeltreu; ihre entsprechende Transformation des hyperbolischen Raumes lässt also auch die Strecken invariant und muß somit eine hyperbolische Bewegung sein. Damit wäre die eindeutige Abbildung der Gruppe H_6 auf die Gruppe L_6 gewonnen.

Eine $\begin{cases} \text{elliptische} \\ \text{hyperbolische} \end{cases}$ Transformation der Gruppe L_6 lässt die Kreise eines Kreisbüschels $\begin{cases} \text{zweiter} \\ \text{erster} \end{cases}$ Art invariant und vertauscht diejenigen eines Kreisbüschels $\begin{cases} \text{erster} \\ \text{zweiter} \end{cases}$ Art. Ihre entsprechende Transformation der Gruppe H_6 transformiert somit eine $\begin{cases} \text{eigentliche} \\ \text{uneigentliche} \end{cases}$ Gerade punktweise in sich und ist eine hyperbolische $\begin{cases} \text{Drehung} \\ \text{Schiebung} \end{cases}$. Folglich sind die Schraubungen des hyperbolischen Raumes durch die loxodromischen Transformationen der Gruppe L_6 vertreten, während den Grenzkreisbewegungen die parabolischen Transformationen entsprechen.

Schließlich sei noch erwähnt, daß außer der hyperbolischen Bewegung oder linearen Transformation der Gruppe L_6 , auch die Spiegelung am Kreise $\bar{z}' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ als Punkttransformation das

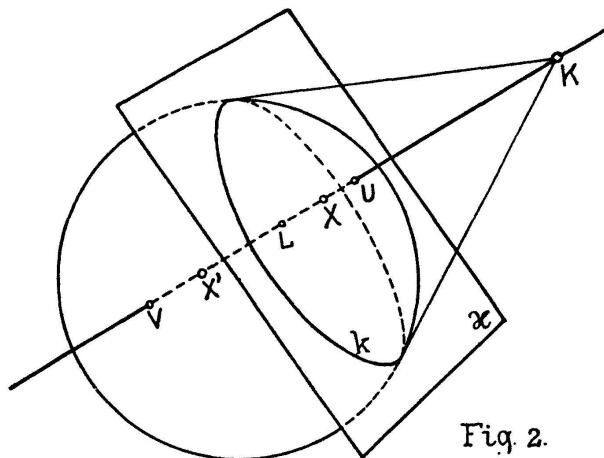


Fig. 2.

Absolute invariant lässt und im hyperbolischen Raum die Spiegelung an einer Ebene darstellt. Denn ist k dieser Kreis, so wird jeder Punkt der Ebene π , als Bild eines zu k orthogonalen Kreises, durch die Spiegelung am Kreise k in sich selbst transformiert. Die Ebene π bleibt also punktweise invariant. Die beiden Enden U und V einer Geraden durch den Pol K der Ebene π sind Spiegelpunkte, denn sie sind die Grenzpunkte eines Kreisbüschels zweiter Art durch den Kreis k . Sämtlichen Geraden durch den Punkt K entsprechen alle Kreisbüschel durch den Kreis k . Zwei Punkte X und X' einer solchen Geraden sind Spiegelpunkte, wenn ihr Doppelverhältnis: $(X, X', K, L) = -1$ ist. Die Spiegelungen am Kreise bilden eine Nebengruppe \bar{L}_6 zur Gruppe L_6 der linearen Transformationen. Die Auseinanderfolge zweier Spiegelungen ergibt eine Bewegung.

Die Somenkoordinaten.

Die allgemeine Transformation A der Gruppe L_6 oder die allgemeine hyperbolische Bewegung ist durch die vier komplexen Größen:

$$\alpha = a_1 + ia_5, \beta = a_2 + ia_6, \gamma = a_3 + ia_7, \delta = a_4 + ia_8,$$

oder durch die acht Parameter a_i vollständig bestimmt. Da nur die Verhältnisse dieser Größen wesentlich sind, kann stets erreicht werden, daß die Determinante $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \Psi(a, a) + i \cdot \Phi(a, a) = 1$ wird.

Deuten wir die 8 Parameter als *homogene Somenkoordinaten* in einem R_7 , so kann die erste Bedingung $\Psi(a, a) = 1$ immer erfüllt werden, während durch die zweite Bedingung

$$\Phi(a, a) = a_1 a_8 + a_4 a_5 - a_2 a_7 - a_3 a_6 = 0,$$

die Transformationen der Gruppe L_6 oder die hyperbolischen Bewegungen, auf eine 6-dimensionale quadratische Mannigfaltigkeit $\Phi_{(6)}^{(2)}$ des R_7 abgebildet werden. Die singulären Transformationen sind durch die gemeinsamen Punkte der beiden Bildflächen $\Phi_{(6)}^{(2)}$ und $\Psi_{(6)}^{(2)}$ dargestellt.

Die Abbildung der Gruppe H_6 auf die Bildfläche $\Phi_{(6)}^{(2)}$.

Jedem Punkte der Bildfläche $\Phi_{(6)}^{(2)}$ entspricht eine Bewegung, oder also ein Soma des hyperbol. Raumes. Umgekehrt aber besitzt jedes Soma zwei Bildpunkte. Denn werden die Größen a, β, γ, δ einer Transformation A mit einem komplexen Faktor $\varrho = \sigma + i\tau$ multipliziert, so ändert sich dadurch die Transformation nicht und

$$\begin{aligned} a'_k + i a'_{k+4} &= \varrho (a_k + i a_{k+4}), \\ \text{oder} \quad a'_k &= \sigma a_k - \tau a_{k+4} \\ a'_{k+4} &= \sigma a_{k+4} + \tau a_k \quad \text{für } k = 1 \dots 4 \end{aligned}$$

ist die parametrische Darstellung einer Geraden durch die beiden Bildpunkte a ($a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$) und a^* ($-a_5, -a_6, -a_7, -a_8, a_1, a_2, a_3, a_4$). Auf dieser Geraden liegen die Bildpunkte aller Transformationen, die sich von A um einen komplexen Faktor unterscheiden, im übrigen aber mit A identisch sind. Sie ist die Bildgerade der allgemeinen Transformation A . Diese ∞^6 Bildgeraden im R_7 bilden ein Feld, denn irgend zwei verschiedene Geraden unter ihnen können keinen Punkt gemeinsam haben, da ja zwei wesentlich verschiedene Transformationen A und B nicht durch einen komplexen Faktor identisch gemacht werden können. Die Bildgerade einer nichtsingulären Transformation schneidet die Bildfläche wegen $\Phi^2 + \Psi^2 > 0$ stets in zwei reellen Bildpunkten. Die Abbildung ist also zweideutig. Ist A eine singuläre Transformation, so wird für jeden

Wert von ϱ : $\Phi(a', a') = \Psi(a', a') = 0$, d. h. die Bildgerade einer singulären Transformation ist beiden Flächen gemeinsam.

Aus dem einen Bildpunkt a ($a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$) der nicht-singulären Transformation A folgt der andere a^* ($-a_5, -a_6, -a_7, -a_8, a_1, a_2, a_3, a_4$) durch Multiplikation mit dem Faktor $\varrho = i$. Im folgenden sind die beiden Bildpunkte der allgemeinen Transformation A mit a_+ und a_- bezeichnet, je nachdem ihre Koordinaten dem Ausdrucke $\Psi(a, a)$ einen positiven oder denselben negativen Wert geben. Ebenso wird die Transformation A ihrer analytischen Form entsprechend mit A_+ bzw. mit A_- bezeichnet. Die Einheitspunkte e_+ und e_- haben als Bildpunkte des Protosoma oder der Identität: $z' = z$, bzw. $z' = \frac{iz}{i}$ die Koordinaten e_+ (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) bzw. e_- (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1). Wir sprechen kurz von positiven oder negativen Bildpunkten, je nachdem die Determinanten ihrer Transformationen positiv oder negativ sind. Aus den Multiplikationsregeln

$$\begin{aligned} A_+ \cdot B_+ &= A_- \cdot B_- = C_+ \\ A_+ \cdot B_- &= A_- \cdot B_+ = C_- \end{aligned}$$

ist ersichtlich, daß durch die bloße Berücksichtigung der positiven Bildpunkte, die Eindeutigkeit dieser Abbildung erhalten bliebe.

Ist A eine beliebige feste und X eine veränderliche Transformation, so erzeugt $Y = A \cdot X$ im Bildraume R_7 eine lineare Transformation

$$x'_{l+m-1} = a_l \cdot x_m + a_{l+1} \cdot x_{m+1} - a_{l+2} \cdot x_{m+2} - a_{l+3} \cdot x_{m+3} - a_{l+4} \cdot x_{m+4} + a_{l+5} \cdot x_{m+5}, \quad \text{für } \begin{cases} l = 1, 2, 5, 6 \\ m = 1, 3. \end{cases}$$

wobei die Indizes > 8 , mod. 8 genommen, einen Vorzeichenwechsel der Größen a_i bewirken. Diese Transformation läßt die beiden Flächen $\Phi_{(6)}^{(2)}$ und $\Psi_{(6)}^{(2)}$ invariant, insofern der Bildpunkt der Transformation A auf der Bildfläche $\Phi_{(6)}^{(2)}$ liegt. Alle projektiven Transformationen des R_7 , welche die Bildfläche $\Phi_{(6)}^{(2)}$ invariant lassen, gehören zu der 28-parametrischen Gruppe G_{28} der Somentransformationen, oder der Somengeometrie. Diese Gruppe enthält auch die Transformationen entarteter Somen in nicht entartete und umge-

kehrt. Die Transformationen $Y = A \cdot X$ bilden eine 6-gliedrige Untergruppe der Gruppe G_{28} , es ist die Gruppe der Somenbewegungen.

2. Die Somengeometrie und ihre Metrik.

Die Bildfläche $\Phi_{(6)}^{(2)}$.

Die Somenmannigfaltigkeiten, speziell die linearen Somenmannigfaltigkeiten, sind auf der Bildfläche durch die linearen Punktmanigfaltigkeiten oder linearen Erzeugenden dargestellt. Zu ihrer Abzählung führen wir den Begriff der Inzidenz ein, und wir nennen zwei Somen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} inzident, wenn ihre Koordinaten die Inzidenzbedingung $\Phi(a, b) = 0$ erfüllen. Ihre Bildpunkte a und b liegen somit auf einer Erzeugenden. Auf der Bildfläche $\Phi_{(6)}^{(2)}$ können ∞^9 Geraden, ebensoviele Ebenen und ∞^6 dreidimensionale Räume abgezählt werden. Sie stellen die ∞^9 Somenbüschel, bzw. die ∞^9 Somenbündel, oder die ∞^6 Somengebüsche dar¹⁾.

Besonders aber interessiert uns die Abzählung der linearen Erzeugenden durch den Einheitspunkt. Zum Einheitspunkte e gibt es ∞^5 inzidente Bildpunkte, von denen je ∞^1 auf einer Geraden durch e liegen. Also gibt es ∞^4 Geraden durch e , d. h. das Protosoma \mathfrak{E} kann ∞^4 Somenbüschel beschreiben. Aehnliche Ueberlegungen führen uns auf die ∞^5 Ebenen und ∞^3 Räume durch den Einheitspunkt, oder also auf die ∞^5 Somenbündel und ∞^3 Somengebüsche durch das Protosoma.

So wie für die Geometrie der Lage die Inzidenzbedingung, ist für die Metrik der Somengeometrie die Orthogonalitätsbedingung $\Psi(a, b) = 0$ von großer Bedeutung. Wir nennen zwei Somen orthogonal, wenn ihre Koordinaten die Orthogonalitätsbedingung erfüllen. Aus den Beziehungen:

$$\Phi(a_+, x) = -\Psi(a_-, x), \quad \Phi(a_-, x) = \Psi(a_+, x),$$

¹⁾ H. Beck: «Ueber lineare Somenmannigfaltigkeiten». Math. Ann. Bd. 81.

die für positive wie auch für negative Bildpunkte x gelten, folgt, daß die Tangentialhyperebene eines Bildpunktes a_+ bzw. a_- identisch ist mit der Polarhyperebene seines entgegengesetzten Bildpunktes a_- bzw. a_+ , in bezug auf die Fläche $\Psi_{(6)}^{(2)}$. Oder mit andern Worten: *Die Bildfläche $\Phi_{(6)}^{(2)}$ ist die Hüllfläche aller Polarhyperebenen ihrer eigenen Punkte, bezogen auf die Fläche $\Psi_{(6)}^{(2)}$.*

Die Metrik im Somenraume und auf der Bildfläche.

Indem wir die gemeinsamen Bildpunkte der beiden Flächen $\Phi_{(6)}^{(2)}$ und $\Psi_{(6)}^{(2)}$ als das Absolute der Fläche $\Phi_{(6)}^{(2)}$ einführen, bestimmen wir auf derselben eine Metrik. Für zwei Punkte einer linearen Erzeugenden der Bildfläche gilt die Abstandsformel:

$$ch \hat{a} \hat{b} = \frac{\Psi(a b)}{\sqrt{\Psi(a a) \cdot \Psi(b b)}}.$$

Andernteils stellt die loxodromische Transformation :

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = e^{r + i \varphi} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

mit den beiden Fixpunkten $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$, $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ im hyperbolischen Raum eine Schraubung mit dem Drehwinkel φ und der Schiebungsgröße r dar. Aus dieser Transformation lassen sich die 8 homogenen Somenkoordinaten a_i als analytische Funktionen der Schiebungsgrößen φ und r , sowie der Bestimmungsstücke x_1, y_1, x_2, y_2 der Schraubungssachse darstellen:

$$a_i = f_i(x_1, y_1, x_2, y_2, r, \varphi) \quad \text{für } i = 1 \dots 8$$

Daraus ergeben sich für zwei Somen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , die sich um eine Schraubung (r, φ) voneinander unterscheiden, die Ausdrücke

$$\Phi(a_+, b_+) = \sin \frac{\varphi}{2} \cdot sh \frac{r}{2}, \quad \Psi(a_+, b_+) = \cos \frac{\varphi}{2} ch \frac{r}{2}$$

als Funktionen der Schraubungsgrößen und unabhängig von der Schraubungssachse. Die Bewegung $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ist eine *Drehung* oder

Schiebung, je nachdem $r=0$ oder $\varphi=0$ ist und die beiden Bildpunkte liegen auf einer Erzeugenden der Bildfläche. Für $\varphi=\pi$ unterscheiden sich die beiden Somen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} um eine *Umschraubung*, und ihre Bildpunkte liegen polar in bezug auf die Fläche $\Psi_{(6)}^{(2)}$. Ist $r=0$ und $\varphi=0$, so werden die beiden Somen durch eine *Umdrehung* zur Deckung gebracht. Der eine Bildpunkt liegt dann auf der Tangential- und auf der Polarhyperebene des andern zugleich.

Der nicht-euklidische Abstand zweier Somen hat zunächst nur einen Sinn, wenn ihre beiden Bildpunkte auf einer Erzeugenden liegen. Sind diese Bildpunkte gleichartig, so ist: $\Psi(aa) \cdot \Psi(bb) = +1$ und folglich:

$$\widehat{ch ab} = \Psi(a, b) = \cos \frac{\varphi}{2} \cdot ch \frac{r}{2}$$

Auf den Bildgeraden der Schiebungen gilt somit die hyperbolische Metrik, auf den Bildgeraden der Drehungen die elliptische Metrik. Der nicht-euklidische Abstand zweier Bildpunkte ist identisch mit der halben Schiebung oder Drehung, um die sich ihre Somen unterscheiden. Für zwei verschiedenartige Bildpunkte a_+ und b_- einer Erzeugenden muß: $\Psi(aa) \cdot \Psi(bb) = -1$,

$$\Phi(a_+, b_-) = \Psi(a_+, b_+) = \cos \frac{\varphi}{2} ch \frac{r}{2} = 0, \quad d.h. \quad \varphi = \pi$$

und $\Psi(a_+, b_-) = -\Phi(a_+, b_+) = -\sin \frac{\varphi}{2} sh \frac{r}{2}$ sein.

Die beiden Somen unterscheiden sich um eine Umschraubung, und ihr nicht-euklidischer Abstand

$$\widehat{ch a_+ b_-} = \frac{-sh \frac{r}{2}}{i} = \sin \frac{ir}{2} = \cos \frac{\pi - ir}{2} = ch \frac{r + i\pi}{2}$$

wird komplex. In diesem Sinne wird nun für zwei beliebige Bildpunkte, die nicht mehr auf einer Erzeugenden zu liegen brauchen, der komplexe Abstand $\frac{r + i\varphi}{2}$ eingeführt, wenn sich ihre Somen

um die Schraubung (r, φ) voneinander unterscheiden. Die Abstandsformel erhält dann die einfache Gestalt:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \widehat{a_+ b_+} &= \operatorname{ch} \frac{r + i\varphi}{2} = \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{ch} \frac{r}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{r}{2} \\ \underline{\operatorname{ch} \widehat{a_+ b_+} = \Psi(a_+ b_+) + i \Phi(a_+ b_+)} \end{aligned}$$

oder was dasselbe ist:

$$\operatorname{ch} \widehat{a_+ b_+} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left| \begin{matrix} x_1 + ix_5 & x_2 + ix_6 \\ y_3 + iy_7 & y_4 + iy_8 \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} y_1 + iy_5 & y_2 + iy_6 \\ x_3 + ix_7 & x_4 + ix_8 \end{matrix} \right| \right\},$$

und der Abstand zweier Bildpunkte, bzw. Somen wird nur dann reell, wenn die beiden Punkte gleichartig sind und auf derselben Erzeugenden liegen, d. h. wenn die beiden Somen um eine Drehung oder Schiebung voneinander verschieden sind.

Dieser Begriff Abstand ist nicht allgemein gültig. Aus der Bedingung $(a - \delta)^2 + 4\beta \cdot \gamma = 0$ für parabolische Transformationen, folgt für zwei Bildpunkte, die um eine solche Transformation voneinander verschieden sind, daß $\Phi(a, b) = 0$ und: $\Psi(a, b) = 1$ ist, d. h. die beiden Bildpunkte liegen auf einer Erzeugenden, welche die absolute Fläche $\Psi_{(6)}^{(2)}$ berührt. Die beiden Somen haben den Abstand:

$$\operatorname{ch} \widehat{a b} = 1,$$

und sie unterscheiden sich um eine Grenzkreisbewegung.

3. Die Liniengeometrie und ihre Metrik.

Die Bildfläche $\Phi_{(4)}^{(2)}$.

Jedes Soma, das aus dem Protosoma durch eine Umdrehung entstanden ist, soll als Repräsentant seiner Drehachse aufgefaßt werden. Die Koordinaten dieser Somen haben die Bedingungen:

$$\Phi(\epsilon, a) = 0, \quad \Psi(\epsilon, a) = 0, \quad \Phi(a, a) = 0$$

zu erfüllen. Ihre Bildpunkte liegen auf einer vierdimensionalen quadratischen Fläche $\mathcal{Q}_{(4)}^{(2)}$, es ist die Bildfläche der Liniengeometrie. Ein solches Soma sei im folgenden mit \bar{A} , dessen Bildpunkte mit \bar{a} und dessen Koordinaten mit \bar{a}_i bezeichnet. Die Eindeutigkeit der Abbildung wird erreicht, wenn den positiven Bildpunkten \bar{a}_+ die eigentlichen Geraden $\bar{\mathfrak{A}}_+$, den negativen Bildpunkten \bar{a}_- die un-eigentlichen Geraden $\bar{\mathfrak{A}}_-$ des hyperbolischen Raumes so zugeordnet werden, daß entsprechende Punkte \bar{a}_+ und \bar{a}_- konjugierte Geraden $\bar{\mathfrak{A}}_+$ und $\bar{\mathfrak{A}}_-$ darstellen.

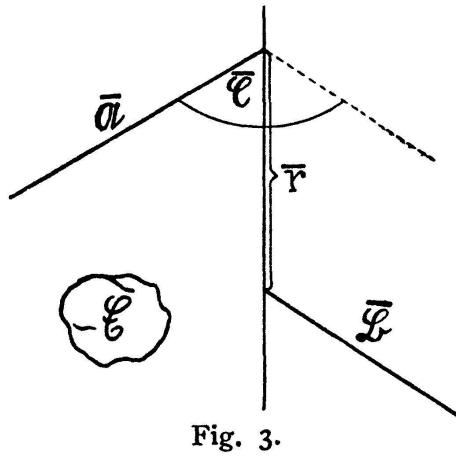
Zwei Geraden $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$ erfüllen die Inzidenz- bzw. die Orthogonalitätsbedingung $\mathcal{Q}(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ und $\mathcal{V}(\bar{a}, \bar{b}) = 0$, wenn ihre Bildpunkte auf einer Erzeugenden der Bildfläche $\mathcal{Q}_{(4)}^{(2)}$, bzw. polar in bezug auf die Fläche $\mathcal{V}_{(4)}^{(2)}$ liegen. Die Bildfläche $\mathcal{Q}_{(4)}^{(2)}$ ist Träger von ∞^5 Geraden und ∞^3 Ebenen, welche die ∞^5 Geradenbüschel und die ∞^3 Geradenbündel des hyperbolischen Raumes darstellen.

Die Bildpunkte aller Geraden, die zu einer Geraden $\bar{\mathfrak{A}}$ inzident sind, liegen auf einem 3-dimensionalen Kegel mit der Spitze im Bildpunkte \bar{a} . Dieser Kegel ist das Bild des *linearen Geradenkomplexes* der Geraden $\bar{\mathfrak{A}}$. Die ∞^2 Treffgeraden zweier Geraden $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$ bilden eine *lineare Kongruenz*, welche durch die gemeinsamen Bildpunkte der beiden Hyperkegel von \bar{a} und \bar{b} dargestellt ist.

Die Metrik der Liniengeometrie.

Die gemeinsamen Bildpunkte der beiden Flächen $\mathcal{Q}_{(4)}^{(2)}$ und $\mathcal{V}_{(4)}^{(2)}$ bilden das Absolute dieser Metrik. Diese ∞^3 Punkte sind die Bilder der ∞^3 Tangenten der absoluten Fläche des hyperbolischen Raumes. Die Metrik der Somengeometrie darf, von einer kleinen Änderung abgesehen, in die Liniengeometrie übernommen werden. Nach dem Fundamentaltheorem von de Saussure und Cailler, ist der komplexe Abstand zweier Somen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , die aus dem Protosoma \mathfrak{E} durch Umdrehung um zwei beliebige Geraden $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$ entstanden sind, doppelt so groß, wie der komplexe Abstand $\bar{r} + i\bar{\varphi}$ der

beiden Geraden $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$, die sich um den reellen Abstand \bar{r} und um den Winkel $\bar{\varphi}$ voneinander unterscheiden.



Die Metrik auf der Bildfläche $\phi_{(4)}^{(2)}$ geht in die Metrik der Liniengeometrie über, wenn wir den halben Abstand $\frac{r+i\varphi}{2}$ zweier Somen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} als Abstand $\bar{r}+i\bar{\varphi}$ ihrer Umdrehungssachsen $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$ einführen. Dann wird:

$$\phi(\bar{a}_+, \bar{b}_+) = \sin \bar{\varphi} \cdot \operatorname{sh} \bar{r}, \quad \psi(\bar{a}_+, \bar{b}_+) = \cos \bar{\varphi} \cdot \operatorname{ch} \bar{r}$$

und die Abstandsformel:

$$\operatorname{ch} \wedge_{\bar{a}_+ \bar{b}_+} = \operatorname{ch} (\bar{r} + i \bar{\varphi}) = \psi(\bar{a}_+, \bar{b}_+) + i \phi(\bar{a}_+, \bar{b}_+)$$

drückt den komplexen Abstand zweier Geraden durch ihre Koordinaten aus. Alle Geraden \bar{x} , die zu einer Geraden $\bar{\mathfrak{A}}_{\pm}$ orthogonal sind, erfüllen die Bedingung $\psi(\bar{a}_{\pm}, \bar{x}) = 0$ und wegen: $\psi(\bar{a}_{\pm}, \bar{x}) = \pm \phi(\bar{a}_{\mp}, \bar{x})$ bilden diese Geraden zugleich den linearen Geradenkomplex der konjugierten Geraden $\bar{\mathfrak{A}}_{\mp}$. Der Tagentialhyperkegel eines Punktes \bar{a}_{\pm} liefert das Bild des *Orthogonalkomplexes* der

Geraden $\bar{\mathfrak{A}}_{\mp}$. Die gemeinsamen Bildpunkte der beiden Hyperkegel der Punkte \bar{a}_+ und \bar{a}_- stellen die lineare Kongruenz aller Treffgeraden der beiden konjugierten Polaren $\bar{\mathfrak{A}}_+$ und $\bar{\mathfrak{A}}_-$ dar. Diese Kongruenz nennen wir die *Rektikongruenz*. Ihre Bildpunkte erfüllen die Bedingungen: $\Phi(\bar{a}, \bar{x}) = 0$, $\Psi(\bar{a}, \bar{x}) = 0$, d. h. ihre Geraden sind inzident und orthogonal zu den Geraden $\bar{\mathfrak{A}}_+$ und $\bar{\mathfrak{A}}_-$.

Liegen die Bildpunkte $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$ zweier Geraden auf einer Tangente an die Fläche $\Psi_{(4)}^{(2)}$, so wird: $\Phi(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ und $\Psi(\bar{a}, \bar{b}) = 1$, d. h. die beiden Geraden haben den Abstand null, und sie schneiden sich in einem Punkte der absoluten Fläche. Daraus folgt umgekehrt, daß zwei Somen, die aus dem Protosoma durch Umdrehung um zwei Geraden mit dem Abstande null entstanden sind, selber den Abstand null haben und sich also um eine Grenzkreisbewegung voneinander unterscheiden.

Allgemein läßt sich der Abstand zweier Somen mit Hilfe des Abstandes ihrer Schraubungssachsen ausdrücken. Der Abstand zweier Somen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ist nämlich durch die Formel:

$$ch \hat{a} b = ch \hat{a} e ch \hat{b} e - sh \hat{a} e \cdot sh \hat{b} e \cdot ch \hat{a} \hat{b}$$

gegeben, wenn darin die Abstände dieser Somen vom Protosoma, sowie der Abstand ihrer Schraubungssachsen, bekannt sind.

4. Die Somenmannigfaltigkeiten als Modelle der Nicht-Euklidischen Geometrien.

Die Darstellung der Liniengeometrie als Bestandteil der Somengeometrie wird uns die kinematische Deutung der Punktmanigfaltigkeiten auf der Bildfläche erleichtern. Die Punktmanigfaltigkeiten, welche den Einheitspunkt e_+ enthalten, können möglicherweise Bilder von Gruppen sein. Wenn wir daher nur Mannigfaltigkeiten mit dem Einheitspunkte berücksichtigen, so liegt darin keine Einschränkung, da ja die Wahl des Protosomas beliebig ist. Beson-

ders interessieren uns die 3-dimensionalen Bildräume; doch seien auch andere Mannigfaltigkeiten hier kurz beschrieben.

Sind z. B. \mathfrak{E} und \mathfrak{A} zwei inzidente Somen, so hat die *Bildgerade* $[e_+, a_+]$ zwei reelle, einen reellen, oder zwei imaginäre absolute Bildpunkte, je nachdem $\Psi^2(e_+, a_+) \geq 1$ ist. Aus

$$\Phi(e_+, a_+) = \sin \frac{\varphi}{2} \operatorname{sh} \frac{r}{2} = 0 \text{ und } \Psi(e_+, a_+) = \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{ch} \frac{r}{2}$$

folgt, daß die Bildgerade im ersten Falle alle Schiebungen und Umschraubungen, im zweiten Falle alle Grenzkreisbewegungen und im dritten Falle alle Drehungen um eine Gerade darstellt.

Die vier Bildpunkte e_+, e_-, a_+, a_- spannen stets einen 3-dimensionalen Raum im R_7 auf, solange das Soma \mathfrak{A} nicht mit dem Protosoma identisch ist. Dieser Raum $[e_+, e_-, a_+, a_-]$ hat mit der Bildfläche $\Phi_{(6)}^{(2)}$ eine zweidimensionale quadratische Mannigfaltigkeit $\Phi_{(2)}^{(2)}$ gemeinsam. $\Phi_{(2)}^{(2)}$ ist die *Bildfläche aller Schraubungen* um die Schraubungssachse der Bewegung \mathfrak{A} . Für eine parabolische Transformation A , d. h. für eine Grenzkreisbewegung \mathfrak{A} zerfällt die Bildfläche $\Phi_{(2)}^{(2)}$ in ein Ebenenpaar, dessen Schnittgerade eine absolute Gerade ist. Dieses Ebenenpaar stellt alle parabolischen Transformationen mit demselben Fixpunkt dar.

Die Bildräume.

Der durch die vier Bildpunkte e_+, a, b, c bestimmte Raum ist dann ein Bildraum der Bildfläche $\Phi_{(6)}^{(2)}$, wenn die vier Somen $\mathfrak{E}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ je paarweise inzident sind. Verlangen wir außerdem noch von den vier Somen, daß sie paarweise orthogonal sind zueinander, d. h. daß sich also je zwei unter ihnen um eine Umdrehung von einander unterscheiden, so geht das Tetraeder (e_+, a, b, c) in ein Polartetraeder inbezug auf die Fläche $\Psi_{(6)}^{(2)}$ über. Dieses erfüllt die 12 Bedingungen:

$$\Phi(e_+, a) = \Phi(e_+, b) = \Phi(e_+, c) = 0, \quad \Psi(e_+, a) = \Psi(e_+, b) = \Psi(e_+, c) = 0, \\ \Phi(b, c) = \Phi(a, c) = \Phi(a, b) = 0, \quad \Psi(b, c) = \Psi(a, c) = \Psi(a, b) = 0.$$

Der Bildraum $[e_+, a, b, c]$ schneidet die Fläche $\Psi_{(6)}^{(2)}$ in einer Fläche $\Psi_{(2)}^{(2)}$ zweiter Ordnung. Diese stellt lauter singuläre Transformationen dar, und als absolute Fläche des betreffenden Bildraumes bestimmt sie dessen Metrik. In ihrer Form

$$\Psi_{(2)}^{(2)}(x, x) = x_0^2 + \Psi(a, a)x_1^2 + \Psi(b, b)x_2^2 + \Psi(c, c)x_3^2$$

treten die Koeffizienten $\Psi(a, a), \Psi(b, b), \Psi(c, c)$ mit den Werten ± 1 oder 0 auf, je nachdem positive oder negative Bildpunkte oder gar Bildpunkte singulärer Transformationen als Eckpunkte des Tetraeders zugelassen werden. Dadurch können sämtliche Raumtypen, die auf der Bildfläche möglich sind, erreicht werden.

Es ist nun zu untersuchen, welche von den eben erwähnten Raumtypen durch e_+ Bilder von Gruppen sind und welche nicht. Durch die beiden zu \mathfrak{E} inzidenten und orthogonalen Somen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sind zwei Umdrehungen bestimmt, die in der einen oder andern Reihenfolge $C = A \cdot B$ bzw. $C' = B \cdot A$ ausgeführt, zwei entgegengesetzte Bewegungen \mathfrak{C} und \mathfrak{C}' ergeben, denn es ist: $C^{-1} = (A \cdot B)^- = = B^{-1} A^{-1} = B \cdot A = C'$. Sind die beiden Somen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} auch zueinander inzident, schneiden sich also ihre Umdrehungssachsen, so wird

$$-\Phi(a, b) = \Phi(e_+, c) = \Phi(e_+, c') = 0$$

und folglich auch $\Phi(c, c) = 0$. Zwei Umdrehungen in verschiedener Reihenfolge um zwei sich schneidende Geraden ausgeführt, ergeben zwei zu \mathfrak{E} und zueinander inzidente Somen, die entgegengesetzte Bewegungen darstellen. Schließlich verlangen wir von den beiden Somen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} noch, daß sie zueinander orthogonal seien. Dann schneiden sich ihre Umdrehungssachsen senkrecht, und aus $-\Psi(a, b) = \Psi(e_+, c) = \Psi(e_+, c') = 0$ folgt die Identität $C' = C^{-1} = C$ der beiden Somen \mathfrak{C} und \mathfrak{C}' . $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$ ist also wieder eine Umdrehung, die sich von \mathfrak{A} um die Umdrehung \mathfrak{B} , von \mathfrak{B} aber um die Umdrehung \mathfrak{A} unterscheidet. Demnach sind die vier Somen $\mathfrak{E}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und \mathfrak{C} paarweise inzident und orthogonal, und ihre Umdrehungssachsen schneiden sich rechtwinklig in einem Punkte. Die Umdrehungen um zwei sich senkrecht schneidende Geraden sind kommutativ und ergeben

die Umdrehung um die, die beiden andern in ihrem Schnittpunkte senkrecht schneidende Gerade.

Von der Bildebene $[e_+, a, b]$ bzw. vom Polardreieck (e_+, a, b) ausgehend, kommen wir so zum Tetraeder (e_+, a, b, c) , dessen Eckpunkt c Bildpunkt des Produktes $AB = BA$ ist, und aus dem eben Gesagten folgt, daß dieses Tetraeder auch ein Polartetraeder ist. Ein solches Tetraeder wollen wir ein *polares Gruppentetraeder* nennen, um damit an seine Entstehung zu erinnern.

Die Gruppeneigenschaft kann nun für solche Bildräume nachgewiesen werden, deren Polartetraeder ein polares Gruppentetraeder ist. In einem solchen Raum ergeben sich die Koordinaten des Bildpunktes x'' der Transformation $X'' = X \cdot X'$, als bilineare Zusammensetzung der Koordinaten von x und x' , aus dem Verknüpfungsgesetze

$$\begin{aligned} x''_0 &= x_0 x'_0 - \Psi(a, a) x_1 x'_1 - \Psi(b, b) x_2 x'_2 - \Psi(c, c) x_3 x'_3 \\ x''_1 &= x_0 x'_1 + x_1 x'_0 + (x_2 x'_3 - x_3 x'_2) \Psi(b, b) \\ x''_2 &= x_0 x'_2 + x_2 x'_0 - (x_1 x'_3 - x_3 x'_1) \Psi(a, a) \\ x''_3 &= x_0 x'_3 + x_1 x'_2 - x_2 x'_1 + x_3 x'_0 \end{aligned}$$

Diese Bildräume stellen nicht-kommutative Gruppen dar. Liegen die beiden Bildpunkte x und x' auf der Polarebene von e_+ und polar zueinander in bezug auf die absolute Fläche $\Psi^{(2)}$, so muß $x_0 = x'_0 = o$ und $\Psi(a, a) x_1 x'_1 + \Psi(b, b) x_2 x'_2 + \Psi(c, c) x_3 x'_3 = o$ sein, als Polarform des absoluten Kegelschnittes auf der Polarebene von e_+ . Für solche Bildpunkte wird das Gruppengesetz kommutativ.

Obwohl jedes polare Gruppentetraeder ein Polartetraeder ist, ist umgekehrt nicht jedes Polartetraeder ein polares Gruppentetraeder. Einerseits war der Bildpunkt c durch $C = AB = BA$ eindeutig bestimmt und mit ihm auch das polare Gruppentetraeder. Andererseits hat c als Eckpunkt des Polartetraeders nebst den 6 linearen Inzidenz- und Orthogonalitätsbedingungen noch die quadratische Bedingung $\Phi(c, c) = o$ zu erfüllen. Es sind also zwei Bildpunkte

möglich, nämlich c_+ und c_- , und dem entsprechend gibt es zum Polardreieck (e_+, a, b) zwei verschiedene Polartetraeder. Diese spannen verschiedene Bildräume auf, denn sonst müßten c_+ und c_- demselben Bildraume angehören, d. h. auch die Gerade $[c_+, c_-]$ wäre eine Gerade der Bildfläche $\Phi_{(6)}^{(2)}$, was nur bei einer singulären Transformation C möglich ist. Von den beiden Polartetraedern über der Ebene $[e_+, a, b]$ ist aber nur das eine ein polares Gruppentetraeder.

Ueber einer Ebene $[c_+, a, b]$ lassen sich, insofern a und b nicht absolute Bildpunkte sind, stets zwei Bildräume aufspannen, von denen der eine mit dem polaren Gruppentetraeder das Bild einer Gruppe ist, während der andere mit dem Polartetraeder eine Somenmannigfaltigkeit ohne Gruppencharakter darstellt.

Es sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

I. a_+, b_+, c_+ . Alle Eckpunkte des Polartetraeders sind positiv und wegen $C_+ = A_+$; B_+ liegt ein polares Gruppentetraeder vor, dessen Bildraum also eine Gruppe darstellt. Es gilt das Verknüpfungsgesetz mit den Koeffizienten $\Psi(a, a) = \Psi(b, b) = \Psi(c, c) = +1$. Dieser Raum mit der absoluten Fläche:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

besteht aus lauter positiven Bildpunkten. Die Polarebene von e_+ liefert das Bild der Bewegungssachsen. Auf ihr bilden die drei Punkte a_+, b_+, c_+ ein Polardreieck. Ihnen entsprechen drei eigentliche, sich in einem Punkte senkrecht schneidende Geraden. Die Polarebene stellt ein Geradenbündel dar, dessen Träger ein eigentlicher Punkt ist. Von den Bildgeraden dieses Raumes ausgehend, schließen wir:

Die elliptische Geometrie läßt sich auf die Gesamtheit aller Drehungen um die Geraden eines Bündels, dessen Träger ein eigentlicher Punkt ist, abbilden.

In der Gaußschen Ebene lassen diese Transformationen einen imaginären Kreis invariant. Ein Beispiel liefert die Gruppe der Kugeldrehungen.

II. $a_- b_- c_+$. Dieser Bildraum besitzt ebenfalls ein polares Gruppentetraeder und ist somit das Bild einer Gruppe. Das Verknüpfungsgesetz S. 58 ist mit den entsprechenden Koeffizienten zu übernehmen. Die absolute Fläche hat die Form

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2.$$

Den Bildpunkten a_-, b_-, c_+ entsprechen eine eigentliche und zwei uneigentliche Geraden, die sich senkrecht schneiden. Die Polarebene von e_+ stellt ein Geradenbündel mit einem uneigentlichen Träger dar, und der Bildraum ist das Bild aller Drehungen um die Geraden dieses Bündels. Dual übersetzt heißt das:

Die Geometrie eines Raumes mit der absoluten Fläche

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$$

läßt sich auf die Bewegungen der hyperbolischen Ebene abbilden.

Sind auch die negativen Punkte dieses Raumes zugänglich, so sind sie durch die Umschraubungen um die Geraden dieser hyperbolischen Ebene darzustellen. Diese Transformationen lassen in der Gaußschen Ebene einen reellen Kreis invariant.

III. $a_+ b_+ c_-$. Das zu (e_+, a_+, b_+, c_+) gehörende zweite Polartetraeder (e_+, a_+, b_+, c_-) über der Ebene $[e_+, a_+, b_+]$ ist kein Gruppentetraeder. Die absolute Fläche dieses Raumes hat die Form:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

Die Polarebene von e_+ ist das Bild aller eigentlichen und uneigentlichen Geraden einer hyperbolischen Ebene. Diesem Bildraume entsprechen somit die Drehungen um sämtliche Geraden einer hyperbolischen Ebene, oder auch die Schiebungen längs den Geraden eines Bündels mit einem uneigentlichen Punkte als Träger.

Die Geometrie des hyperbolischen Raumes läßt sich auf die Drehungen um die Geraden einer hyperbolischen Ebene und auf die Schiebungen längs den orthogonalen Geraden dieser Ebene abbilden.

Die Umschraubungen um diese letzteren Geraden sind durch die negativen oder uneigentlichen Punkte des Bildraumes dargestellt.

IV. $a_- b_- c_-$ Das zu II gehörende zweite Polartetraeder ist kein Gruppentetraeder.

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

ist die absolute Fläche dieses Raumes. Aus lauter negativen Bildpunkten bestehend, stellt die Polarebene von e_+ alle Geraden einer uneigentlichen Ebene des Somenraumes dar. Der Bildraum IV ist das Bild aller Drehungen um diese Geraden, oder:

Die Geometrie des hyperbolischen Raumes lässt sich auch auf die Schiebungen längs den Geraden eines Bündels mit einem eigentlichen Punkt als Träger abbilden.

Die uneigentlichen oder negativen Punkte dieses Raumes stellen die Umschraubungen um die Geraden dieses Bündels dar.

Die hyperbolische Geometrie lässt sich nicht auf eine Gruppe abbilden.

Die bis dahin behandelten Bildräume wurden aus einer Bildebene $[e_+, a, b]$ vermittelst des Polartetraeders oder des polaren Gruppentetraeders konstruiert. Ist diese Ebene eine Tangentialebene an die Fläche $\Psi_{(6)}^{(2)}$, oder das Bild einer Gruppe, so wird die erste, bzw. die zweite Methode unfruchtbar. Ganz unmöglich wird es, mit Hilfe der beiden Methoden einen Raum zu entwickeln, wenn die Ebene beides zugleich ist, und ein Raum, der lauter solche Bildebenen hat und keine andern, wäre überhaupt nicht erreichbar. Deshalb haben wir diese Bildebenen ausgeschlossen und von a und b verlangt, daß sie nur Bildpunkte nicht-singulärer Transformationen sein dürfen. Lassen wir nun auch Bildpunkte singulärer Transformationen zu, und bezeichnen wir diese mit dem Index 0, so ergeben sich noch zwei weitere Raumtypen, nämlich:

V. $a_+ b_0 c_0$. Die beiden Bildpunkte c_0 und b_0 stellen zwei sich schneidende Tangenten der absoluten Fläche des Somenraumes dar. Die Polarebene von e_+ ist somit das Bild des Geradenbündels mit den Schnittpunkten von b_0 und c_0 als Träger. Die absolute Fläche

$$x_0^2 + x_1^2$$

zerfällt in zwei imaginäre Ebenen, deren Schnittgerade reell ist.

Ein solcher Raum kann auf die Drehungen um die Geraden eines Bündels, mit einem Punkte der absoluten Fläche als Träger, abgebildet werden.

Von den Bildebuden ist nur diejenige durch die absolute Gerade das Bild einer Gruppe. $C_0 = A_+ \cdot B_0$ muß daher von B_0 verschieden sein. Die betreffende Mannigfaltigkeit hat Gruppencharakter, und das Gruppengesetz gilt mit den Koeffizienten

$$\Psi(a, a) = +1, \quad \Psi(b, b) = \Psi(c, c) = 0.$$

VI. $a - b_0 c_0$. Die Polarebene von e_+ stellt alle Geraden einer Tangentialebene an die absolute Fläche des Somenraumes dar. Die absolute Fläche

$$x_0^2 - x_1^2$$

des Bildraumes zerfällt in zwei reelle Ebenen. Ein solcher Raum ist das Bild aller Drehungen um die Geraden einer Tangentialebene an die absolute Fläche. Oder:

Ein Raum mit der absoluten Fläche $x_0^2 - x_1^2 = 0$ kann auf die Schiebungen längs den Geraden eines Bündels abgebildet werden, wenn dessen Träger ein Punkt der absoluten Fläche des Somenraumes ist.

Da jede Bildebene dieses Raumes eine Gruppe darstellt, ist ein Gruppentetraeder nicht möglich, und der Raum ist doch das Bild einer Gruppe. Den uneigentlichen Bildpunkten dieses Raumes entsprechen die Umschraubungen um die Geraden jenes Bündels.

Aus den kinematischen Erklärungen der Bildräume kann rückwärts geschlossen werden, daß diese ∞^3 Räume durch e_+ zwei Scharen bilden. Zu der einen Schar gehören die Räume der Art I, II und V, die durch ein Gruppentetraeder aufgespannt werden können und die Drehungen um die Geraden eines Bündels darstellen. Die andere Schar enthält die Räume vom Typus III, IV und VI, die nur durch ein Polartetraeder dargestellt werden können. Sie vertreten die Schiebungen längs den Geraden eines Bündels. Daraus folgt, daß zwei Räume derselben Schar stets eine Bildgerade, zwei Räume verschiedener Scharen aber eine Bildebene gemeinsam haben.

Diejenigen Bildräume stellen Gruppen dar, deren absolute Flächen so beschaffen sind, daß ihre Diskriminante positiv oder gleich null ist. Für einen negativen Wert der Diskriminante liegt keine Gruppe vor.

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß eine Bildebene, die eine Gruppe darstellen soll, notwendigerweise eine Tangentialebene an die Fläche $\Psi_{(6)}^{(2)}$ sein muß. Denn über einer Ebene, die nicht eine Tangential-ebene ist, lassen sich stets zwei Polartetraeder aufspannen, von denen das eine ein Gruppentetraeder ist. Diese Bedingung für die Bild-ebene ist jedoch nicht hinreichend.

Durch die Abbildung der Gruppe L_6 auf die Mannigfaltigkeit $\Phi_{(6)}^{(2)}$ haben sich die Modelle der nicht-euklidischen Geometrien in einfacher Weise ergeben. Zudem liefert uns diese Abbildung ein gutes Beispiel, geometrische Begriffe in der Gruppentheorie und gruppentheoretische Begriffe in der Geometrie zu deuten. Z. B. würde das Produkt $X'' = X \cdot X'$, resp. das Gruppengesetz S. 58, als Transformation des betreffenden Bildraumes aufgefaßt, in demselben eine Bewegung bedeuten, da sie das Absolute invariant läßt. Begriffe wie Inversion, Permutation von Elementen würden als zentrische bzw. ebene Symmetrie gedeutet usw. Hingegen sind auf der Bildfläche $\Phi_{(2)}^{(2)}$ aller Schraubungen um eine Gerade die beiden Begriffe der geodätischen Linie nicht identisch. Durch die Integration einer infinitesimalen Transformation beschreibt der Einheitspunkt eine geodätische Linie im gruppentheoretischen Sinne. Durch die infinitesimale Parallelverschiebung des entsprechenden Fortschreitungsvektors entsteht die entsprechende geodätische Linie auf der Bildfläche. Diese beiden Linien decken sich im allgemeinen nicht. Die Ursache ihrer Verschiedenheit liegt darin, daß durch die beiden absoluten Geraden auf der Bildfläche $\Phi_{(2)}^{(2)}$, dieser Fläche eine Metrik auferlegt wird, die nicht mit der natürlichen Metrik auf derselben übereinstimmt. Die geodätische Linie der Gruppe ist das Bild einer Schraubung mit konstanter Steigung, während die geodätische Linie der Bildfläche eine Schraubung darstellt, deren Steigung stetig variiert.

Anschließend sei noch an einem Beispiel gezeigt, wie dem Operieren in einer Gruppe das Konstruieren in ihrem Bildraume ent-

spricht. Als Gruppenbild legen wir eine Tangentialebene mit den beiden absoluten Geraden U und V zu Grunde. Der Einheitspunkt, sowie die beiden Bildpunkte a und b sind gegeben. Die Bildpunkte c und c' der Produkte $C = A \cdot B$ bzw. $C' = B \cdot A$ sind zu konstruieren. Aus dem früheren läßt sich schließen, daß bei der Linksmultiplikation $A \cdot X$ oder $X \cdot A$ die eine, bzw. die andere absolute Gerade punktweise invariant bleibt. U sei diese Gerade für die Linksmultiplikation. Dann bleiben die absoluten

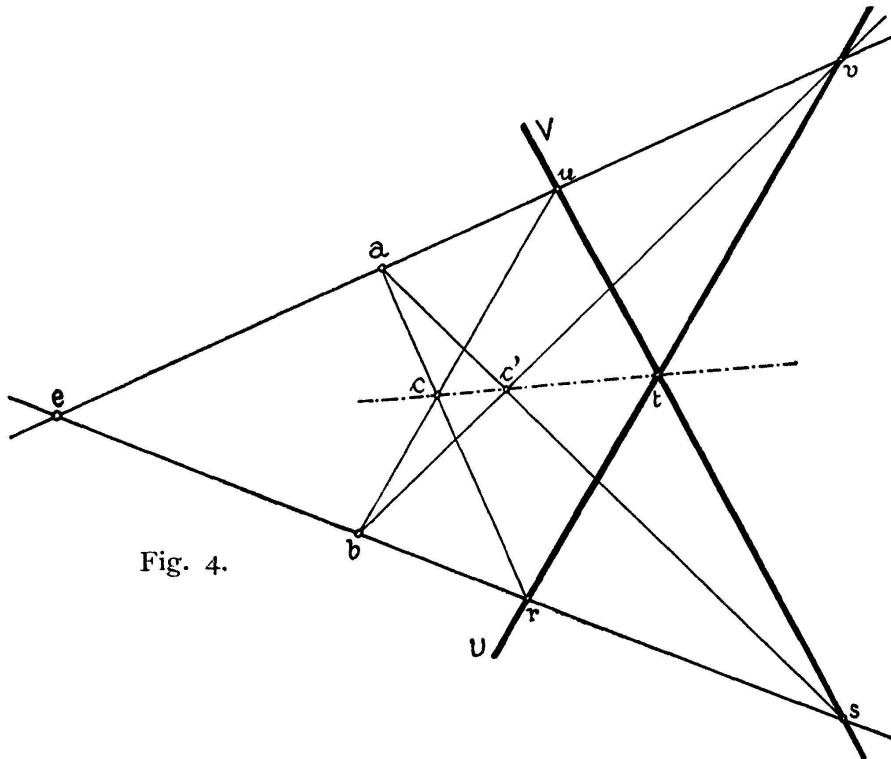


Fig. 4.

Punkte u und v der Geraden $[e, a]$ durch die Transformation $Y = A \cdot X$ invariant. Dabei wird e nach a verschoben, r als Punkt der Geraden U bleibt in Ruhe und die Gerade $[e, r]$ geht in die Gerade $[a, r]$ über. Die Gerade $[b, u]$ aber wird in sich transformiert, da sie nebst u einen Punkt mit U gemeinsam hat, der auch in Ruhe bleibt. Diese Transformation führt b in einen Punkt c über, der sowohl auf $[a, r]$ wie auf $[b, u]$ liegen muß, d. h. der Schnittpunkt der beiden Geraden $[a, r]$ und $[b, u]$ ist der Bildpunkt der Transformation C . Analog führt die Rechtsmultiplikation auf den Bildpunkt c' . Die beiden Transformationen C und C' sind um eine parabolische Transformation voneinander verschieden, weshalb die Gerade $[c, c']$ durch den Punkt t gehen muß.