

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 1 (1929)

**Artikel:** Quelques propriétés des figures d'équilibre d'une masse fluide hétérogène.  
**Autor:** Wavre, R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1135>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Quelques propriétés des figures d'équilibre d'une masse fluide hétérogène

Par R. WAVRE, Genève

## 1. Introduction

D'un article<sup>1)</sup> sur la rotation permanente des planètes, je voudrais dégager ici ce qui concerne le problème des figures d'équilibre.

Considérons une masse fluide dont les différentes particules s'attirent suivant la loi de Newton. Supposons que cette masse fluide soit en équilibre relatif dans sa rotation autour d'un axe.

Soit  $\rho$  la densité,  $p$  la pression,  $U$  le potentiel newtonien et  $\omega$  la vitesse angulaire. Si l'axe de rotation est l'axe des  $z$ , les trois équations de l'équilibre relatif s'écrivent :

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \omega^2 x, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \omega^2 y, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Il n'y a pas lieu de tenir compte d'une équation caractéristique puisque la masse est chimiquement hétérogène; cependant les équations (1) impliquent une relation de la forme  $\rho = f(p)$ .

En introduisant une constante  $K$ , le potentiel  $\Phi$  du champ de la pesanteur, et le potentiel  $Q$  de la force centrifuge

$$(2) \quad \Phi = \int \frac{dp}{\rho} \quad Q = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

les trois équations (1) se résument en la relation

$$(3) \quad \Phi = U + Q + K.$$

Soit  $\Delta$  l'opérateur de Laplace; faisons-le agir sur les deux membres de l'équation (1)

---

<sup>1)</sup> « Sur la rotation permanente des planètes et la géodésie ». Archives des Sciences physiques et naturelles 1928.

$$(4) \quad \Delta \Phi = \Delta U + \Delta Q.$$

L'équation (3) implique la relation (4) mais l'inverse n'est pas vrai. En effet, l'équation (4) équivaut à la relation plus générale que (3)

$$(5) \quad \Phi = U + Q + K + H,$$

où  $H$  est une fonction harmonique. Mais voici la remarque qui sert de clef à notre étude :

*Si la relation (4) est satisfaite partout et la relation (3) sur une surface fermée  $s$ , l'équation (3) sera satisfaite partout.*

En effet, la fonction harmonique  $H$  devrait être nulle sur  $s$ , elle serait identiquement nulle.

## 2. Les Conditions à la surface

Faisons coïncider la surface  $s$  avec la surface libre de notre planète. On devra avoir sur cette dernière

$$(6) \quad U + Q + K = 0;$$

c'est bien ce que devient l'équation (3), en supposant, ce qui ne restreint pas la généralité que  $\Phi$  soit nul sur la surface libre. Celle-ci est, en effet, à densité constante et à  $\Phi$  constant. Il s'agit donc de satisfaire à l'équation (4) dans l'astre et à l'équation (6) sur la surface extérieure.

En vertu de l'équation de Poisson, où  $\varepsilon$  est la constante de la gravitation universelle

$$\Delta U = -4\pi\varepsilon\rho$$

et de la relation que l'on vérifie immédiatement

$$\Delta Q = 2\omega^2,$$

l'équation (4) s'écrit

$$(7) \quad \Delta \Phi = -4\pi\varepsilon\rho + 2\omega^2.$$

Désignons par  $dT$  l'élément de volume, par  $r$  la distance d'un point potential à un point potentié; par  $\mathcal{F}, S, E$  l'intérieur de la masse, la surface libre et l'extérieur et faisons suivre une formule de l'une ou l'autre de ces lettres pour indiquer que la relation exprimée est valable dans la région correspondante. Enfin, dans ce qui suit, les intégrales triples s'étendront à la masse entière et les intégrales doubles à la surface libre.

De la relation (7), tirons la densité  $\rho$  et calculons formellement le potentiel  $U$ . On obtient ainsi

$$4 \pi \varepsilon \rho = 2 \omega^2 - \Delta \Phi$$

puis

$$(8) \quad 4 \pi U = 2 \omega^2 \iiint \frac{dT}{r} - \iiint \frac{\Delta \Phi}{r} dT \quad \mathcal{F}, S, E.$$

La fonction  $\Phi$  étant nulle sur  $S$  satisfait à la relation suivante, déduite d'une identité de Green:

$$(9) \quad \iiint \frac{\Delta \Phi}{r} dT = - \iint \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS \quad S, E$$

la dérivée normale de  $\Phi$  étant prise vers l'intérieur.

Le potentiel  $U$  peut s'écrire

$$(10) \quad 4 \pi U = 2 \omega^2 \iiint \frac{dT}{r} + \iint \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS. \quad S, E$$

Or, sur la surface  $S$ ,  $U$  doit satisfaire à la relation (6) qui devient

$$(11) \quad \iint \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS = -4 \pi (Q + K) - 2 \omega^2 \iiint \frac{dT}{r} \quad \mathcal{F}, S$$

Cette dernière relation vraie sur  $S$  est encore vraie dans  $\mathcal{F}$  car les deux membres sont harmoniques dans  $\mathcal{F}$ . A la constante  $K$  près, le second membre ne dépend que de  $S$  et de  $\omega$ ; c'est

d'autre part un potentiel  $V$  créé par une simple couche de densité  $\frac{d\Phi}{dn}$ . Le potentiel  $V$  est donc donné à l'intérieur de la masse; à l'extérieur il peut être défini par le principe de Dirichlet. Soit  $V_{\mathcal{F}}$  et  $V_E$  ces deux déterminations.

La densité de la simple couche sera donnée par la relation

$$\frac{d\Phi}{dn} = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{dV_{\mathcal{F}}}{dn_{\mathcal{F}}} + \frac{dV_E}{dn_E} \right).$$

A chaque valeur de  $K$  correspond une distribution de la densité et une seule. Or, on déduit avec Poincaré, très simplement, de l'équation (7) la relation

$$(12) \quad \iint \frac{d\Phi}{dn} dS = 4\pi \varepsilon M - 2\omega^2 T,$$

où  $M$  est la masse totale et  $T$  le volume de la planète. Nous rejoignons un raisonnement de Poincaré et nous nous contentons ici d'affirmer que la relation (12) détermine la constante  $K$  à partir de  $M$ . La dérivée normale  $\frac{d\Phi}{dn}$  n'est autre que l'intensité  $g$  de la pesanteur et les relations (10), (11) et (12) s'écrivent sous la forme équivalente

$$(10') \quad 4\pi U = 2\omega^2 \iiint \frac{dT}{r} + \iint \frac{g}{r} dS \quad S, E$$

$$(11') \quad \iint \frac{g}{r} dS = -4\pi(Q + K) - 2\omega^2 \iiint \frac{dT}{r} \quad \mathcal{F}, S$$

$$(12') \quad 4\pi \varepsilon M = 2\omega^2 T + \iint g dS.$$

De ces considérations on déduit:

I. Les équations (11') et (12') déterminent entièrement la pesanteur  $g_S$  sur la surface libre, à partir des éléments  $S, \omega, M$

$$g_S = F|S, \omega, M|.$$

II. Le potentiel à l'extérieur est donné par la formule (10') à partir des éléments  $S, \omega, g_S$

$$\dot{U}_E = F | S, \omega, g_S | .$$

III. La masse totale est donnée à partir des mêmes éléments par la formule (12')

$$M = F | S, \omega, g_S | .$$

IV. Le potentiel à l'extérieur est entièrement défini par les éléments  $S, \omega, M$

$$U_E = F | S, \omega, M | .$$

Cette dernière proposition n'est autre que le théorème de Stokes-Poincaré: Le potentiel à l'extérieur est entièrement défini par la surface libre, la vitesse angulaire et la masse totale.

*Mais la méthode suivie dans cet article donne en plus l'expression (10') du potentiel à l'extérieur de l'astre.*

Les éléments  $S, \omega, g_S$  sont géodésiquement mesurables et la formule (10') fournirait, pour le potentiel terrestre, une expression d'autant plus exacte que ces éléments auraient été mieux mesurés.

### 3. Les Conditions à l'intérieur

Le potentiel de la pesanteur n'est fonction que de  $\rho$ .

Les surfaces à  $\Phi$  constant sont à densité constante. Nous allons faire apparaître un élément intrinsèque des surfaces d'égale densité en transformant le laplacien de  $\Phi$ . D'une expression générale connue en analyse, liant le laplacien d'une fonction au paramètre différentiel du second ordre de Beltrami, on déduit la relation

$$(13) \quad \Delta \Phi = \frac{d^2 \Phi}{dn^2} - c \frac{d \Phi}{dn},$$

où les dérivées normales de  $\Phi$  sont prises vers l'intérieur des surfaces à  $\Phi$  constant et où  $c$  désigne le double de la courbure

moyenne de ces surfaces au point considéré. Les rayons de courbure principaux doivent être comptés positivement vers l'intérieur également. Moyennant ce résultat analytique, l'équation (7) s'écrit

$$(14) \quad \frac{d^2 \Phi}{dn^2} - c \frac{d \Phi}{dn} = -4 \pi \varepsilon \rho + 2 \omega^2.$$

Puis, en remplaçant la dérivée normale de  $\Phi$  par  $g$  on trouve une formule rigoureuse de l'accroissement de la pesanteur avec la profondeur :

$$(15) \quad \frac{dg}{dn} - c g = -4 \pi \varepsilon \rho + 2 \omega^2.$$

Cette relation montre qu'une mesure de l'accroissement de  $g$  suivant la verticale, en un point quelconque, équivaut à une mesure de la courbure moyenne de la surface d'égale densité passant par ce point.

*Remarque:* La conception classique des fluides visqueux veut que la viscosité ne fasse que ralentir les glissements des particules du fluide les unes sur les autres; elle ne peut pas empêcher ces glissements s'ils ont tendance à se produire. De sorte que les figures d'équilibre d'un fluide visqueux sont les mêmes que celles d'un fluide parfait. La relation (7) qui s'appliquait à un fluide parfait s'applique encore dans l'état d'équilibre relatif à un fluide visqueux et elle ne nécessite nullement que toute la masse soit fluide; elle s'applique à tout fluide en équilibre relatif avec la planète envisagée. Il en est de même de la formule (15) de l'accroissement de  $g$  qui s'applique à la surface d'une eau dormante, d'un lac, ou d'une mer, abstraction faite des vagues.

Remarquons, enfin, que si l'équilibre relatif n'existait pas pour un fluide hétérogène parfait, il n'existerait pas non plus pour un fluide visqueux; mais alors les forces de frottement dégageraient indéfiniment une quantité de chaleur qui ne descendrait pas en deçà d'un certain minimum. C'est contraire au principe de la conservation de l'énergie. C'est là une preuve physique de l'existence des figures d'équilibre.

Partant de l'article cité plus haut, M. Dive a généralisé les formules (10') et (15). Elles s'étendent au cas d'une rotation permanente, où  $\omega$  n'est plus constant, mais peut varier d'un cercle parallèle à un autre.<sup>2)</sup> Mais reprenons le problème classique.

On sait, en vertu d'un important théorème de M. Lichtenstein<sup>3)</sup>, obtenu également par M. Plancherel, que les figures d'équilibre doivent avoir un plan de symétrie normal à l'axe de rotation. On sait, d'autre part, que la densité doit croître de la surface vers l'intérieur pour une raison de stabilité. Mais cela n'est pas impliqué par les équations (1). Nous supposerons, pour simplifier, que les figures d'équilibre envisagées ici soient de révolution, qu'elles aient la connexité de la sphère ainsi que toutes les surfaces d'égale densité et que la surface de densité maximum se réduise à un point. Ce sera le centre et l'on sait qu'il doit se trouver sur l'axe de rotation.

Nous appellerons *stratification* la répartition au point de vue strictement géométrique des surfaces d'égale densité et *stratification en un point P* la stratification dans une sphère de rayon arbitrairement petit centrée en  $P$ . Avec Liapounoff nous appellerons *loi des densités* la loi suivant laquelle varie la densité quand on passe d'une surface à une autre; et, enfin, *densité transformée* l'expression

$$\mathfrak{h} = -4\pi\varepsilon\rho + 2\omega^2.$$

Les surfaces d'égale densité seront caractérisées par un paramètre  $t$ . La loi des densités s'exprimera par  $\mathfrak{h}(t)$ . Le potentiel  $\mathcal{P}$  ne dépendra, lui aussi, que de  $t$ , puisqu'il ne dépend que de  $\rho$ .

Supposons construites les lignes de forces du champ de la pesanteur, elles forment avec les surfaces d'égale densité un système de trajectoires orthogonales. Il suffit ici de considérer un plan méridien. Soit, alors,  $\theta$  une coordonnée servant à repérer les lignes de forces;  $t$  et  $\theta$  forment un système de coordonnées curvilignes orthogonales. On peut donner à  $t$  et  $\theta$  une signification spéciale:

<sup>2)</sup> Pour (10') voir: Comptes rendus de l'Académie des sciences T. 187, p. 104, 1928. Pour (15) voir: Comptes rendus des séances de la société de physique et d'histoire naturelle de Genève. V. 45, n° I, 1928.

<sup>3)</sup> Mathematische Zeitschrift B. 28, H. 4, p. 635—640, 1928.

$t$  sera la distance, comptée sur l'axe de rotation, du pôle nord de la surface libre  $t = 0$ , à la surface  $t$  et  $\theta$  sera tel que  $\theta = 0$  représente l'axe polaire. Le coefficient  $g$  de la pesanteur devient fonction de  $t$  et de  $\theta$  ainsi que la dérivée suivante que nous représenterons par  $N$

$$(16) \quad \frac{dn}{dt} = N(t, \theta).$$

Sur l'axe polaire cette dérivée devient égale à l'unité. La relation

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{d\Phi}{dt} \frac{dt}{dn}$$

donne

$$g(t, \theta) = g(t, 0) \frac{dt}{dn}$$

d'où

$$(17) \quad \frac{dn}{dt} = \frac{g(t, 0)}{g(t, \theta)}.$$

Cette relation est bien connue, elle exprime une propriété appartenant à tout champ dérivant d'un potentiel. En dérivant par rapport à  $t$  cette équation et en tenant compte que l'on a, en vertu de (15)

$$(18) \quad \frac{dg}{dt} = (c g + h) \frac{dn}{dt}$$

on trouve, en posant encore  $g_0 = g(t, 0)$ ,  $c_0 = c(t, 0)$

$$(19) \quad \frac{d^2 n}{dt^2} = \frac{1}{g^3} [g^2 (c_0 g_0 + h) - g^2 (c g + h)].$$

La dérivée seconde (19) est ainsi déterminée à partir de chaque surface au moyen de la pesanteur, de la courbure moyenne et de la densité transformée calculées sur la surface même.

Reprenons maintenant la relation générale, vraie quelque soient les lignes de forces  $\theta'$  et  $\theta''$

$$(g N)_{\theta'} = (g N)_{\theta''}.$$

Dérivons par rapport à  $t$  les deux membres de cette équation, en tenant compte de (18). On trouve, après un calcul simple, la relation, où  $L$  désigne le logarithme népérien :

$$(20) \quad \frac{h}{g_o} = - \frac{(c N + \frac{d}{dt} L N)_{\theta'} - (c N + \frac{d}{dt} L N)_{\theta''}}{(N^2)_{\theta'} - (N^2)_{\theta''}}.$$

Cette relation est riche de conséquences. En effet, le premier membre ne dépend que de  $t$ ; posons

$$(21) \quad \frac{h}{g_o} = \Psi(t);$$

le second membre ne dépend que de la stratification. Il ne dépend même que de la stratification en un point, d'ailleurs quelconque, de la surface  $t$  puisque l'on peut prendre deux valeurs  $\theta'$  et  $\theta''$  aussi voisines que l'on veut. On peut donc considérer la fonction  $\Psi(t)$  comme déterminée par la stratification. Et l'on a en tout point

$$(22) \quad \frac{h}{g} = \Psi(t) \frac{dn}{dt}.$$

A. *Le rapport en un point P, de la densité transformée et de la pesanteur ne dépend que de la stratification en P.*

Puis, en revenant à la formule (18) qui s'écrit sur l'axe polaire

$$\frac{d g_o}{dt} = c_o g_o + h$$

et en remplaçant  $h$  par  $\Psi \cdot g_o$  on trouve

$$\frac{1}{g_o} \frac{d g_o}{dt} = c_o + \Psi$$

Intégrons et posons  $g_{oo} = g(o, o)$  et l'on obtiendra

$$(23) \quad g_o = g_{oo} e^{\int_o^t (c_o + \Psi) dt}$$

Enfin, les relations  $g N = g_o$  et  $h = g_o \Psi$  donnent en chaque point

$$(24) \quad g = g_{oo} \frac{dt}{dn} e^{\int_o^t (c_o + \Psi) dt}$$

$$h = g_{oo} \Psi e^{\int_o^t (c_o + \Psi) dt}$$

$g_{oo}$  n'est autre que la pesanteur au pôle de la surface libre; c'est aussi l'attraction en ce point.

B. *La pesanteur et la densité sont en chaque point entièrement déterminées par la stratification et l'attraction au pôle de la surface libre.*

Il y a un cas où la stratification ne détermine plus la fonction  $\Psi$ , c'est celui d'une stratification en sphères concentriques. On pouvait le prévoir à priori, puisque des sphères au repos peuvent être chargées arbitrairement sans que cela trouble l'équilibre absolu.

On peut montrer<sup>4)</sup> qu'il n'y a pas d'autre cas où  $\Psi$  reste indéterminée, si la densité varie d'une manière continue. En posant

$$X = N^2 \quad \text{et} \quad Y = c N + \frac{d}{dt} LN$$

les équations (20) et (21) montrent que l'on a

$$(25) \quad \Psi(t) = - \frac{Y_{\theta'} - Y_{\theta''}}{X_{\theta'} - X_{\theta''}}$$

---

<sup>4)</sup> Voir notre article cité plus haut.

quels que soient  $\theta'$  et  $\theta''$ . On a donc encore, quels que soient  $\theta, \theta', \theta''$

$$(26) \quad \frac{Y_{\theta''} - Y_{\theta}}{X_{\theta''} - X_{\theta}} = \frac{Y_{\theta'} - Y_{\theta}}{X_{\theta'} - X_{\theta}}$$

*Cette équation est d'ordre purement géométrique, elle est indépendante non seulement de la densité et de la pesanteur mais encore de la vitesse angulaire et de la masse totale. Elle exprime une condition nécessaire à laquelle doit satisfaire la stratification d'une figure d'équilibre.*

On peut donner du rapport  $\Psi$  une autre représentation.

Le symbole  $d$  représentera toujours une différentielle relative à un passage à  $\theta$  constant d'une surface  $t$  à une surface  $t + dt$ ; le symbole  $\delta$  représentera, au contraire, une différentielle relative à une variation  $\delta\theta$  à  $t$  constant. Le symbole  $D\sigma$  représentera une aire élémentaire quelconque d'une surface  $t$  qui détermine, par les normales élevées le long de son contour, une aire  $D\sigma + dD\sigma$  sur la surface  $t + dt$ . La théorie des surfaces nous fournit la relation :

$$c \, dn = - d L D\sigma.$$

Dès lors, on peut écrire, comme on le vérifie aisément

$$\frac{h}{g} = \frac{1}{2} \frac{\delta d L \frac{D\sigma}{dn}}{\delta dn}.$$

#### 4. Rapprochement des différentes conditions

Nous avons montré que l'on doit avoir dans toute la masse

$$(27) \quad \Delta \Phi = - 4 \pi \varepsilon \rho + 2 \omega^2$$

et sur la surface libre

$$(28) \quad U + Q + K = 0.$$

Ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes pour que les trois équations (1) soient satisfaites. De (27) nous avons déduit la condition équivalente

$$(29) \quad \frac{dg}{dn} = c g + h$$

et (28) est satisfaite si l'on donne à  $g$  sur la surface libre les valeurs déduites de  $S, \omega, M$  au moyen des équations (11') et (12')

$$(30) \quad g_S = F | S, \omega, M |$$

Ces conditions (29) et (30) équivalentes à (27) et (28) sont également nécessaires et suffisantes. Les valeurs  $g_S$  déterminent la dérivée  $\frac{dn}{dt}$  sur la surface libre

$$(30') \quad \frac{dn}{dt} = F | S, \omega, M |$$

D'autre part, la valeur (24) de  $g$

$$g(t, \theta) = \frac{g(0, 0)}{\frac{dn}{dt}} e^{\int_0^t (c_0 + \Psi) dt}$$

résout l'équation (29), comme on le vérifie aisément, pourvu que la fonction  $\Psi(t)$  existe. Or, la fonction  $\Psi(t)$  existe si la relation (26) est satisfaite.

*Pour que les équations (1) soient satisfaites à partir d'une surface  $S$ , d'une vitesse angulaire  $\omega$  et d'une masse totale  $M$  il faut donc et il suffit que l'équation purement géométrique (26) soit résoluble à l'intérieur de  $S$ , l'élément géométrique  $\frac{dn}{dt}$  prenant sur cette surface les valeurs limites déduites de  $S, \omega$  et  $M$ .*

Dans une publication ultérieure, je montrerai que cette condition s'exprime par une équation aux dérivées partielles du second ordre à résoudre à partir des données ordinaires de Cauchy-Kowalevska.

(Reçu le 1<sup>er</sup> août 1928.)