

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 1 (1929)

**Artikel:** Zentrale Verkettungen.  
**Autor:** Fischer, Anna  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1148>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zentrale Verkettungen

von ANNA FISCHER, Bern

Unter einer Verkettung versteht man eine endliche Schar von doppelpunktfreien geschlossenen Polygonen mit einer endlichen Anzahl Seiten. Zwei Verkettungen sind gleich, wenn sie sich ineinander deformieren lassen, ohne Änderung der Indikatrix des Raumes. Für unsere Zwecke muß jedoch die Deformation noch speziell definiert werden. Es darf dabei die Seitenlänge der Polygone nicht unter eine gewisse endliche Grenze sinken.

Das Problem der Verkettungen besteht nun im Folgenden: Man soll eine Methode angeben, die bei jeder Verkettung anwendbar ist und es gestattet, in einer endlichen Anzahl von Schritten zu entscheiden, ob zwei Verkettungen gleich sind oder nicht.

Durch Einführung der Fundamentalgruppe sind in neuerer Zeit in der Knotentheorie Fortschritte erzielt worden, die es z. B. erlauben, wenigstens in den einfachen Fällen der Torus- und Bretzelknoten eine Klassifikation vorzunehmen. Es schien mir daher von Interesse, die gruppentheoretische Methode auch auf die Untersuchung der Verkettungen zu übertragen. Es zeigt sich, daß die Fundamentalgruppe analog eingeführt werden kann wie bei den Knoten und daß die zulässigen Deformationen sich ebenfalls gruppentheoretisch charakterisieren lassen (§ 1). Im § 2 werden Verkettungen behandelt, die zu besonders einfachen Gruppen führen und es ergeben sich dabei die folgenden Resultate :

- 1) Als *zentrale Verkettungen* bezeichnen wir solche, bei denen  $n-1$  Kreise an einem  $n$ -ten hängen, ohne untereinander verkettet zu sein. Ihre Fundamentalgruppe ist gegeben durch  $n$  Erzeugende  $A, B, \dots, N$  und die definierenden Relationen

$$(I) \quad A \xleftrightarrow{} B, C, \dots, N.$$

(Der doppelte Pfeil ist das Zeichen für die Vertauschbarkeit). Das Zentrum der Gruppe lässt sich aus den definierenden Relationen sofort ablesen und die Verkettungen können durch Angabe der Invariante  $n$  klassifiziert werden.

- 2) Die *bizentralen Verkettungen* bestehen aus  $n$  unverketteten Kreisen, die von weiteren  $p$  Kreisen umschlungen werden, welche untereinander wiederum nicht verkettet sind. Ihre Fundamentalgruppe

ist gegeben durch  $n + p$  Erzeugende  $A, B, \dots, N, a, b, \dots, p$  und die definierenden Relationen

$$(II) \quad \begin{array}{l} ap \dots cb \rightleftarrows A, B, \dots, N \\ AB \dots MN \rightleftarrows a, b, \dots, p. \end{array}$$

Diese Verkettungen lassen sich durch Angabe der zwei berechenbaren Invarianten  $n$  und  $p$  klassifizieren.

- 3) Bei beiden Arten von Verkettungen ist die Kommutativität der Operationen der Ausdruck für die Drehbarkeit der entsprechenden Kreise umeinander.

## § 1. Fundamentalgruppe und Deformationen

Jede Verkettung, wie auch jeder Knoten, lässt sich als ein geschlossener Zopf legen <sup>1)</sup>. Für einen solchen hat E. Artin <sup>2)</sup> die Einführung der Fundamentalgruppe ausführlich beschrieben. Diese Verkettungsgruppe kann aber nach K. Reidemeister <sup>3)</sup> auch direkt aus der Projektion der Verkettung abgelesen werden.

Ein geschlossenes unverknotetes Raumpolygon nennen wir einen Kreis. Soll der Uebergang von einer Verkettung zu einem geschlossenen Zopf möglich sein, so müssen in der Projektion alle Kreise der Verkettung gleich orientiert werden. Im Folgenden wird stets die Orientierung im Uhrzeigersinn als die positive betrachtet.

Es sei eine reguläre normierte Projektion der Verkettung gegeben. Eine Projektion ist regulär, wenn sie nur eine endliche Anzahl Doppelpunkte und keine mehrfachen Punkte enthält. Sie ist normiert, wenn bei jedem Doppelpunkt angedeutet wird, welcher Ast unter dem anderen verläuft. Die Fundamentalgruppe kann aus einer solchen Projektion wie folgt abgelesen werden: Jedem Kurvenstück von einer Unterkreuzung zu der nächsten wird eine erzeugende Operation zugeordnet. Dabei bezeichnen wir die zu demselben Kreis gehörenden Stücke mit dem gleichen Buchstaben. Um die definierenden Relationen aufzustellen, ziehen wir um jeden Kreuzungspunkt einen kleinen Kreis, der gleich orientiert wird, wie die Kreise der Verkettung. Werden die Äste  $A_\lambda$  und  $A_{\lambda+1}$  vom Aste  $B_\mu$  überkreuzt, so lautet die zugehörige definierende Relation:

---

<sup>1)</sup> Proc. Nat. Ac. U. S. A. vol. 9, 93.

<sup>2)</sup> Hamburg. Abhandl. 4 (1925), 47.

<sup>3)</sup> Hamburg. Abhandl. 5 (1926), 24.

$$A_{\lambda+1}^{-1} B_\mu^\varepsilon A_\lambda B_\mu^{-\varepsilon} = 1.$$

$\varepsilon$  ist  $\pm 1$ , je nachdem die Richtung von  $B_\mu$  nach einer positiven Drehung um den Kreuzungspunkt und um den Winkel  $\varphi < \pi$  mit der Richtung von  $A_\lambda$  zusammenfällt oder nicht.

Dehn<sup>4)</sup> hat bewiesen, dass die Fundamentalgruppe einer unverknoteten Raumkurve abelsch ist; es ist die freie Gruppe mit einer Erzeugenden. Dieser Satz lässt sich auf mehrere Kreise verallgemeinern: Aus der Art und Weise, wie die Fundamentalgruppe eingeführt wird, ist klar, daß  $n$  unverketteten Kreisen die freie Gruppe mit  $n$  Erzeugenden entspricht. Sind die  $n$  Kreise verkettet, so besteht die Fundamentalgruppe aus mehr als  $n$  Erzeugenden, zwischen denen die definierenden Relationen herrschen. In unseren Beispielen werden wir aber sehen, daß sich aus den definierenden Relationen alle Erzeugende bis auf  $n$  eliminieren lassen.

Die Fundamentalgruppe definiert eine Verkettung nicht vollständig. Immerhin sind die Relationen ein gewisser Ausdruck für die Art der Verkettung. Es dürfte daher von Interesse sein, wenigstens für die einfachen Beziehungen eine geometrische Deutung zu erhalten. Eine solche wird im Folgenden für die Kommutativität gegeben.

Aus der Fundamentalgruppe lassen sich auch die Unterketten einer Verkettung bestimmen. Man eliminiert zunächst aus den definierenden Relationen alle Erzeugende bis auf  $n$ , und erhält so neue Beziehungen. Empirisch bestimmt man die Unterketten dadurch, daß man die einzelnen Kreise der Reihe nach aufschneidet. Dem aufgeschnittenen Kreis entspricht aber als Erzeugende die Einheit. Man hat also in den letzten Relationen der Reihe nach jede Erzeugende der Einheit gleichzusetzen und erhält Beziehungen, welche die Gruppen der Unterketten definieren.

Bei der Deformation einer Verkettung können in der Projektion alle diejenigen Änderungen eintreten, die Reidemeister<sup>5)</sup> für Knoten beschrieben hat, nämlich:

- 1 a) In einen doppelpunktfreien Kurvenbogen legt sich eine Schleife.
- b) Der dazu inverse Vorgang.
- 2 a) Ein Ast schiebt sich über oder unter einen zweiten, so daß zwei neue Doppelpunkte entstehen.
- b) Der inverse Vorgang.

---

<sup>4)</sup> Math. Ann. 69 (1910), 137.

<sup>5)</sup> Hamburg, Abhandl. 5 (1926), 24.

- 3) Eine Kreuzung von drei Aesten mit drei Doppelpunkten wird so verändert, daß sich der eine Ast über einen Doppelpunkt hindurchschiebt.

Für alle diese Deformationen hat Reidemeister bewiesen, daß sie die Fundamentalgruppe nicht ändern. Bei den Verkettungen kommt noch eine vierte Möglichkeit hinzu.

- 4) Wir ordnen in der Projektion jedem Kreis eine Ebene zu. Die Deformation besteht nun darin, daß sich die Ebene eines Kreises um  $\pi$  dreht, bis sie wieder mit der Projektionsebene zusammenfällt. Es entstehen keine neuen Doppelpunkte, sondern es wird nur eine Ueberkreuzung und eine Unterkreuzung vertauscht. Wir werden auch kurz sagen: Der eine Kreis dreht sich um einen oder mehrere andere. (Fig. 1).

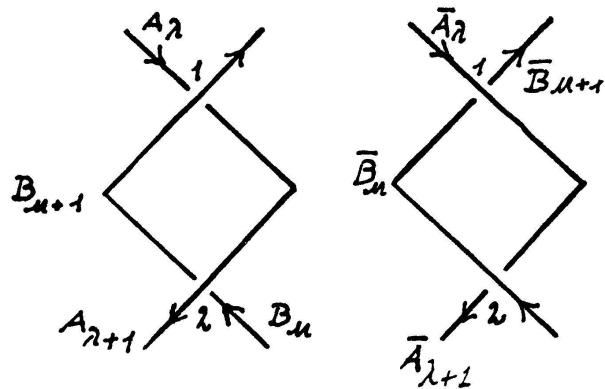


Fig. 1.

Wir wollen zeigen, daß auch diese Deformation die Fundamentalgruppe nicht ändert. Für die erste Stellung haben wir die zwei definierenden Relationen:

$$1. \quad A_{\lambda+1}^{-1} B_{\mu+1} A_{\lambda} B_{\mu+1}^{-1} = 1$$

$$2. \quad B_{\mu+1}^{-1} A_{\lambda+1} B_{\mu} A_{\lambda+1}^{-1} = 1.$$

Berechnen wir  $A_{\lambda+1}$  aus 1. und 2., so erhalten wir:

$$A_{\lambda+1} = B_{\mu+1} A_{\lambda+1} B_{\mu}^{-1} = B_{\mu+1} A_{\lambda} B_{\mu+1}^{-1}$$

und daraus:

$$A_{\lambda+1} B_{\mu}^{-1} = A_{\lambda} B_{\mu+1}^{-1}.$$

Hat sich der Kreis  $B$  um  $A$  gedreht, so muß auch seine Orientierung umgekehrt werden. Die Numerierung der Aeste von  $B$  ist unabhängig von  $A$  und den eventuellen weiteren Kreisen und daher vollständig willkürlich. Bezeichnen wir die neuen Operationen mit überstrichenen Buchstaben, so haben wir die Relationen:

$$1. \quad \overline{B}_{\mu+1}^{-1} \overline{A}_\lambda^{-1} \overline{B}_\mu \overline{A}_\lambda = 1$$

$$2. \quad \overline{A}_{\lambda+1}^{-1} \overline{B}_\mu^{-1} \overline{A}_\lambda \overline{B}_\mu = 1.$$

Berechnet man  $\overline{A}_\lambda$  aus 1. und 2., so erhält man:

$$\overline{A}_\lambda = \overline{B}_\mu \overline{A}_\lambda \overline{B}_{\mu+1}^{-1} = \overline{B}_\mu \overline{A}_{\lambda+1} \overline{B}_\mu^{-1}.$$

und daraus:

$$\overline{A}_\lambda \overline{B}_{\mu+1}^{-1} = \overline{A}_{\lambda+1} \overline{B}_\mu^{-1}.$$

Die Relation ist somit in beiden Fällen die gleiche. Bei unseren Verkettungen werden wir Gelegenheit haben, gerade diese Deformation besonders zu untersuchen. Es wird sich ergeben, daß sie mit der Vertauschbarkeit der Operationen in engster Beziehung steht.

## § 2. Zentrale Verkettungen

Betrachten wir zuerst die einfachste Verkettung von zwei Kreisen mit zwei Kreuzungspunkten. Die erzeugenden Operationen sind  $A$  und  $B$ , die definierenden Relationen:

$$1. \quad A^{-1}BAB^{-1} = 1 \quad BA = AB$$

$$2. \quad B^{-1}ABA^{-1} = 1 \quad AB = BA$$

Die Verkettungsgruppe ist die unendliche Abelsche Gruppe mit zwei Erzeugenden.

Diese Verkettung läßt sich in verschiedenen Richtungen verallgemeinern. Es sollen z. B.  $n - 1$  Kreise an einem  $n$ -ten hängen, ohne untereinander verkettet zu sein. (Fig. 2).

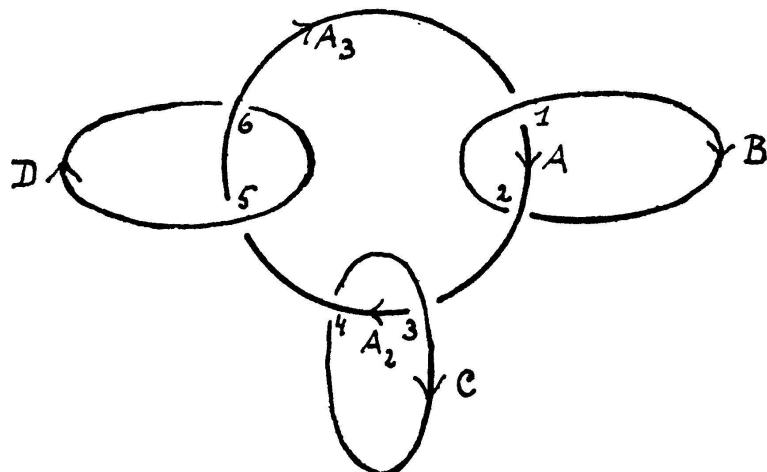


Fig. 2.

Da diese Gruppen bisher noch nicht untersucht worden sind, sei hier ein Beispiel für  $n = 4$  vollständig durchgerechnet.

Erzeugende Operationen:  $A, A_2, A_3, B, C, D$ .

Definierende Relationen:

1.  $A^{-1}BA_3B^{-1} = I$
2.  $B^{-1}ABA^{-1} = I$
3.  $A_2^{-1}CAC^{-1} = I$
4.  $C^{-1}A_2CA_2^{-1} = I$
5.  $A_3^{-1}DA_2D^{-1} = I$
6.  $D^{-1}A_3DA_3^{-1} = I$

Aus (1) und (2) ergibt sich:

$$BA_3 = AB \text{ und } AB = BA, \text{ also } A_3 = A.$$

Analog erhalten wir aus (5) und (6), indem  $A_3 = A$  eingesetzt wird:

$$DA_2 = AD \text{ und } AD = DA, \text{ d. h. } A_2 = A.$$

Es resultiert schließlich eine Gruppe mit vier Erzeugenden  $A, B, C, D$  und den definierenden Relationen:

$$(I) \quad A \rightleftarrows B, C, D.$$

Es ist klar, daß man für  $n$  Kreise eine Gruppe mit analogen Beziehungen erhält. Bestimmen wir die Unterketten! Setzen wir eine der  $n-1$  Erzeugenden  $B, \dots, N$  der Einheit gleich, so verschwindet aus den definierenden Relationen eine einzige, die übrigen bleiben unverändert. Setzen wir dagegen  $A = E$ , so geht die Gruppe in die freie Gruppe mit  $n-1$  Erzeugenden über, d. h. die Verkettung zerfällt.

Aus den Relationen (I) sieht man, daß die durch  $A$  erzeugte unendliche zyklische Gruppe das *Zentrum* der Verkettungsgruppe ist. Der

Bau dieser Gruppen ist vollständig durchsichtig und die zugehörigen Verkettungen, die wir *zentrale Verkettungen* nennen wollen, lassen sich durch Angabe von  $n$  klassifizieren. Bemerkenswert ist, daß das Zentrum als derjenige Kreis erscheint, um den alle übrigen drehbar sind. Aus dieser Tatsache läßt sich vermuten, daß die Kommutativität der gruppen-theoretische Ausdruck ist für die Beweglichkeit der Kreise umeinander.

Bevor wir auf diese Frage näher eintreten, soll noch eine Darstellung dieser Gruppen besprochen werden. Dehn<sup>6)</sup> ordnet jeder Gruppe einen Streckenkomplex, das sog. Gruppenbild, zu. Für die beschriebenen Gruppen lässt sich ein solches leicht konstruieren, was für Verkettungen im allgemeinen nicht der Fall ist. Man nimmt Streifen, deren Längsränder aus der Operation  $A$  bestehen. Die Querlinien sind  $B$ , resp.  $C, \dots, N$ .  $2n$  solcher Streifen werden so aneinander geheftet, daß in jedem Endpunkt der Operation  $A$  am Rande alle Operationen  $A, \dots, N, A^{-1}, \dots, N^{-1}$  zusammentreffen. Dies wiederholt man für jeden neu auftretenden Längsrand. Denkt man sich diese Konstruktion bis ins Unendliche fortgesetzt, so hat man das Gruppenbild einer zentralen Verkettung von  $n$  Kreisen.

Um die Frage der Kommutativität zu entscheiden, fügen wir zu der zentralen Verkettung von  $n$  Kreisen einen weiteren Kreis hinzu, und zwar einmal so, daß die Beweglichkeit der Kreise  $B, \dots, N$  um  $A$  nicht gehemmt wird, ein zweites Mal so, daß die Drehung nicht mehr möglich ist. (Fig. 3).

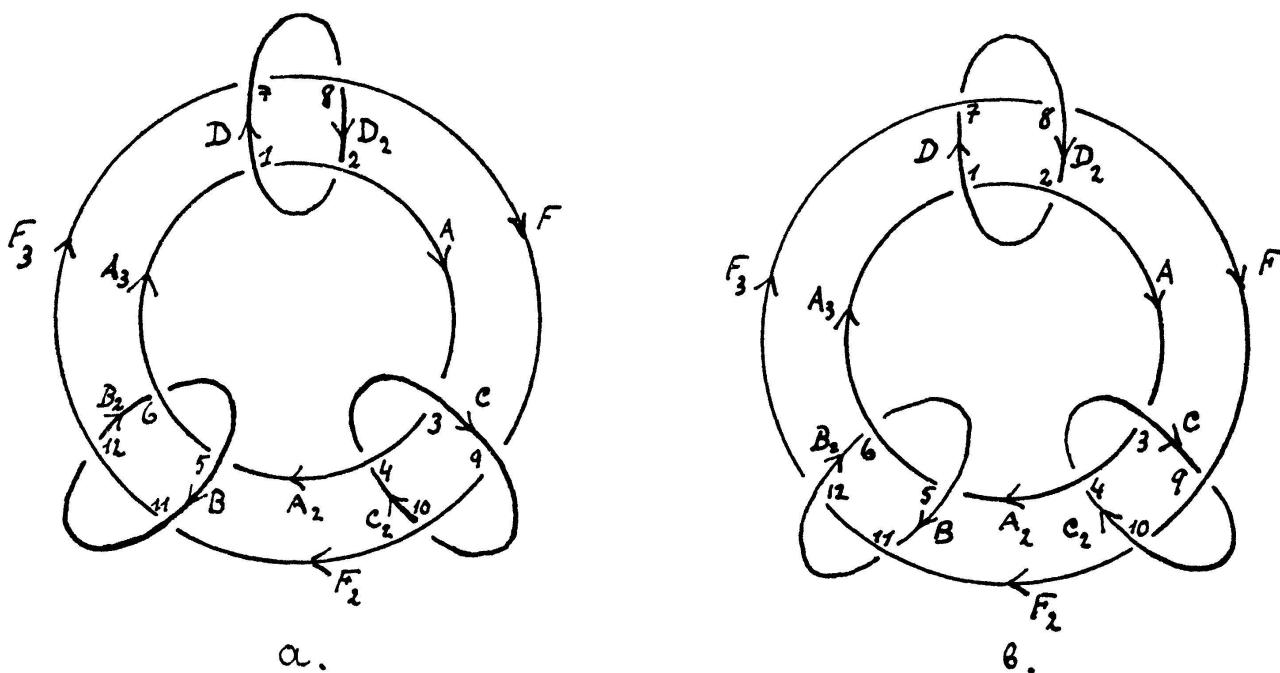


Fig. 3.

<sup>6)</sup> Math. Ann. 69, (1910), 137.

Wir beschränken uns auf den Fall  $n = 5$ . Das erste Mal erhalten wir als endgültige Relationen:

1.  $B.AF = AF.B$
2.  $C.AF = AF.C$
3.  $D.AF = AF.D$
4.  $A.DBC = DBC.A$
5.  $F.DBC = DBC.F$

Die Kommutativität von  $B, C, D$  mit  $A$  allein ist durch eine solche mit  $AF$  ersetzt. Aus der Figur ist aber auch sofort klar, daß die Drehung der einzelnen Kreise  $B, C, D$  nur gleichzeitig und in derselben Weise um  $A$  und  $F$  erfolgen kann. Der Relation (4) entspricht die Tatsache, daß  $B, C, D$  alle auf einmal um  $A$  gedreht werden können, indem man  $F$  ins Innere von  $A$  stülpt. Analoges gilt für (5). Untersuchen wir die Unterketten, die durch Aufschneiden von  $A$  oder  $F$  entstehen! Setzen wir  $A$  oder  $F$  gleich der Einheit, so erhalten wir wieder eine zentrale Verkettung mit  $F$  oder  $A$  als Zentrum.

Im zweiten Fall bleibt die Relation

$$A.DBC = DBC.A$$

unverändert, was nach dem vorher Gesagten ohne weiteres verständlich ist. Die übrigen kommutativen Eigenschaften verschwinden dagegen vollständig und machen komplizierteren Relationen Platz.

Nach diesen Beispielen darf man wohl annehmen, daß für zentrale Verkettungen und ihre Verallgemeinerung (Fig. 3 a), die wir *bizentrale Verkettungen* nennen wollen, die Kommutativität der Ausdruck ist für die Drehbarkeit der Kreise umeinander. Wir wollen dies nun noch allgemein beweisen.

### *Beweis.*

i. Sind die Kreise umeinander drehbar, so sind die entsprechenden Operationen kommutativ.

Die Verkettung sei eine bizentrale und bestehe aus  $n$  konzentrischen Kreisen,  $A, B, \dots, N$  und  $p$  sie umschlingenden Kreisen  $a, b, \dots, p$ . In der Projektion haben wir  $2pn$  Schnittpunkte und somit in der Verkettungsgruppe  $2pn$  definierende Relationen. Die Gruppe wird von  $2pn$  Erzeugenden gebildet:  $A, A_2, \dots, A_p, \dots, N, N_2, \dots, N_p, a, a_2, \dots, a_n, \dots, p, p_2, \dots, p_n$ . Wir numerieren die Schnittpunkte so, daß 1 bis  $2n$  sich

auf dem Kreise  $a$ ,  $2n+1$  bis  $4n$  auf dem Kreise  $b$ , usw.,  $(2p-2)n+1$  bis  $2pn$  auf dem Kreise  $p$  befinden; in  $1$  bis  $n$  soll  $a$  die Kreise  $A, B, \dots, N$  überkreuzen, usw. analog für die Kreise  $b, c, \dots, p$ . Dann lauten die definierenden Relationen:

$$\begin{aligned}
1. \quad & A^{-1} a A_p a^{-1} = 1 \\
2. \quad & B^{-1} a B_p a^{-1} = 1 \\
\cdot & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
\cdot & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
\cdot & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
n. \quad & N^{-1} a N_p a^{-1} = 1 \\
n+1. \quad & a_2^{-1} N a N^{-1} = 1 \\
n+2. \quad & a_3^{-1} M a_2 M^{-1} = 1 \\
\cdot & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
\cdot & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
\cdot & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
2n. \quad & a^{-1} A a_n A^{-1} = 1 \\
\cdot & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
\cdot & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
\cdot & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
2pn. \quad & p^{-1} A_p p_n A_p^{-1} = 1.
\end{aligned}$$

Aus diesen Relationen wollen wir wie gewohnt alle Erzeugende bis auf  $2pn$  eliminieren. Betrachten wir zunächst alle Schnittpunkte, die auf  $A$  liegen.

$$\begin{aligned}
1. \quad & A^{-1} a A_p a^{-1} = 1 \quad \text{daraus } A = a A_p a^{-1} \\
2n+1. \quad & A_2^{-1} b A b^{-1} = 1 \quad , \quad A_2 = b A b^{-1} \\
4n+1. \quad & A_3^{-1} c A_2 c^{-1} = 1 \quad , \quad A_3 = c b A b^{-1} c^{-1} \\
\cdot & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
\cdot & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
(2p-2)n+1. \quad & A_p^{-1} p A_{p-1} p^{-1} = 1 \quad , \quad A_p = p \dots c b A b^{-1} c^{-1} \dots p^{-1}
\end{aligned}$$

Setzt man dieses  $A_p$  in (1) ein, so erhält man:

$$A = a p \dots c b \cdot A \cdot b^{-1} c^{-1} \dots p^{-1} a^{-1}.$$

Analoge Beziehungen gelten für  $B, \dots, N$ .

Betrachten wir nun die Unterkreuzungsstellen von  $\alpha$ .

$$\begin{aligned}
 n+1. \quad & \alpha_2^{-1} NaN^{-1} = I \quad \text{daraus } \alpha_2 = NaN^{-1} \\
 n+2. \quad & \alpha_3^{-1} Ma_2 M^{-1} = I \quad , \quad \alpha_3 = MN\alpha N^{-1} M^{-1} \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 2n. \quad & \alpha^{-1} A\alpha_n A^{-1} = I \quad , \quad \alpha = AB \dots MN\alpha N^{-1} M^{-1} \dots B^{-1} A^{-1}
 \end{aligned}$$

Analoge Beziehungen erhält man für  $b, \dots, p$ . Die Fundamentalgruppe ist also schließlich bestimmt durch  $n+p$  Erzeugende  $A, B, \dots, N, \alpha, b, \dots, p$  und die definierenden Relationen:

$$\begin{aligned}
 \text{(II)} \quad & apo \dots cb \xleftrightarrow{A, B, \dots, N} \\
 & AB \dots MN \xleftrightarrow{\alpha, b, \dots, p}
 \end{aligned}$$

2. Sind die Operationen vertauschbar, so sind die entsprechenden Kreise umeinander drehbar.

Wir nehmen also an, daß die Relationen (II) bestehen. Greifen wir eine davon heraus, z. B.:

$$\alpha = AB \dots MN \cdot \alpha \cdot N^{-1} M^{-1} \dots B^{-1} A^{-1}.$$

Aus  $\alpha$  kann durch Transformation mit irgend einem Element der Gruppe stets wieder nur eine Erzeugende auf demselben Kreis entstehen. Wir dürfen also setzen:

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 &= NaN^{-1} \quad \text{oder } \alpha_2^{-1} NaN^{-1} = I \\
 \alpha_3 &= Ma_2 M^{-1} \quad , \quad \alpha_3^{-1} Ma_2 M^{-1} = I \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 \alpha_n &= Ba_{n-1} B^{-1} \quad , \quad \alpha_n^{-1} Ba_{n-1} B^{-1} = I
 \end{aligned}$$

Verfahren wir analog mit allen übrigen Relationen (II), so sehen wir, daß auf den Kreisen  $\alpha, b, \dots, p$  zuerst  $n$  Überkreuzungen und dann  $n$  Unterkreuzungen aufeinander folgen. Die Kreise sind also um die  $n$  Kreise  $A, B, \dots, N$  drehbar.

Damit ist der Beweis für zentrale und bizentrale Verkettungen vollständig erbracht. Es sei hier ausdrücklich bemerkt, daß der Zusammenhang zwischen Drehbarkeit und Kommutativität nicht nur für diese beiden Arten von Verkettungen besteht, sondern noch bei vielen anderen nach-

gewiesen werden kann, z. B. bei den offenen und geschlossenen Ketten von Kreisen. Die Vermutung liegt nahe, daß dies überhaupt für alle Verkettungen von unverknoteten Kurven gilt. Der allgemeine Beweis scheint sich aber rechnerisch etwas kompliziert zu gestalten und ist mir bisher noch nicht gelungen.

Aus den Relationen (II) folgt:

$$ap \dots cb \cdot AB \dots MN = AB \dots MN \cdot ap \dots cb.$$

Daraus ist ersichtlich, daß man mindestens entweder  $n$  oder  $p$  Kreise aufschneiden muß, damit die Verkettung zerfällt. Die Zahlen  $n$  und  $p$  sind somit einzeln Invarianten der Verkettungsgruppe und lassen sich aus den Relationen direkt ablesen. Durch Angabe von  $n$  und  $p$  können die bizentralen Verkettungen klassifiziert werden.

(Eingegangen den 20. August 1929)