

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	1 (1929)
<b>Artikel:</b>	Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen.
<b>Autor:</b>	Speiser, Andreas
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-1147">https://doi.org/10.5169/seals-1147</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen

Von ANDREAS SPEISER, Zürich

Während die ganzen transzendenten Funktionen in der neueren Mathematik intensiv und mit größtem Erfolg bearbeitet worden sind, ist das Studium ihrer inversen Funktionen nur relativ selten unternommen worden. Ich möchte in dieser Arbeit auf einige Probleme und Methoden hinweisen, die in dieses Gebiet gehören. In § 1 wird über die beiden wichtigen allgemeinen Sätze von W. Groß und F. Iversen berichtet, es folgt (§ 2) die Konstruktion einer Klasse von Riemannschen Flächen, deren Singularitäten, soweit sie im Endlichen liegen, isoliert sind; hierauf wird die Umgebung einer Singularität charakterisiert (§ 3) und die beiden Fälle der ganzen transzendenten Funktionen und der Funktionen mit Grenzkreis werden näher besprochen (§ 4). In § 5 wird auf die Umgebung einer Singularität ein Satz von Julia angewendet und gezeigt, wie man daraus Schlüsse auf ihre Abbildung durch die Funktion ziehen kann. Die §§ 6 und 7 enthalten einen Satz und ein Problem über die Unterscheidung des parabolischen und hyperbolischen Falles. Einen großen Teil der behandelten Fragen habe ich ausführlich mit Herrn Rolf Nevanlinna besprochen und ich möchte ihm auch an dieser Stelle für die mannigfaltigen Anregungen danken.

## § 1

Wenn man sich über eine ganze transzendente Funktion  $w = f(z)$  einen Ueberblick verschaffen will, kann man geometrisch auf zwei Weisen verfahren. Man kann erstens in der  $z$ -Ebene Fundamentalbereiche der Funktion aufzeichnen, und hierzu genügt es in den einfacheren Fällen, die reellen Züge der Funktion anzugeben und die Funktionswerte an wichtigen Punkten derselben zu notieren. Man kann zweitens in der  $w$ -Ebene die Riemannsche Fläche angeben, auf welcher die Umkehrfunktion  $z = \varphi(w)$  eindeutig ist. Der Vorzug der letzteren Methode besteht darin, daß der wesentlich singuläre Punkt  $z = \infty$  in Bestandteile aufgelöst erscheint, sodaß die Riemannsche Fläche als ein Mikroskop wirkt und die Umgebung dieser Stelle besser zu untersuchen gestattet. Die vollständige Kenntnis einer wesentlich singulären Stelle

liefert stets auch die Riemannsche Fläche der Umkehrfunktion, und umgekehrt, kennt man die letztere, so ist dadurch ein wichtiger Schritt in der Untersuchung der ersteren gemacht.

Aber die Riemannsche Fläche bietet verschiedene Schwierigkeiten. Schon ihr Aufbau ist keineswegs eindeutig festgelegt. Hat man nämlich für dieselbe Funktion zwei Flächen konstruiert, so sind sie durch die Funktion selber eineindeutig und konform auf einander bezogen, aber in der Verteilung der Punkte auf die verschiedenen Blätter der Fläche herrscht große Freiheit. Ferner können die Singularitäten, die endlichen Verzweigungspunkte und die Windungspunkte unendlicher Ordnung, sich häufen, es kann, wie W. Groß gezeigt hat, jeder Punkt der  $w$ -Ebene Häufungspunkt von Projektionen singulärer Punkte der über ihr ausbreiteten unendlichvielblättrigen Riemannschen Fläche sein. Man muß daher das Problem einschränken, wenn man hoffen will, weiter zu kommen. Zuvor möchte ich aber einige der wichtigsten bis jetzt bekannten allgemeinen Sätze erwähnen.

In der Nachbarschaft einer isolierten Singularität kann die inverse Funktion  $\varphi(w)$  nicht eindeutig sein. Denn sonst wäre die Singularität entweder ein Pol, dann würde sie das Verhalten von  $f(z)$  für  $z = \infty$  vollständig repräsentieren und diese Funktion wäre rational; oder die Singularität wäre eine wesentliche, was deshalb ausgeschlossen ist, weil der Wertevorrat von  $\varphi(w)$  in der Nachbarschaft nur ein Teil der einfach überdeckten  $z$ -Ebene ist, während aus dem Weierstraßschen Theorem folgt, daß die Funktion hier jedem Wert beliebig nahe kommen müßte. Falls die Singularität nicht isoliert ist, so kann man leicht aus dem Iversenschen Theorem (s. u.) beweisen, daß die Funktion nicht eindeutig sein kann in der Nachbarschaft eines *singulären Kontinuums*. Ob dies aber möglich ist, wenn die Singularitäten beispielsweise eine abgeschlossene nirgendsdichte Menge bilden, scheint mir noch nicht entschieden zu sein. *Isolierte* singuläre Stellen sind aber stets Verzweigungspunkte endlicher oder unendlicher Ordnung.

Man kann versuchen, die Riemannsche Fläche aus *Sternen* der inversen Funktion aufzubauen. Hierzu betrachte man die *Punktgruppen* von  $f(z)$ , d. h. die Gesamtheit der Stellen, an denen  $f(z)$  einen bestimmten Wert annimmt. Für jeden Punkt einer bestimmten Punktgruppe existiert die inverse Funktion und man erhält auf diese Weise Funktionselemente derselben, für die man den Stern bilden kann. Falls man durch Zusammenheftung solcher Sterne die ganze Riemannsche Fläche erhalten kann, so nenne ich die Punktgruppe eine *vollständige*. Ob jede ganze

transzendenten Funktion eine solche besitzt, ist noch nicht bewiesen; die Frage hängt eng zusammen mit dem Problem, ob  $\varphi(w)$  eine nichtabzählbare Menge von Singularitäten besitzen kann. Das Großsche Beispiel entscheidet hierüber nichts, denn auch von abzählbaren Singularitäten kann die Projektionsmenge in der  $w$ -Ebene überall dicht sein. Dagegen hat Gross folgenden Satz bewiesen:

*Jeder Stern der Umkehrfunktion einer im endlichen meromorphen Funktion überdeckt die ganze Ebene mit Ausnahme einer Nullmenge.*

Hieraus folgt insbesondere, daß die Singularitäten, welche die Strahlen des Sterns absperren, eine Punktmenge vom linearen Maß 0 liefern, falls man sie vom Sternzentrum aus auf die Peripherie des Einheitskreises projiziert.

Herr Iversen hat folgendes gezeigt:

*Es sei in  $w_0$  ein Funktionselement der inversen Funktion  $\varphi(w)$  gegeben und eine Kurve, welche  $w_0$  mit einem beliebigen Punkt  $w'$  der  $w$ -Ebene verbindet, dann gibt es einen Weg, der von  $w_0$  ausgeht, in beliebige Nähe von  $w'$  gelangt und dabei in einem beliebig schmalen Streifen um die Kurve bleibt, längs welchem sich das Funktionselement fortsetzen läßt bis in beliebige Nähe von  $w'$ .*

Zum Beweis kann man sich darauf beschränken, nachzuweisen, daß man ein Funktionselement, das irgendwo in einem Kreis der  $w$ -Ebene existiert, stets bis in beliebige Nähe des Zentrums dieses Kreises fortsetzen kann, ohne den Kreis zu verlassen. Herr R. Nevanlinna hat mir mitgeteilt, daß dieser Satz sich durch die von Valiron angegebene Methode, die sich in Bieberbach, Funktionentheorie, Bd. II, pg. 272, findet, ohne weiteres beweisen läßt. Man hat nur, falls  $a$  der Mittelpunkt des Kreises ist, die Funktion  $\frac{1}{f(z) - a}$  zu betrachten und zu beweisen, daß sie im Bildgebiet, das durch  $\varphi(w - w_0)$  und seine im Kreis verlaufenden Fortsetzungen in der  $z$ -Ebene entworfen wird, nicht beschränkt bleibt. Das leistet aber gerade die angegebene sehr elegante Ueberlegung.

Von diesem speziellen Satz gelangt man zu der allgemeinen Aussage, indem man für den Radius eine beliebig kleine Zahl annimmt und alsdann der Kurve entlang Kreise aneinanderreihet, so, daß der Mittelpunkt eines Kreises stets im Inneren des nächstfolgenden Kreises liegt. Indem man den Satz für jeden der endlichvielen Kreise anwendet, erhält man die allgemeine Aussage.

Man sieht leicht ein, daß sich die Sätze von Iversen und Groß ergänzen.

## § 2

Die Riemannschen Flächen, die ich im folgenden behandle, sind spezieller Natur. Algebraische Singularitäten der Umkehrfunktion sollen ausgeschlossen sein. Dies läßt sich bei einer beliebigen ganzen transzendenten Funktion  $g(z)$  dadurch erreichen, daß man bildet:

$$f(z) = \int_0^z e^{g(z)} dz$$

und  $f(z)$  untersucht.

Nun beginne ich mit einem Kreis vom Radius  $R > 1$ , dessen Mittelpunkt der Nullpunkt der  $w$ -Ebene sei. Ferner sollen von der Peripherie aus längs Kreisradien Schnitte angebracht sein, die alle außerhalb des Einheitskreises enden, und die Entfernung ihrer Endpunkte soll nirgends kleiner als 1 sein. An jedes der Ufer dieser Schnitte hängen wir neue Exemplare solcher Kreise an, welche ihrerseits endlich viele Einschnitte aufweisen, die an beliebigen Stellen angebracht sein können, aber sich niemals bis auf 1 nahe kommen können. Diese neue Fläche sei  $F_2$ . Nun verdoppele ich die Radien auf  $2R$ . Hierbei mögen an den Rändern neue Einschnitte zum Vorschein kommen, aber nur endlich viele und auch hier sei die Entfernung größer als 1. Die Ufer seien wieder mit neuen Blättern behaftet, so daß jetzt alle Ufer von  $F_2$  ins Innere gekommen sind. Die neue Fläche sei  $F_3$ . In dieser Weise fahre ich ins Unendliche fort, indem ich mir ein bestimmtes Gesetz gegeben denke, nach dem man die Fläche aufzubauen hat. Die einzelnen Flächen der Folge kann man auf Kreise der  $z$ -Ebene konform abbilden. Da sie alle von Geraden oder Kreisbögen begrenzt werden, bleibt die Abbildung auch am Rande konform bis auf die endlich vielen Punkte, wo der Rand Ecken aufweist. Dort verhält sich die Abbildung immer noch algebraisch. Den Punkt  $o$  denke ich mir auf den Punkt  $z = o$  abgebildet und die Ableitung sei hier = 1. Dann ist der Radius des Bildkreises in der  $z$ -Ebene bestimmt. Man beweist nun in bekannter Weise, etwa mit dem Bieberbachschen Flächensatz, daß die Bildradien zunehmen und daß die Riemannsche Fläche durch die Grenzfunktion entweder auf das Innere eines Kreises, oder auf die Ebene mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes (die punktierte Kugel) abgebildet wird.

Zunächst will ich einige Flächen angeben, bei denen die Frage, welcher der beiden Fälle eintritt, entschieden werden kann.

Es seien zwei eindeutige Funktionen gegeben

$$u = g(z) \text{ und } w = h(u).$$

Sie mögen entweder ganze transzendenten Funktionen der  $z$ - resp.  $u$ -Ebene sein, oder einen Grenzkreis besitzen. Ferner sollen beide ihre Gebiete auf Riemannsche Flächen der eben angegebenen Art abbilden. Ich betrachte nun ein Blatt der  $u$ -Ebene, das zur Riemannschen Fläche von  $u = g(z)$  gehört. Dieses Blatt sei aufgeschnitten längs der Schnitte, die bei der Bildung der Riemannschen Fläche angebracht worden waren. Durch die Funktion  $w = h(u)$  wird es auf ein volles Exemplar der zu  $h(u)$  gehörigen Riemannschen Fläche in der  $w$ -Ebene abgebildet und den Einschnitten des Blattes in der  $u$ -Ebene entsprechen Einschnitte in dieser Riemannschen Fläche. Auch ein Nachbarblatt in der  $u$ -Ebene für  $g(z)$  wird wieder auf ein volles Exemplar der Fläche von  $h(u)$  in der  $w$ -Ebene abgebildet, ferner hat man die beiden Exemplare längs der zusammengehörigen Ufer an einander zu heften. Indem man so fortfährt, erkennt man, dass sich die Riemannsche Fläche der zusammengesetzten Funktion

$$w = h(g(z))$$

in der  $w$ -Ebene zusammensetzt aus lauter vollen Exemplaren von Riemannschen Flächen der Funktion  $w = h(u)$ . Diese letzteren sind die Bausteine der ganzen Fläche. Nun lautet der Hauptsatz:

*Satz 1: Die Funktion  $h(g(z))$  ist dann und nur dann ganz transzendent, wenn  $g(z)$  und  $h(u)$  es sind.*

Denn wenn  $g(z)$  zum Grenzkreistypus gehört, so existiert auch  $h(g(z))$  nicht außerhalb des Grenzkreises in der  $z$ -Ebene. Wenn aber  $g(z)$  und  $h(g(z))$  ganz sind, dagegen  $h(u)$  zum Grenzkreistypus gehört, so bildet die Funktion  $\chi(h(g(z)))$ , wo  $\chi$  die inverse Funktion zu  $h$  ist, die  $z$ -Ebene auf das Innere des Grenzkreises ab, was nicht möglich ist.

Wir wollen noch untersuchen, was der *Picardsche Satz* hier besagt. Zu dem Zweck betrachten wir die Riemannsche Fläche der Modulfunktion, bei der in jedem Blatt die Stellen  $-1$  und  $+1$  Verzweigungspunkte unendlicher Ordnung sind: sie seien längs der reellen negativen und positiven Axe mit dem Punkt  $\infty$  verbunden. Die Funktion, welche

diese unendlich vielblättrige Fläche mit unendlich vielen Windungspunkten auf den Einheitskreis abbildet, sei  $\nu(w)$ , ihre Umkehrfunktion, also eine eindeutige Funktion vom Grenzkreistypus, sei  $\nu(z)$ . Jetzt möge die eindeutige Funktion  $f(z)$  die Werte  $+1$  und  $-1$  nicht annehmen. Dann ist auch  $\nu(f(z)) = g(z)$  eindeutig. Ferner wird

$$f(z) = \nu(g(z)).$$

Es ergibt sich, dass  $f(z)$  zusammengesetzt ist und dass die Riemannsche Fläche ihrer Umkehrfunktion sich aus vollen Exemplaren der Riemannschen Fläche der Modulfunktion  $\nu(v)$  aufbaut.  $f(z)$  ist also eine Funktion von ganz speziellem Typus.

Statt der Fläche der Modulfunktion nehme man eine algebraische Fläche vom Geschlecht größer als  $1$  und schneide sie auf. Hierauf bilde man durch Aneinanderheftung unendlich vieler solcher Flächen in bekannter Weise die universelle Überlagerungsfläche. Auch sie lässt sich auf den Einheitskreis abbilden. Daher gehört jede Riemannsche Fläche, welche sich aus vollen Exemplaren dieser universellen Überlagerungsfläche aufbauen lässt, zum Grenzkreistypus. Diese Aussage gibt das dritte Picardsche Theorem, wonach zwischen zwei ganzen transzendenten Funktionen keine abgebaute Gleichung von höherem als  $1$ . Geschlecht bestehen kann. Aber auch hier sieht man, daß man nur ein Kriterium für Riemannsche Flächen von ganz spezieller Art erhält. Insbesondere erhält man keine Auskunft über Funktionen, die nicht zusammengesetzt sind, d. h. über Riemannsche Flächen, die sich nicht aus einfacheren mehrblättrigen aufbauen lassen. Daß es aber solche einfache Funktionen gibt, folgt ohne weiteres aus dem früheren, denn man braucht bloß eine Riemannsche Fläche zu konstruieren mit unendlich vielen Windungspunkten, von denen aber keine zwei sich über derselben Stelle der  $w$ -Ebene befinden, so erhält man eine Funktion von der verlangten Beschaffenheit.

### § 3

Wir wollen nun zusehen, wie die Umgebung der wesentlichen Singularität  $z = \infty$  der ganzen transzententen Funktion resp. die Umgebung des Grenzkreises beim Grenzkreistypus sich in der Riemannschen Fläche spiegelt. Zu dem Zweck denken wir uns um einen Windungspunkt der Riemannschen Fläche einen Kreis vom Radius  $1$  abgegrenzt auf allen Blättern, die sich um diesen Punkt herumlegen. Wir erhalten eine

Schraubenfläche. Dasselbe machen wir mit jedem singulären Punkt und schließen auch den Punkt  $w = \infty$  ein, indem wir das Äußere eines genügend großen Kreises ausschneiden. Alle diese Schraubenflächen werden auf Gebiete abgebildet, die in der  $z$ -Ebene an die Grenze heranreichen. Sie liefern bei den ganzen transzenten Funktionen die asymptotischen Wege von  $f(z)$ . Ferner haben wir alle möglichen Folgen von aneinandergehefteten Blättern der Riemannschen Fläche zu nehmen. Jede solche unendliche Folge liefert ebenfalls ein Gebiet, das sich an die Grenze heranzieht und offenbar gehören die Juliaschen Wege zu solchen Gebieten.

Durch unsere Festsetzung, daß die singulären Stellen der Riemannschen Fläche einander nicht beliebig nahe kommen, werden andere asymptotische Wege, welche sich in der  $w$ -Ebene in immer engeren Schlingen um unendlich viele Singularitäten legen, deren Spur in der  $w$ -Ebene sich an einer Stelle häuft, ausgeschlossen.

Nun sei  $w = 0$  ein logarithmischer Windungspunkt der Umkehrfunktion  $\varphi(w)$ . Die Schraubenfläche, welche durch seine Umgebung  $|w| \leq 1$  gebildet wird, sei durch die Funktion

$$u = \log w$$

auf die linke Hälfte der  $u$ -Ebene abgebildet. Die Funktion

$$u = \log f(z)$$

vermittelt dann eine schlichte Abbildung dieser linken Halbebene auf ein Gebiet der  $z$ -Ebene, das sich, falls  $f(z)$  ganz ist, ins Unendliche erstreckt, und zwar entspricht dann  $z = \infty$  dem Wert  $u = \infty$ . Falls diese Abbildung für Werte von  $u$ , deren Realteil negativ groß ist, sich einer linearen Funktion  $az$  nähert, so sage ich: *der transzendenten Punkt  $w = 0$  in der  $w$ -Ebene verhalte sich modular*.

Das einfachste Beispiel für modulares Verhalten bietet die Exponentialfunktion, wo die Abbildung direkt  $u = z$  wird. Sie verhält sich bei  $w = 0$  und bei  $w = \infty$  modular. Ferner verhält sich die Riemannsche  $\zeta$ -Funktion bei  $w = 1$ , welche den  $z$ -Werten mit großem positivem Realteil entspricht, modular, denn hier kann die Funktion durch

$$1 + 2^{-z}$$

charakterisiert werden, was ergibt:

$$u = \log(w - 1) = -z \log 2.$$

Bringt man die wesentlich singuläre Stelle  $z = \infty$  in den o-Punkt, oder, was denselben Dienst leistet, deutet man  $z$  auf der  $z$ -Kugel, so ist das Bild der linken  $u$ -Halbebene (und also auch der Schraubenfläche, welche den modularen transzenten Punkten in der  $w$ -Ebene umgibt), nahezu ein Kreis der durch den singulären Punkt  $z = 0$  hindurchgeht.

Es gibt auch Funktionen mit *Grenzkreis*, die modulare Punkte besitzen. Zu ihnen gehören alle Modulfunktionen. Denn hier betrachtet man als Existenzgebiet die obere Halbebene der  $z$ -Ebene und setzt über das Verhalten der Funktion im Unendlichen, d. h. für die Werte von  $z$  mit großem Imaginärteil, folgendes fest (vgl. *R. Fueter*, Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen, I. Teil, pg. 25):

Es sei  $q = e^{2\pi i z}$  gesetzt, dann soll  $w$  als Funktion von  $q$  aufgefaßt eine eindeutige Funktion ohne wesentliche Singularität bei  $q = 0$  sein. Wenn man also  $w$  in eine nach Potenzen von  $q$  fortschreitende Reihe entwickelt, so soll diese mit  $q^n$  beginnen, wo  $n$  eine positive oder negative ganze Zahl sein soll. Hieraus ergibt sich aber für kleine  $q$ , d. h. für die Umgebung von  $z = \infty$ :

$$u = \log w = 2\pi i n z.$$

Hierdurch ist zunächst nur *eine* transzendenten Stelle der  $w$ -Ebene als modular nachgewiesen. Aber bei den Modulfunktionen sind alle andern mit dieser gleichbeschaffen. Für die  $j$ -Funktion lassen sich so alle transzenten Stellen der Umkehrfunktion und ihre Umgebungen auf die  $z$ -Ebene abbilden. Man erhält unendlich viele Kreise, welche in den rationalen Punkten die reelle Axe berühren. Die so entstehende Figur und die zahlentheoretischen Konsequenzen, die sich aus ihr ergeben, bilden den Inhalt des Büchleins von *F. Züllig*: Geometrische Deutung unendlicher Kettenbrüche, Zürich 1928. Das Verhalten dieser Funktion dürfte paradigmatisch für viele weitere Funktionsklassen sein.

Nicht modular ist das Verhalten der Funktion

$$w = z$$

in der rechten Halbebene, was dem Wert  $w = \infty$  entspricht. Man findet hier

$$u = \log w = z \log z.$$

Das Bild eines Kreises um  $w = \infty$  (in der  $u$ -Ebene ist es diesmal die rechte Halbebene) geht immer noch mit stetiger Randtangente durch den Punkt  $z = \infty$  der  $z$ -Kugel, wie man leicht ausrechnet, aber die Krümmung der Randkurve ist an dieser Stelle unendlich.

In der Funktion

$$w = e^{z^{\frac{p}{p}}}$$

ist  $w = 0$  eine transzendenten Stelle und zwar liegen über diesem Punkt der  $w$ -Ebene  $p$  solche Stellen; die Riemannsche Fläche der Umkehrfunktion besteht nämlich aus  $p$  Exemplaren von logarithmischen Windungsflächen, die an je einem Blatt an der Stelle  $w = 1$  durch einen Verzweigungspunkt  $p$ -ter Ordnung zusammenhängen. Man hat auf diesen  $p$  Blättern die positive reelle Axe von  $1$  bis  $\infty$  aufzuschneiden und die  $p$  Exemplare aneinander zu heften in der bekannten Weise. Für eine der transzendenten Stellen erhält man

$$u = \log w = z^{\frac{p}{p}}.$$

Das Verhalten ist hier verzweigt-modular, die linke Halbebene der  $u$ -Ebene wird auf ein Gebiet der  $z$ -Kugel abgebildet, das in  $z = \infty$  eine Ecke von der Winkelöffnung  $\pi/p$  aufweist. Die  $p$  transzendenten Stellen bei  $z = 0$  und die in derselben Zahl vorhandenen bei  $z = \infty$  erfüllen die ganze Umgebung von  $z = \infty$ , mit Ausschluß von  $2p$  Einschnitten nach diesem Punkt, welche in Winkeln von  $\pi/p$  aufeinander folgen. Andrerseits sieht man leicht, daß es  $2p$  verschiedene unendliche Folgen von Blättern der Riemannschen Fläche gibt, ihre Bilder ziehen sich in diesen  $2p$  Einschnitten von der Winkelöffnung  $0$  nach dem Punkt  $z = \infty$  hin.

Schließlich sei noch die Funktion

$$w = e^{e^z}$$

charakterisiert. Ihre Riemannsche Fläche in der  $w$ -Ebene besteht aus unendlich vielen logarithmischen Flächen, die sämtlich ihre Windungspunkte bei  $w = 0$  und  $w = \infty$  haben. Sie hängen an je einem Blatt durch einen Windungspunkt bei  $w = 1$  zusammen. Hier haben wir

also  $\infty + 1$  transzendenten Punkte. Derjenige bei  $w = 1$  ist modular. Er entspricht nämlich dem Wert  $z = -\infty$  und man erhält

$$u = \log(w - 1) = \log(e^z - 1) \bigg|_{z=-\infty} = \log(e^z) = z.$$

Die übrigen transzententen Singularitäten liefern

$$u = e^z.$$

Das Bild der linken  $u$ -Halbebene zieht sich mit einem Rückkehrpunkt, also mit der Winkelöffnung  $0$  in den Punkt  $z = \infty$  der  $z$ -Kugel hinein.

Ich definiere nun:

Falls das Bild der Umgebung einer transzententen Stelle der  $w$ -Ebene in den unendlich fernen Punkt der  $z$ -Kugel unter einem bestimmten Winkel hineingeht, so heißt dieser Winkel der *Transzendenzwinkel* dieser Stelle. In den bisherigen Beispielen haben wir Transzendenzwinkel von der Größe  $\pi$ ,  $\pi/p$  und  $0$  erhalten.

## § 4

In § 2 habe ich eine allgemeine Klasse von Riemannschen Flächen aufgestellt ohne algebraische Verzweigungspunkte, dagegen mit beliebig vielen isolierten Windungspunkten unendlicher Ordnung. Alle diese Flächen lassen sich schlicht auf die  $z$ -Ebene abbilden und hierbei findet sich die seltsame Alternative, daß das Bildgebiet entweder die offene Euklidische Ebene (die punktierte Kugel) ist oder als das Innere des Einheitskreises gewählt werden kann. Die beiden Fälle unterscheidet man auch als den *parabolischen* und den *hyperbolischen* Typus.

Der Unterschied zwischen den beiden Sorten Riemannscher Flächen ist nicht topologisch, denn das Innere des Einheitskreises und die punktierte Kugel sind topologisch gleich. Vielmehr ist er ein *metrischer*: der Typus ist invariant unter konformer Abbildung, die beiden Typen sind nicht konform aufeinander abzubilden. Insbesonders ist die Gruppe der konformen Abbildungen der Fläche auf sich selbst in beiden Fällen von gänzlich verschiedener Natur. Im parabolischen Fall besitzt die Gruppe 4 reelle Parameter und sie besteht aus den Ähnlichkeitstransformationen der Ebene. Sie hat einen Normalteiler von 3 Para-

metern bestehend aus den Substitutionen, welche kongruente Abbildungen der  $z$ -Ebene liefern; dieser hat einen Abelschen Normalteiler, bestehend aus der zweiparametrischen Schar der Translationen. Im hyperbolischen Fall ist die Gruppe repräsentiert durch die dreiparametrische Schar der linearen gebrochenen reellen Substitutionen, bei der sich kein solcher Aufbau nachweisen lässt.

Wenn die Riemannsche Fläche kongruente Abbildungen auf sich selbst zuläßt, so bilden diese eine Gruppe und aus ihrer Natur kann häufig der Typus bestimmt werden. Nehmen wir z. B. an, die Fläche gehöre zu einer ganzen transzententen Funktion und sie lasse kongruente Abbildungen auf sich zu, bei denen  $w$  seinen Wert nicht ändert. Die Funktion  $f(z)$  ist in diesem Fall automorph. In den zugehörigen Abbildungen der  $z$ -Ebene muß dann der Dehnungskoeffizient 1 sein. Denn im andern Fall würden ihre positiven und negativen Potenzen einen Punkt in eine unendliche Folge von Punkten überführen, die sich  $z = 0$  und  $z = \infty$  beliebig nähert; in allen Stellen dieser Punktgruppe hätte  $f(z)$  denselben Wert. Daher wäre  $f(z)$  entweder eine Konstante oder  $z = 0$  wäre eine wesentliche Singularität. Beides widerspricht aber unseren Annahmen.

Ferner kann die Drehkomponente nur ein rationales Vielfaches von  $\pi$  sein. Denn sonst erhielten wir Drehungen von beliebig kleinem Winkel; die Punktgruppe würde auf einer Kreisperipherie überall dicht liegen, was wiederum bei ganzen transzententen Funktionen nicht vorkommen kann. Ferner kann die Gruppe nicht zwei unabhängige Translationen enthalten, denn sonst wäre die Funktion doppeltperiodisch und infolgedessen nicht ganz. Wenn sie eine Translation enthält, so kann sie nur noch Drehungen um Vielfache von  $\pi$  aufweisen, denn sonst würde nach den Sätzen über Ebenengruppen eine weitere, von der vorigen unabhängige Translation entstehen.

Wir erhalten so den

*Satz 2: Wenn die Riemannsche Fläche der Inversen einer ganzen transzententen Funktion kongruente Abbildungen auf sich selbst zuläßt, bei denen die Punkte ihre Lage in der  $w$ -Ebene nicht ändern, so besitzt die Gruppe dieser Abbildungen einen der folgenden drei Typen:*

- a) Sie ist zyklisch und von endlicher Ordnung  $n$ . Dann hat die Funktion die Gestalt  $f((z - a)^n)$ .
- b) Sie ist zyklisch von unendlicher Ordnung. Dann ist die Funktion periodisch.

c) Sie besitzt einen Normalteiler vom Typus b), dessen Index 2 ist. Die Funktion ist eine gerade periodische Funktion.

Für den Fall b) bildet die logarithmische Fläche das einfachste Beispiel. Umläuft man den Punkt  $w = 0$  einmal, so erhält man eine kongruente Abbildung, deren Ordnung unendlich ist.

Für den Fall c) liefert die Fläche von  $\arccos w$  ein Beispiel. Sie hat bei  $+1$  und  $-1$  je einen Verzweigungspunkt zweiter Ordnung. Umläuft man *beide* Verzweigungspunkte, so erhält man die Untergruppe vom Index 2. Umläuft man nur einen, so erhält man eine Operation von der Ordnung 2.

Dagegen sieht man ohne weiteres, daß die Fläche der Modulfunktion eine Gruppe zuläßt, die nicht zu einem der drei Typen gehört.

Ein weiteres, ganz isoliertes Kriterium zur Unterscheidung des parabolischen und hyperbolischen Falles ist folgender Satz, den A. Bloch (C. R. t. 122) aus einem Theorem von Valiron herausgelesen hat:

*Man kann auf die Riemannsche Fläche der Inversen einer ganzen transzendenten Funktion Kreise von beliebig großem Radius schlicht ausbreiten.*

Es gibt also Funktionselemente der inversen Funktion, deren Konvergenzradius beliebig groß ist.

Der wichtigste Unterschied in der  $z$ -Ebene zwischen dem parabolischen und hyperbolischen Fall besteht darin, daß im ersten Fall die Winkelumgebung des Grenzpunktes  $2\pi$  beträgt, während im andern Fall ein Kontinuum von Grenzpunkten mit einer Winkelumgebung von  $\pi$  vorhanden ist. Hieraus ergibt sich der

*Satz 3: Die Summe der Transzendenzwinkel einer ganzen transzendenten Funktion ist  $\leq 2\pi$ , während sie bei einer Funktion mit Grenzkreis unbeschränkt ist.*

Insbesondere kann also eine ganze transzendenten Funktion höchstens zwei modulare Singularitäten besitzen. Ein Beispiel hierfür ist die Exponentialfunktion.

Wann für eine transzendenten Singularität der Umkehrfunktion ein Transzendenzwinkel existiert, ist nicht bekannt. Es kann z. B. sein, daß sich das Bild der Umgebung spiralförmig um den Punkt  $z = \infty$  der  $z$ -Kugel windet. Aber alsdann muß die Umgebung jedes weiteren singulären Punktes sich in gleicher Weise abbilden und die ganze Umkehrfunktion  $\varphi(w)$  weist eine Torsion um diesen Punkt auf.

Für Funktionen endlichen Geschlechtes  $k$  hat Denjoy diesen Satz ausgesprochen (vgl. C. R. 106, 1907, pg. 145):

Ist  $f(z)$  auf der Spiralen

$$r = e^{\frac{\varphi - \varphi_0}{b}}$$

beschränkt, wobei  $b > \sqrt{2k-1}$ , und  $z = r e^{i\varphi}$  gesetzt ist, so ist  $f(z)$  eine Konstante.

Bei den Funktionen mit Grenzkreis fällt die Möglichkeit einer spiralen Windung um den Grenzpunkt in der  $z$ -Ebene weg, dafür weiß man nicht, ob sich das Bild der Umgebung einer transzenten Singularität einem bestimmten Punkt des Grenzkreises nähert.

Um die hier vorliegenden Probleme zu charakterisieren, sei wieder  $w=0$  ein Windungspunkt unendlicher Ordnung der Umkehrfunktion. Wir stanzen einen Kreis vom Radius  $r$  mit  $0$  als Mittelpunkt aus allen Blättern, welche diese Singularität bilden, heraus und erhalten eine Schraubenfläche. Jeder Weg, der sich auf dieser Schraubenfläche dem Punkte  $0$  nähert, liefert in der  $z$ -Ebene eine Kurve, die nach dem Rand des Einheitskreises zustrebt. Ferner haben die Bilder der Schraubenlinien, die sich in konstantem Abstand unendlich oft um  $w=0$  herumwinden, dieselbe Eigenschaft, nach dem Rand des Einheitskreises in der  $z$ -Ebene zu konvergieren. Denn das Bild des Kreises

$$|z| = \alpha < 1$$

ist auf der Riemannschen Fläche der  $w$ -Ebene eine reguläre Kurve, die zwar in die Schraubenfläche um  $w=0$  eindringen kann, aber hier nicht in beliebige Nähe des Windungspunktes gelangen kann. Sei  $\varepsilon$  der minimale Abstand, so wird jeder Punkt der Schraubenfläche, dessen Abstand von  $0$  kleiner als  $\varepsilon$  ist, sein Bild in der  $z$ -Ebene außerhalb des Kreises vom Radius  $\alpha$  haben.

Statt der Schraubenfläche kann man auch die linke Halbebene von  $u = \log w$  nehmen und schließlich kann man diese auf den Einheitskreis einer  $v$ -Ebene abbilden dergestalt, daß  $w=0$  dem Punkt  $v=1$  entspricht. Man erhält dann eine Funktion, welche im Einheitskreis der  $v$ -Ebene und auf seiner Begrenzung, abgesehen vom Punkt  $v=1$  regulär und beschränkt ist, indem sie ihn auf ein Gebiet im Inneren des Einheitskreises der  $z$ -Ebene abbildet. Wenn diese Funktion auf einem in  $v=1$  mündenden Weg einem bestimmten Punkt in der  $z$ -Ebene zustrebt, dann strebt sie auf jedem in  $v=1$  mündenden Weg demselben Punkt

zu; diesen Satz hat *Gross* bewiesen (Math. Zeitschrift Bd. 2 (1918) pg. 242). Aber daß es einen solchen Weg gibt, ist bisher nicht bewiesen.

Wir betrachten z. B. die Bilder, welche den Radien der Schraubenfläche um  $w = 0$  in der  $z$ -Ebene entsprechen. Ihre Länge ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( - \int_r^{\varepsilon} |\varphi'(w)| d\rho \right), \text{ wobei } |w| = \rho \text{ gesetzt ist.}$$

Wenn es eine Abschätzung gäbe von der Art:

$$|\varphi'(w)| < \rho^{\delta - 1}$$

wo  $\delta$  positif aber beliebig klein ist, so würde daraus die Endlichkeit der Länge der Bildkurve folgen und hieraus weiter, daß sie nach einem bestimmten Punkt der Peripherie des Einheitskreises konvergiert. Mit Hilfe von Flächenbetrachtungen lässt sich aber bloß zeigen, daß nicht in allen Punkten einer gewissen Umgebung von  $w = 0$  auf der Schraubenfläche die Ungleichung gelten kann  $|\varphi'(w)| \geq \frac{1}{\rho}$ .

Um das zu beweisen, bedenke man, daß die ganze Schraubenfläche auf ein Gebiet von endlichem Flächeninhalt in der  $z$ -Ebene abgebildet wird. Daher ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi'(w)|^2 \rho d\rho d\psi \quad (w = \rho e^{i\psi})$$

beschränkt. Daher kann  $\varphi'(w)$  bei radialer Annäherung an  $w = 0$  nicht wie  $\frac{1}{\rho}$  wachsen.

Mit Hilfe der Schwarz'schen Ungleichung kann man besonders für die Schraubenlinien  $|w| = \text{const.}$  einige weitere Abschätzungen vornehmen, die darauf hinauslaufen, daß die Länge der Bildkurve nicht stark ins Unendliche zunehmen kann.

## § 5

Betrachtet man in der  $z$ -Ebene einen Kreis vom Radius  $r$  um den Nullpunkt, so ist sein Bild in der  $w$ -Ebene ein Stück der Riemannschen Fläche. Statt zu sagen, die Funktion  $f(z)$  nimmt im Kreis einen Wert

$w_0$   $n$ -mal an, kann man auch sagen, das Bild in der  $w$ -Ebene überdeckt die Stelle  $w_0$  in  $n$  Blättern. Läßt man den Radius  $r$  wachsen, so nimmt im allgemeinen die Anzahl der Überdeckungen ins Unendliche zu und es zeigt sich, daß hier bemerkenswerte Gesetzmäßigkeiten bestehen, deren Struktur insbesondere durch die Sätze von Nevanlinna (vgl. R. Nevanlinna, le théorème de Picard - Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris 1929) aufgedeckt worden ist. Nehmen wir an, daß in der Nachbarschaft von  $w_0$  ein transzenter Punkt der Umkehrfunktion sich befindet und daß ihre im vorigen Paragraphen betrachtete Schraubenfläche die Stelle  $w = w_0$  überdeckt, dann kommen unter den Stellen  $z_i$ , an denen  $f(z_i) = w_0$  ist, unendlich viele vor, deren Bild in die erwähnte Schraubenfläche fällt. Sie bilden eine Teilgruppe der Punktgruppe, die aus allen Niveaustellen  $z_i$  von  $f(z) = w_0$  besteht. Ich nenne die Punkte dieser Teilgruppe *zyklisch verbunden*. Um diese Bezeichnung zu rechtfertigen, nehme ich an, daß der transzente Punkt in der  $w$ -Ebene, um den sich die Schraubenfläche herumlegt, der Punkt  $w = 0$  sei. Dann betrachte ich den Kreis  $|w| = |w_0|$ , und lasse  $w$  von  $w_0$  aus ihn einmal umlaufen, bis  $w$  zu  $w_0$  zurückkommt. Gleichzeitig betrachte ich die zu diesen Werten gehörigen Punktgruppen in der  $z$ -Ebene. Ihre einzelnen Punkte werden gewisse Wege zurücklegen, die regulär und im Endlichen der  $z$ -Ebene verlaufen, falls auf den Kreis keine Projektion einer Singularität der Umkehrfunktion fällt. Da wir vorausgesetzt haben, daß die Schraubenfläche keine weitere Singularität enthält, so sind wir sicher, daß alle Punkte des zugehörigen Zyklus reguläre Kurven beschreiben. Die Endpunkte der Kurven in der  $z$ -Ebene stimmen aber nicht mehr mit dem Anfangspunkt überein, sondern die Punkte desselben werden durch diese Umlaufung zyklisch angeordnet.

Benutzt man andere transzente Stellen der  $w$ -Ebene, so erhält man andere Zyklen. Es gilt nun der Satz:

*Satz 4: Zwei Zyklen können höchstens einen gemeinsamen Punkt haben.*

*Beweis:* Es seien  $A$  und  $B$  die beiden singulären Stellen und  $\varphi_1(w - w_0)$  das Funktionselement, das wir fortsetzen wollen. Nach  $n$ -maliger Umlaufung von  $A$  möge das Element  $\varphi_2(w - w_0)$  entstehen; dasselbe Element soll aber auch hervorgehen, wenn  $B$   $m$ -mal umlaufen wird. Dann müßten die beiden Wege im selben Punkt der Riemannschen Fläche enden. Dies widerspricht aber dem einfachen Zusammenhang der Fläche und der Art ihres Aufbaues.

Ein Punkt kann zu mehr als zwei Punktgruppen gehören; dies hängt davon ab, wie weit man die Nachbarschaft eines singulären Punktes der

$w$ -Ebene gelten läßt. Ferner braucht der Weg, auf dem in der  $w$ -Ebene die Singularität umlaufen wird, kein Kreis zu sein. Wesentlich ist bloß, daß nur eine Singularität von ihm eingeschlossen wird auf der Riemannschen Fläche.

Über die Art, wie die zyklisch verbundenen Punkte einer Punktgruppe sich nach dem Punkt  $z = \infty$  hinziehen, lässt sich in ausgedehnten Fällen mit Hilfe eines Satzes von Julia eine wichtige Aussage machen. Wir bilden wieder die Schraubenfläche  $|w| \leq 1$  um den Punkt  $w = 0$  mit Hilfe der Funktion  $u = \log w$  auf die linke  $u$ -Halbebene ab. Einem Blatt von der Winkelöffnung  $2\pi$  um  $w = 0$  entspricht in der  $u$ -Ebene ein horizontaler Streifen von der Breite  $2\pi$ , der sich von der imaginären Axe nach links ins Unendliche erstreckt.

Ich mache nun die Voraussetzung, daß die Schraubenfläche um  $w = 0$  durch die Umkehrfunktion auf ein Gebiet  $\mathfrak{G}$  in der  $z$ -Ebene abgebildet wird, das ganz in einer Halbebene liegt und in einem endlichen Punkt  $z_0$  eine Stützgerade besitzt. Die Funktion  $u = \log f(z)$  vermittelt dann eine konforme Abbildung der linken  $u$ -Halbebene auf dieses Gebiet  $\mathfrak{G}$ . Ferner sei  $u_0 = \log f(z_0)$  und an dieser Stelle sei

$$\left| \frac{du}{dz} \right| = A.$$

Dann folgt aus dem Satz von Julia, daß das Innere eines Kreises vom Radius  $\varrho$ , der die imaginäre  $u$ -Axe in  $u_0$  tangiert und in die linke Halbebene hineingeht, abgebildet wird auf ein Gebiet der  $z$ -Ebene, das ganz innerhalb des Kreises vom Radius  $A\varrho$  liegt, welcher die Stützgerade im Punkte  $z_0$  berührt.

Nun bedenke man, daß der angegebene Kreis in der  $u$ -Ebene bis zu einem Punkt mit dem Realteil  $-2\varrho$  reicht. Ihm entspricht in der  $w$ -Ebene ein Punkt, der vom singulären Punkt die Entfernung  $e^{-2\varrho}$  hat. Man erhält so eine Aussage über die Annäherung an die singuläre Stelle  $w = 0$ , wenn sich  $z$  in  $\mathfrak{G}$  gegen  $\infty$  entfernt, und zwar gilt der Satz:

*Satz 5: Es ist  $\max. \frac{1}{|f(z)|} > e^{2\varrho}$  in dem Teil von  $\mathfrak{G}$ , für den  $|z| < |z_0| + 2A\varrho$ .*

Nun bemerkt man ferner, daß der Kreis in der  $u$ -Ebene durchschnittlich über  $2\varrho/2\pi = \varrho/\pi$  Streifen hinübergreift, daß also sein Bild in der  $w$ -Ebene sich ebenso oft um die singuläre Stelle herum windet. Hieraus ergibt sich der

*Satz 6: Bildet man in der  $z$ -Ebene einen Kreis von einem Radius  $r$ , so windet sich sein Bild auf der Riemannschen Fläche um die singuläre Stelle  $w=0$  mit einem von ihr aus gesehenen Winkel, der mindestens proportional mit  $(r-r_0)$  wächst, wo  $r_0=|z_0|$  ist.*

Hieraus kann man nur schließen, daß der Wert  $w_0$  (wobei  $|w_0|<1$ )  $\sqrt{r-r_0}$  — mal angenommen wird. Denn in der  $u$ -Ebene entsprechen diesem Wert die Stellen  $\log w_0 + 2n\pi i$ . Da sie von der imaginären Axe denselben Abstand haben, so ist die Anzahl derselben, die von einem Kreis mit dem Radius  $\rho$  überdeckt werden, nur proportional mit  $\sqrt{\rho}$ .

Wenn man also in Anlehnung an die Bezeichnung von R. Nevanlinna (1. c. pg. 6) mit  $n_0(r, w_0)$  die Anzahl der Punkte des ausgewählten Zyklus innerhalb des Kreises vom Radius  $r$  bezeichnet, so findet man, daß

$$n_0(r, w_0) > c \cdot \sqrt{r}$$

für genügend große  $r$ , wobei  $c$  eine geeignete Konstante bedeutet.

Vergrößert man in der  $u$ -Ebene den Radius  $\rho$ , so hat das die doppelte Wirkung, daß mehr Streifen vom Kreis erreicht werden, und daß die alten Streifen mehr überdeckt werden. Wenn man also in der  $z$ -Ebene den Radius um den entsprechenden Betrag vermehrt, so wird das Bild dieses Kreises in der  $w$ -Ebene sich in der angegebenen doppelten Weise dem singulären Punkt nähern.

Satz 6 lässt sich auf allgemeinere Fälle ausdehnen. Es sei das Bild der Schraubenfläche um  $w=0$  in der  $z$ -Ebene ganz im Innern eines Winkelraumes von der Öffnung  $\alpha\pi$  gelegen. Dann kann man einen Winkelraum von der Öffnung  $(\alpha+\varepsilon)\pi$  mit beliebig kleinem positivem  $\varepsilon$  finden mit der Eigenschaft, daß ein Schenkel desselben die Grenze des Gebietes  $\mathfrak{G}$  berührt. Der Scheitel des Winkels liege in  $z=a$ , außerhalb von  $\mathfrak{G}$ . Nun setze man

$$z-a=t^{\alpha+\varepsilon}$$

Dann wird der Winkelraum in der  $z$ -Ebene auf die eine Hälfte der  $t$ -Ebene abgebildet. Man findet jetzt zwischen der  $w$ - und der  $t$ -Ebene dieselben Sätze, wie vorher zwischen der  $w$ - und der  $z$ -Ebene. Überträgt man sie wieder auf  $z$ , so findet man, daß

$$n_0(r, w_0) > \frac{c}{2(\alpha+\varepsilon)}.$$

Auch in der  $u$ -Ebene lassen sich gelegentlich noch Verbesserungen anbringen, wenn nämlich in einem Winkelraum von größerer Öffnung als  $\pi$  keine Singularität vorhanden ist.

Man kann diese Resultate zusammenhalten mit Sätzen, die sich aus dem Prinzip von Lindelöf-Phragmén ergeben (vgl. G. Valiron, Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable, mémorial fasc. 11, pg. 15 und 33 f.). Dort findet man Sätze von dieser Art: Man gehe in der  $w$ -Ebene radial in zwei verschiedene transzendenten singuläre Punkte hinein. Die entsprechenden Bilder dieser beiden Wege in der  $z$ -Ebene mögen innerhalb eines Winkelraumes von der Öffnung  $\alpha\pi$  liegen. Dann ist  $\alpha$  nach unten limitiert für Funktionen endlicher Ordnung im Winkelraum.

Die obigen Sätze sind stets anwendbar, wenn die Singularität einen Transzendentenzinkel besitzt. Aber sie reichen weiter. Für alle Funktionen mit einem reellen Funktionselement wird die Umgebung der transzenten Stellen mit höchstens zwei Ausnahmen auf eine Halbebene abgebildet. Bei diesen Funktionen entspricht nämlich die reelle  $z$ -Axe einem Weg in der  $w$ -Ebene, der ganz über der reellen  $w$ -Axe verläuft und zwei transzendenten Stellen verbindet. Die Umgebung der übrigen transzenten Stellen kann so gewählt werden, daß sie diese Bildkurve nirgends trifft. Daher muß ihr Bild in der  $z$ -Ebene ganz im Inneren der oberen oder der unteren Halbebene verlaufen.

Es gibt einen andern Fall, in dem sich der Satz von Julia mit noch besserem Erfolg anwenden läßt, nämlich der, daß die Blätter, die sich um eine singuläre Stelle der  $w$ -Ebene herumlegen, von einem bestimmten Blatt an keine Singularität mehr ausser dieser und  $w = \infty$  enthalten. In der Terminologie von § 7 handelt es sich um ein „logarithmisches Ende“. Ich nehme wieder an, daß  $w = 0$  die Singularität sei und daß von dem Blatt  $B$  an bei positiver Umlaufung von  $w = 0$  keine neue Singularität mehr erscheine. Durch die Funktion.

$$u = \log f(z)$$

wird die positive reelle Halbaxe des Blattes  $B$  auf die ganze reelle Axe der  $u$ -Ebene abgebildet, der sich nach oben anschließende Parallelstreifen von der Breite  $2\pi$  entspricht einem vollen, von  $0$  bis  $\infty$  aufgeschnittenen Blatt und dasselbe gilt von allen nach oben folgenden Parallelstreifen der Breite  $2\pi$ . Das schraubenartig um  $w = 0$  sich windende Stück, das von den Schraubenlinien

$$|w| = e^{-r} \text{ und } |w| = e^r$$

begrenzt wird, wird abgebildet auf den vertikalen Streifen, der zwischen

$$u = -r \text{ und } u = +r$$

verläuft und aus Rechtecken zusammengesetzt ist, deren Breite  $2r$ , deren Höhe  $2\pi$  ist. Falls das Bild dieser Halbebene, das durch

$$u = \log f(z)$$

in der  $z$ -Ebene entworfen wird, eine Stützgerade besitzt, so kann man die frühere Überlegung wieder anstellen. Man findet diesmal, daß die Zahl der Punkte einer zyklisch verbundenen Punktgruppe, die von den Kreisen eingeschlossen werden, proportional mit dem Radius wächst. Ferner wird auch hier ein Blatt bei der Vergrößerung des Radius in der  $z$ -Ebene mehr ausgeschöpft und die Anzahl der Blätter, die in Angriff genommen werden, wächst proportional mit dem Radius.

Charakteristisch für diesen und den vorigen Fall ist, daß dort die Umgebung einer Singularität, hier die ganze logarithmische Fläche bei der Abbildung auf die  $z$ -Ebene nicht sehr auseinandergerissen werden kann, sondern immer ans Innere einer wachsenden Folge von Kreisen, die sich an einer Stelle berühren, gebunden bleibt.

## § 6

Wir beschränken uns im folgenden auf Riemannsche Flächen der  $w$ -Ebene, deren Singularitäten außer bei  $w = \infty$  sämtlich innerhalb eines Kreises  $|w| \leq R$  liegen. Ihre gegenseitige Distanz auf der Riemannschen Fläche sei mindestens  $2$ , was nicht ausschließt, daß ihre Spuren in der  $w$ -Ebene beliebig dicht liegen. Die Fläche sei auf die  $z$ -Ebene schlicht abgebildet, so, daß ein bestimmter Punkt  $P$  nach  $z = 0$  zu liegen kommt und daß die Ableitung an dieser Stelle gleich  $1$  ist. Ferner sei das Bildgebiet in der  $z$ -Ebene ein Kreis oder die ganze Ebene. Der Bildradius sei mit  $c$  bezeichnet, wobei  $c$  endlich oder  $\infty$  sein kann.

Nun denke ich mir eine zweite Riemannsche Fläche von ähnlicher Beschaffenheit; aber die im Endlichen gelegenen transzentalen Singularitäten sollen ihre Lage verändert haben um eine Strecke  $< 1/2$ . Für den  $k$ -ten Windungspunkt sei die Entfernung, geradlinig gemessen,  $= \varrho_k$ .

Ich kann mir den Uebergang von der ersten zur zweiten Riemannschen Fläche kontinuierlich denken, indem ich die Windungspunkte um die Strecke  $t \varrho_k$  in der betreffenden Richtung verschiebe und  $t$  von 0 bis 1 kontinuierlich laufen lasse. Für jede dieser Flächen existiert ein Abbildungsradius  $c(t)$  und von dieser Funktion läßt sich der Satz beweisen:

*Satz 7: Der Abbildungsradius  $c(t)$  ist als Funktion von  $t$  halbstetig nach unten.*

*Beweis:* Ich denke mir auf einer beliebigen der Riemannschen Flächen unserer einparametrischen Schar um jeden der im Endlichen gelegenen transzententalen Windungspunkte eine Schraubenfläche vom Radius  $s \varrho_k$  herausgeschnitten. Hierbei sei stets  $s < 1/2$ .

Die so entstehende Fläche läßt sich stets schlicht auf einen endlichen Kreis abbilden. Der Abbildungsradius sei mit  $c(t, s)$  bezeichnet. Es wird offenbar die frühere Funktion  $c(t) = c(t, 0)$ .

Von dieser Funktion  $c(t, s)$  läßt sich zeigen, daß sie bei konstant gehaltenem  $t$  zunimmt, wenn  $s$  gegen Null geht. Denn es sei  $F$  die Fläche, welche zum Wert  $s$  gehört,  $F'$  diejenige für den Wert  $s' < s$ . Dann ist  $F$  ein Teil von  $F'$ . Ferner möge  $\varphi(w)$  die Fläche  $F$  auf den Kreis vom Radius  $c$  abbilden,  $\varphi'(w)$  die Fläche  $F'$  auf den Kreis vom Radius  $c'$ . Dann bildet

$$\varphi'(g(z))$$

wo  $g(z)$  die zu  $\varphi(w)$  inverse Funktion bedeutet, den Kreis mit dem Radius  $c$  auf ein Gebiet ab, das ganz im Innern des Kreises mit dem Radius  $c'$  liegt. Die Mittelpunkte werden aufeinander abgebildet und die Ableitung ist an dieser Stelle = 1. Nach einem bekannten Satz von Bieberbach ist der Flächeninhalt des Bildgebietes größer, als der Flächeninhalt des Ausgangskreises, daher ist a fortiori  $c' > c$ .

Nun deuten wir  $t$  und  $s$  in einer  $t, s$ -Ebene, dann existiert  $c(t, s)$  in einem Rechteck  $0 \leq t \leq 1; 0 \leq s \leq 1/2$ . Geht man vertikal in einen Punkt der  $t$ -Axe, so ist  $c(t, s)$  zunehmend. Ich behaupte, daß  $c$  auch zunehmend ist, wenn der Einfallsinkel weniger als  $45^\circ$  beträgt. Betrachtet man nämlich die Riemannsche Fläche mit den Parametern

$$t = t_0 + h; \quad s = ah, \quad \text{wobei } a \geq 1,$$

dann nimmt die Fläche mit abnehmendem  $h$  zu. Daher wächst auch  $c(t_0 + h, ah)$  mit abnehmendem  $h$ . Ferner ist die Fläche mit den Para-

metern  $(t_0, 2ah)$  vollständig in der Fläche  $(t_0 + h, ah)$  enthalten, falls  $a \geqq 1$  ist. Daher wird auch

$$c(t_0 + h, ah) > c(t_0, 2ah).$$

Nimmt man zu diesen beiden Eigenschaften noch die Tatsache hinzu, daß

$$\lim_{h \rightarrow 0} c(t, h) = c(t, 0)$$

so folgt, daß auch

$$\lim_{h \rightarrow 0} c(t + h, ah) = c(t, 0)$$

ist für  $a \geqq 1$ , womit die Behauptung bewiesen ist.

Jetzt sei  $c(t_0, 0) = c_0$  eine endliche Zahl. Dann kann man  $\delta$  so klein wählen, daß

$$c(t_0 + h, h) > c_0 - \varepsilon \quad \text{für jedes positive } h < \delta.$$

Da aber die Funktion  $c(t, s)$  bei festgehaltenem  $t$  und abnehmendem  $s$  zunimmt, so folgt aus der obigen Ungleichung weiter:

$$c(t_0 + h, 0) > c(t_0, 0) - \varepsilon \quad \text{für } h < \delta$$

womit Satz 7 bewiesen ist.

Läßt man den Punkt  $(t, s)$  auf einer beliebigen Geraden, die ganz im Inneren des obigen Rechteckes verläuft, gegen  $(t_0, 0)$  gehen, so konvergieren die zugehörigen Flächen gegen die Fläche  $(t_0, 0)$  als ihren Kern. (Vgl. hierzu C. Carathéodory, Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten, Math. Annalen Bd. 72, 1912, pg. 124). Wenn der Carathéodorysche Satz V auf pg. 126 der zitierten Arbeit sich auf unseren Fall ausdehnen ließe, dann würden auch die Abbildungsradien gegen  $c(t_0, 0)$  konvergieren und hieraus ergäbe sich die Tatsache, daß die Menge der  $t$ -Werte, für die  $c(t, 0) = \infty$  ist, abgeschlossen ist. Denn es sei

$$\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = t, \text{ ferner } c(t_0, 0) \text{ endlich und } c(t_i, 0) = \infty.$$

Dann könnte man die Zahlen  $s_i$  so wählen, daß

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = 0 \text{ und } c(t_i, s_i) > 2c(t, 0).$$

Daher wäre

$$\liminf c(t_i, s_i) \geq 2c(t, 0)$$

entgegen der Voraussetzung. Aber das eigentliche Ziel, nämlich daß die Funktion  $c(t, 0)$  stetig ist und daß man also durch bloße Verschiebung der transzententen Verzweigungspunkte nicht vom Grenzkreistypus zur ganzen transzententen Funktion gelangen kann, wird auch so nicht erreicht sein.

In speziellen Fällen gelangt man viel weiter. Man nehme z. B. die Riemannsche Fläche, deren Blätter bei  $w=0$  und bei  $w=1$  transzendenten Singularitäten haben, wie das bei der Modulfunktion der Fall ist und es sei  $w=n(z)$  die Funktion, welche die Abbildung des Einheitskreises auf diese Fläche leistet. Die Funktion  $\log n(z)$  nimmt in der Nachbarschaft der Stellen mit  $w=1$  Werte an, die in der Nachbarschaft von  $2m\pi i$  ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) liegen und läßt alle diese Werte aus. Nun halte man diejenigen Verzweigungsstellen, für die  $\log n(z)$  sich einem der beiden Werte 0 oder  $2\pi i$  nähert, fest, ebenso diejenigen bei  $w=0$ , alle übrigen aber verschiebe man beliebig in der Halbebene, deren Realteil  $\geq 1$  ist. Die so entstehende Fläche bilde man schlicht auf die  $z$ -Ebene ab durch eine Funktion  $w=g(z)$ . Dann läßt die Funktion  $\log g(z)$  die Werte 0 und  $2\pi i$  aus, ferner ist sie eine eindeutige Funktion von  $z$ . Sie gehört daher dem Grenztypus an und dasselbe gilt auch von  $g(z)$ , womit die Verschiebbarkeit nachgewiesen ist.

## § 7

In diesem Paragraphen möchte ich ein Problem über eine spezielle Art von Riemannschen Flächen formulieren. Ich denke mir zum Aufbau bloß drei Sorten von Blättern benutzt. Die Sorte I besteht aus einem Blatt, das zwei Einschnitte aufweist, die von  $+1$  längs der positiven reellen Axe nach  $+\infty$  und von  $-1$  längs der negativen reellen Axe bis nach  $-\infty$  laufen. Die Sorte II besitzt nur den einen Einschnitt von  $+1$  nach  $+\infty$ , die Sorte III endlich den einen Einschnitt von  $-1$  nach  $-\infty$ . Ich beginne nun etwa mit einem Blatt der Sorte I und hänge an jedes der vier Ufer ein beliebiges Blatt, das dort auch aufgeschnitten ist. Die Sorte I ist an allen vier Ufern verwendbar, die beiden andern Sorten nur je an zwei Ufern. Die neue, fünfblättrige Fläche weist mindestens 4, höchstens 12 freie Ufer auf und daran seien

wieder Blätter angeheftet. In dieser Weise fahre ich nach einem bestimmten Gesetz ins unendliche fort.

Das Problem lautet nun, *man soll ein Kriterium dafür angeben, ob diese Fläche zu einer ganzen transzendenten Funktion gehört, oder zu einer Funktion vom Grenzkreistypus.*

Man kann folgende Vermutung aussprechen: Ich bezeichne eine Folge von unendlich vielen Blättern, die mit dem ersten Blatt beginnt, von der ferner zwei aufeinanderfolgende Blätter an einem Ufer zusammenhängen und bei der kein Blatt mehr als einmal vorkommt, als eine *Grenzfolge*. Dann unterscheiden sich die beiden Fälle dadurch, daß *im Grenzkreisfall die Menge der Grenzfolgen von der Mächtigkeit des des Kontinuums ist, im Falle der ganzen transzendenten Funktionen aber von niedrigerer Mächtigkeit.*

Falls man zum Aufbau der Fläche nur Blätter vom Typus I benutzt, so erhält man die Fläche der Modulfunktion mit den Verzweigungspunkten bei  $\pm 1$ . Hier hat man in jedem Blatt (außer dem 1.), in das man bei der Folge gelangt, noch eine Wahl zwischen 3 möglichen Arten des Fortschreitens. Schreibt man je nach der Wahl eine der Ziffern 0 oder 1 oder 2 auf und liest die so entstehende Zahlenfolge als Trialbruch, so sind die möglichen Grenzfolgen und die Trialbrüche einander eindeutig zugeordnet, daher ist die Anzahl von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Benutzt man zum Aufbau auch Blätter der Sorte II und III, so sind sie für die Grenzfolgen i. a. belanglos. Denn wenn man auf ein solches Blatt gelangt, so ist das nächstfolgende Blatt eindeutig bestimmt, da man nach Voraussetzung nicht mehr zurück gehen kann. Falls bei der Fortsetzung der Folge kein Blatt von der Sorte I mehr auftritt, so spreche ich von einem *logarithmischen Ende* der Riemannschen Fläche. Es besteht aus einer unendlichen Folge von Blättern derselben Sorte II oder III. Jedes logarithmische Ende liefert genau eine Grenzfolge.

Nun denke ich mir die Riemannsche Fläche in folgender Weise verändert: ich nehme nur die Blätter von der Sorte I, die beim Aufbau verwendet wurde, heste sie aber nicht zusammen. Falls an einem Ufer in der ursprünglichen Riemannschen Fläche ein logarithmisches Ende angeheftet war, so sage ich, dieses Ufer sei *geschlossen*, im andern Fall heißt das Ufer *offen*. Falls ein Blatt zwei geschlossene Ufer aufweist, so repräsentiert es zwei Grenzfolgen, entsprechend seinen logarithmischen Enden, für die übrigen Grenzfolgen dient es nur als Übergangsblatt und kann weggelassen werden.

Man findet nun sofort den

*Satz 8: Die Anzahl der Grenzfolgen ist*

a) *endlich, wenn die Riemannsche Fläche nur eine endliche Anzahl von Blättern der Sorte I aufweist.*

b) *abzählbar unendlich, wenn die Zahl der Blätter von der Sorte I unendlich ist, dagegen die Anzahl derselben mit mehr als zwei offenen Ufern endlich ist.*

c) *von der Mächtigkeit des Kontinuums, wenn es unendlich viele Blätter der Sorte I mit mindestens 3 offenen Ufern, aber nur endlich viele mit 2 oder 3 geschlossenen Ufern gibt.*

Diese drei Bedingungen sind nur hinreichend, sie erschöpfen nicht alle möglichen Fälle. Man gelangt bei der Untersuchung der weiteren Fälle rasch in das „Labyrinth des Kontinuums“ (Leibnitz). Um so bemerkenswerter ist die Tatsache, daß die zugehörigen Funktionen in 2 Kategorien zerfallen.

Man kann das Problem noch etwas beschränken und von der Fläche annehmen, daß sie spiegelbildlich aufgebaut sei in Bezug auf das Stück der reellen Axe, das im ersten Blatt zwischen  $-1$  und  $+1$  liegt. Dann lassen sich die Sätze von § 5 anwenden. Als Umgebungen der transzendenten Singularitäten kann man folgende drei Kreise wählen: die Kreise vom Radius 2 um  $\pm 1$ , ferner das Äußere des Einheitskreises. Hier sind alle Punkte der Riemannschen Fläche in Umgebungen von Singularitäten untergebracht. Ferner sieht man, daß in dem Falle, wo die Anzahl der Grenzfolgen abzählbar ist, die logarithmischen Enden die Hauptrolle spielen, so daß hier auch die Überlegung vom Schluß des § 5 anwendbar wird.

(Eingegangen den 12. Juli 1929)