Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 1 (1929)

Artikel: Formule de Parseval et transformations fonctionelles orthogonales.
Autor: Plancherel, M.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1146

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Formule de Parseval et transformations fonctionnelles orthogonales,

Par M. PLANCHEREL, Zurich.

§ 1. Introduction.

M. Titchmarsh[8]) a montré que la transformation de Fourier

$$T(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty f(t) \frac{\sin xt}{t} dt \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos xt \, dt \qquad (1)$$

a un sens si $f(x)$ est mesurable et telle que $\int_0^\infty |f|^\alpha dx$ soit finie $(1 < \alpha \leqq 2)$. Il se sert, pour établir cette proposition, des inégalités qui ont servi à M. F. Hausdorff[1]) dans la généralisation d'un théorème de M. W. H. Young[10, 11]) sur les séries trigonométriques. Or, on sait que le théorème de Young-Hausdorff est le cas particulier, pour le système trigonométrique, d'un théorème général de M. Fr. Riesz[6]) relatif aux systèmes orthogonaux bornés. Il est donc naturel de se demander si le résultat de M. Titchmarsh n'est pas lui aussi un cas particulier de propositions relatives aux transformations fonctionnelles orthogonales. Il en est bien ainsi, comme le montreront les pages suivantes, dans lesquelles l'application de la méthode donnée par MM. Hausdorff et F. Riesz à la théorie que nous avons développée jadis[2, 4]) des transformations fonctionnelles orthogonales, conduira pour toute une classe de transformations à l'analogue des résultats de M. Titchmarsh.*)

§ 2. Définitions et rappel de quelques théorèmes.

1. La fonction mesurable réelle $f(x)$ est dite de classe L_α si $\int_0^\infty |f|^\alpha dx$

*) M. Fr. Riesz, auquel j'avais communiqué mes résultats, a attiré mon attention sur un mémoire de M. Marcel Riesz[7]) qui m'avait échappé. Dans ce mémoire, à côté d'autres théorèmes remarquables, M. M. Riesz donne une nouvelle démonstration du théorème de Fr. Riesz; il remarque, en passant, que ses méthodes permettraient aussi l'extension du théorème de Titchmarsh à toute une classe de transformations fonctionnelles.

existe et est finie. Dans ce qui suit, nous supposerons toujours $\alpha > 1$. Définissons β par

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1. \tag{2}$$

La classe L_β sera dite complémentaire de L_α. Si $\alpha = 2$, on a $\beta = 2$. Une fonction de L_β n'appartient pas nécessairement à L_α et réciproquement. Si $\alpha \leqq 2$ et si la fonction f de L_α est bornée, elle appartient aussi à L_β. Si $\beta \geqq 2$ et si la fonction f de L_β est nulle en dehors d'un intervalle de longueur finie, elle appartient aussi à L_α.

2. Le produit d'une fonction f de L_α par une fonction G de L_β est toujours intégrable et l'on a l'inégalité[5])

$$\left| \int_0^\infty f\, G\, dx \right| \leqq \left(\int_0^\infty |f|^\alpha\, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_0^\infty |G|^\beta\, dx \right)^{\frac{1}{\beta}}. \tag{3}$$

3. Si la suite f_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ de fonctions de L_α converge en moyenne d'ordre α, c'est-à-dire si

$$\lim_{n \to \infty,\, m \to \infty} \int_0^\infty |f_n - f_m|^\alpha\, dx = 0,$$

il existe une et une seule fonction f de L_α vers laquelle la suite converge en moyenne[3, 5]) **):

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty |f - f_n|^\alpha\, dx = 0, \quad \int_0^\infty |f|^\alpha\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_0^\infty |f_n|^\alpha\, dx. \tag{4}$$

4. De toute suite f_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ de fonctions de L_α telles que

$$\int_0^\infty |f_n|^\alpha\, dx < C, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

on peut extraire une suite partielle f_{n_p} $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ telle que

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^x f_{n_p}\, dx = \int_0^x f\, dx, \quad \int_0^\infty |f|^\alpha\, dx \leqq \overline{\lim_{p \to \infty}} \int_0^\infty |f_{n_p}|^\alpha\, dx, \tag{5}$$

**) Dans tout ce qui suit nous ne regardons pas comme différentes deux fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de points de mesure nulle.

$f(x)$ appartenant à L_α; pour toute fonction G de L_β

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^\infty f_{n_p} G \, dx = \int_0^\infty f G \, dx. \tag{6}$$

D'une suite f_{n_p} vérifiant (5) on dit qu'elle converge faiblement, d'ordre α, vers $f(x)$[5]).

5. Un ensemble de fonctions de L_α formera un espace fonctionnel linéaire de classe α, si:

a) f_1 et f_2 étant deux fonctions quelconques de l'ensemble et c_1, c_2 deux constantes arbitraires, $c_1 f_1 + c_2 f_2$ est encore une fonction de l'ensemble.

b) Si la suite f_n de l'ensemble converge en moyenne d'ordre α, la fonction f vers laquelle elle converge en moyenne appartient à l'ensemble.

En particulier L_α est un espace linéaire de classe α.

6. Soit e un espace linéaire de classe 2 et T une transformation de cet espace faisant correspondre à toute fonction f de e une fonction $T(f)$ de L_2, telle que

a) $$T(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 T(f_1) + c_2 T(f_2),$$

b) $$\int_0^\infty (T(f))^2 \, dx \leqq M \int_0^\infty f^2 \, dx,$$

M étant une constante, f_1, f_2, f des fonctions quelconques de e et c_1, c_2 des constantes arbitraires. Nous dirons que T est une transformation linéaire bornée de e, de classe 2. La condition b) peut être remplacée par la condition

b') Si

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty (f - f_n)^2 \, dx = 0,$$

on a

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty (T(f) - T(f_n))^2 \, dx = 0.$$

7. Considérons en particulier une transformation T orthogonale, c'est-à-dire telle que, en plus de la condition a), elle vérifie la condition d'orthogonalité

$$\int_0^\infty (T(f))^2\,dx = \int_0^\infty f^2\,dx \tag{7}$$

pour toute fonction f de e.

Désignant alors par $\psi_p(x)$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ un système orthogonal normé de fonctions appartenant à e et formant une base de cet espace, le système $\Psi_p = T(\psi_p)$ est lui aussi orthogonal et normé. L'ensemble E des transformées des fonctions de e est lui aussi un espace linéaire de classe 2; il a pour base le système Ψ_p. T établit une correspondance biunivoque entre e et E. Nous désignerons par $\mathfrak{T}$ son inverse. La fonction

$$\Phi(x, y) = \sum_p \int_0^x \psi_p(\xi)\,d\xi \int_0^y \Psi_p(\eta)\,d\eta \tag{8}$$

a ses dérivées $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ de carré intégrable dans $(0, \infty)$, la première relativement à x, la seconde relativement à y. Pour toute fonction f de e[2,4]),

$$F = T(f) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty f(t)\,\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t}\,dt, \tag{9}$$

et, pour toute fonction f de E,

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{T}(f) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty f(t)\,\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t}\,dt\,. \tag{10}$$

De plus, pour toutes fonctions f de e et F de E

$$\mathfrak{T}(T(f)) = f, \quad T(\mathfrak{T}(F)) = F. \tag{11}$$

Réciproquement, si ψ_p et Ψ_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ sont deux systèmes orthogonaux normés quelconques pour l'intervalle $(0, \infty)$, si e et E sont les espaces linéaires dont ils sont des bases, on peut former la fonction (8). Les formules (9), (10) définissent alors une transformation orthogonale T de e en E et la transformation inverse $\mathfrak{T}$ de E en e.

Un système orthogonal normé ψ_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ appartenant à e est dit une base de l'espace e, quand pour toute fonction f de e

$$\int_0^\infty f^2\, dx = \sum_p \left(\int_0^\infty f\, \psi_p\, dx\right)^2.$$

La base joue le rôle d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires de l'espace e et les quantités $\int_0^\infty f\, \psi_p\, dx$ le rôle des coordonnées de f.

8. Les formules (9) et (10) ont un sens non seulement pour toutes les fonctions f de e ou de E, mais encore pour toute fonction de L_2. $T(f)$ et $\mathfrak{T}(f)$ appartiennent à L_2 pour toute fonction f de L_2. Désignons par $[f]_e$ — projection de f sur l'espace e — la fonction

$$[f]_e \sim \sum_p \int_0^\infty f\, \psi_p\, d\xi .\ \ \psi_p(x).$$

Cette fonction ne dépend que de f et de e; elle est indépendante de la base particulière ψ_p. Nous avons pour toute fonction f de L_2, en désignant encore par $T(f)$ et $\mathfrak{T}(f)$ les valeurs données par (9) et (10)

$$\mathfrak{T}(T(f)) = [f]_e,\ \int_0^\infty |T(f)|^2\, dx = \int_0^\infty |[f]_e|^2\, dx \leqq \int_0^\infty |f|^2\, dx,$$

$$T(\mathfrak{T}(f)) = [f]_E,\ \int_0^\infty |\mathfrak{T}(f)|^2\, dx = \int_0^\infty |[f]_E|^2\, dx \leqq \int_0^\infty |f|^2\, dx.$$

Les transformations T, $\mathfrak{T}$ ainsi prolongées ne sont plus biunivoques, sauf si $e = E = L_2$. Ce cas particulier: $e = E = L_2$ est le plus intéressant; il se présente toujours lorsque $\Phi(x, y)$ est symétrique; dans ce cas, en effet, les systèmes ψ_p et Ψ_p sont fermés relativement à L_2 [2, 4].

§ 3. Enoncé des théorèmes à démontrer.

Nous nous bornerons dans ce qui suit au cas où $\varphi = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}$ existe presque partout, est telle que

$$\int_0^x \int_0^y \varphi\, dx\, dy = \Phi,$$

et où de plus φ est bornée: ***)

$$|\varphi(x, y)| \leqq M.$$

Cette condition est réalisée dans la transformation de Fourier où $\varphi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos xy$ et dans celle de Hankel, où $\varphi = \sqrt{xy}\, J_\nu(xy)$, quand $\nu \geqq \frac{1}{2}$. Dans ces deux cas particuliers de Fourier et de Hankel, M. Titchmarsh a montré que les formules (9) et (10), que nous pouvons écrire maintenant

$$F = T(f) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty dt\, f(t) \int_0^x d\xi\, \varphi(t, \xi), \tag{12}$$

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{T}(f) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty dt\, f(t) \int_0^x d\xi\, \varphi(\xi, t), \tag{13}$$

ont encore un sens pour toute fonction f de classe L_α, si $1 < \alpha \leqq 2$. Nous allons établir une proposition analogue pour toutes transformations T, $\mathfrak{T}$ dans lesquelles φ est bornée, et démontrer les théorèmes:

I. *Si la fonction* $\varphi(x, y)$ *admet la représentation*

$$\int_0^x \int_0^y \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \sum_p \int_0^x \psi_p(\xi)\, d\xi \int_0^y \Psi_p(\eta)\, d\eta, \tag{14}$$

où les systèmes ψ_p, Ψ_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ *sont orthogonaux et normés pour l'intervalle* $(0, \infty)$ *et si* φ *est bornée:*

$$|\varphi|(x, y)| \leqq M, \tag{15}$$

alors, pour toute fonction f *de classe* $L_\alpha (1 < \alpha \leqq 2)$, *les formules* (12) *et* (13) *définissent des fonctions* F, $\mathfrak{F}$ *appartenant à la classe complémentaire* L_β *et vérifiant les inégalités*

***) c'est-à-dire que l'inégalité $|\varphi| \leqq M$ a lieu pour toutes valeurs de (x, y) dans $0 \leqq x < \infty$, $0 \leqq y < \infty$, à l'exception éventuelle de valeurs (x, y) formant un ensemble de mesure superficielle nulle.

$$\left(\int_0^\infty |F|^\beta\, dx\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \left(\int_0^\infty |f|^\alpha\, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{16$_1$}$$

$$\left(\int_0^\infty |\mathfrak{F}|^\beta\, dx\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \left(\int_0^\infty |f|^\alpha\, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{16$_2$}$$

II. *Sous les hypothèses du théorème* I, *on a pour toutes fonctions* f, g *de* L_α *la formule (que nous appellerons encore par analogie formule de Parseval)*

$$\int_0^\infty f\, T(g)\, dx = \int_0^\infty \mathfrak{T}(f)\, g\, dx. \tag{17}$$

III. *Si aux hypothèses du théorème* I *on ajoute les suivantes:*

a) $\int_0^x \varphi(y, t)\, dt$ *est, pour toute valeur de* x *une fonction de* y *de classe* L_α.

b) *le système* Ψ_p *est fermé relativement à* L_2 *(c'est-à-dire* $E = L_2$*), alors pour toute fonction* f *de* L_α,

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty dt\, \mathfrak{T}(f)_t \int_0^x d\xi\, \varphi(t, \xi).$$

Une conséquence du théorème I est que la suite $T(f_n)$ converge en moyenne d'ordre β si la suite f_n de L_α converge en moyenne d'ordre α.

§ 4. Une inégalité fondamentale.

La démonstration des théorèmes ci-dessus repose sur le cas particulier suivant des inégalités (16). m, X, X' étant trois nombres réels, non négatifs, quelconques, $X' \leqq X$ et f une fonction quelconque de L_α, on a

$$\left(\int_0^m dx \left|\int_{X'}^X f(t)\, \varphi(t, x)\, dt\right|^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \left(\int_{X'}^X |f|^\alpha\, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{18}$$

ainsi qu'une inégalité analogue où figure $\varphi(x, t)$ au lieu de $\varphi(t, x)$. Cette inégalité découle de (16$_1$) en y prenant une fonction égale à f

dans l'intervalle (X', X) et à zéro en dehors de cet intervalle. Nous allons voir qu'inversement le théorème I et en particulier l'inégalité (16_1) s'en déduisent. Admettons, en effet, l'exactitude de (18) et notons

$$F_X(x) = \int_0^X f(t)\,\varphi(t, x)\,dt. \tag{19}$$

Faisant tendre m vers ∞, nous voyons que $F_X - F_{X'}$ est de classe L_β en x et que

$$\left(\int_0^\infty |F_X - F_{X'}|^\beta\,dx\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \left(\int_{X'}^X |f|^\alpha\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Remarquant que si X' tend vers l'infini, le second membre de (18) tend vers zéro, nous concluons (§ 2, 3) à l'existence d'une fonction F de L_β telle que

$$\lim_{X \to \infty} \int_0^\infty |F - F_X|^\beta\,dx = 0,$$

et que

$$\int_0^x F(\xi)\,d\xi = \lim_{X \to \infty} \int_0^x F_X(\xi)\,d\xi.$$

D'autre part, en prenant dans (18) $X' = 0$ et $f = 1$, nous obtenons

$$\left(\int_0^m dx \left|\int_0^X \varphi(t, x)\,dt\right|^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\, X^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Ceci montre que $\int_0^X \varphi(t, x)\,dt$ est de classe L_β en x. De l'inégalité analogue on déduirait que $\int_0^X \varphi(x, t)\,dt$ est de classe L_β en x. φ étant bornée,

$$\int_0^x F_X(\xi)\,d\xi = \int_0^x d\xi \int_0^X dt\, f(t)\,\varphi(t, \xi) = \int_0^X dt\, f(t) \int_0^x d\xi\,\varphi(t, \xi).$$

Par suite, puisque f est de classe L_α et $\int_0^x \varphi(t, \xi)\, d\xi$ de classe L_β en t,

$$\int_0^x F(\xi)\, d\xi = \int_0^\infty dt\, f(t) \int_0^x d\xi\, \varphi(t, \xi),$$

d'où l'existence, presque partout, de la dérivée du second membre et la relation (12).

Revenons maintenant à l'inégalité (18), prenons-y $X' = 0$ et faisons tendre X vers l'infini. Le premier membre a une limite $\left(\int_0^m |F|^\beta\, dx\right)^{\frac{1}{\beta}}$ en vertu de (4). Il suffit ensuite de faire tendre m vers ∞ pour obtenir (16_1). Le théorème I est donc une conséquence de (18).

§ 5. Démonstration de l'inégalité (18).

Cette inégalité est pour $\alpha = 2$ une conséquence des formules du § 2, 8. Nous admettrons donc, dans ce qui suit, que $1 < \alpha < 2$. Introduisons les abréviations

$$\mathcal{F}_\alpha(f) = \int_0^X |f|^\alpha\, dx, \quad S_\beta(f) = \int_0^m dx \left| \int_0^X f(t)\, \varphi(t, x)\, dt \right|^\beta, \tag{20}$$

X désignant une quantité arbitrairement grande, mais fixe. En suivant la méthode de MM. Hausdorff et Fr. Riesz nous chercherons le minimum de

$$\left[\mathcal{F}_\alpha(f)\right]^{\frac{1}{\alpha}} : \left[S_\beta(f)\right]^{\frac{1}{\beta}} \tag{21}$$

Nous aurons démontré (18) si nous établissons que ce minimum est supérieur à $M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}$.

L'expression (21) a une valeur bien déterminée (finie ou infinie) pour toute fonction $f \not\equiv 0$ de L_α. On pourra donc, dans la recherche du minimum, se borner à considérer des fonctions telles que $S_\beta > 0$. Simplifions d'abord, en admettant que $M = 1$. Ceci ne restreint pas la gé-

néralité; il suffit, en effet, de considérer que la transformation $x' = Mx$, $y' = My$ nous donne dans (14)

$$\int_0^{x'}\int_0^{y'} \frac{1}{M}\, \varphi\left(\frac{x'}{M}, \frac{y'}{M}\right) dx'\, dy' = \sum_p \int_0^{x'} \frac{1}{\sqrt{M}}\, \psi_p\left(\frac{x'}{M}\right) dx' \int_0^{y'} \frac{1}{\sqrt{M}}\, \Psi_p\left(\frac{y'}{M}\right) dy'.$$

Les systèmes $\frac{1}{\sqrt{M}}\, \psi_p\left(\frac{x'}{M}\right)$, $\frac{1}{\sqrt{M}}\, \Psi_p\left(\frac{y'}{M}\right)$ sont encore orthogonaux et normés. Par suite $\varphi^*(x', y') = \frac{1}{M}\, \varphi\left(\frac{x'}{M}, \frac{y'}{M}\right)$ est encore une fonction admettant une représentation du type (14). De plus $|\varphi^*(x', y')| \leqq M^* = 1$. Les théorèmes I, II, III appliqués à φ^* donnent sans autre les théorèmes correspondants du § 3.

(21) ne change pas si l'on y remplace f par cf, c étant une constante $\neq 0$. On pourra donc se borner à la recherche du minimum de (21) sous la condition

$$S_\beta(f) = 1. \tag{22}$$

Désignons par $\mathcal{J}_\alpha^*$ la borne inférieure de $\mathcal{J}_\alpha(f)$ sous la condition (22). On a $\mathcal{J}_\alpha^* \geqq 0$; $\mathcal{J}_\alpha^*$ est d'ailleurs finie.

Soit f_p ($p = 1, 2, 3, \ldots$) une suite de fonctions de L_α, telles que

$$S_\beta(f_p) = 1, \quad \lim_{p \to \infty} \mathcal{J}_\alpha(f_p) = \mathcal{J}_\alpha^*.$$

On peut extraire de la suite f_p une suite partielle qui converge faiblement vers une fonction f^* de L_α (voir § 2, 4). On peut supposer que la suite primitive a déjà été choisie de manière à converger faiblement vers f^*. Alors $\mathcal{J}_\alpha(f^*) \leqq \mathcal{J}_\alpha^*$ et si G est telle que $\int_0^X |G|^\beta\, dz$ existe,

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^X f_p\, G\, dt = \int_0^X f^*(t)\, G(t)\, dt.$$

Prenons en particulier $G(t) = \varphi(t, x)$. Il viendra

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^X f_p(t)\, \varphi(t, x)\, dt = \int_0^X f^*(t)\, \varphi(t, x)\, dt.$$

Or, les fonctions de x représentées par ces intégrales sont bornées dans $(0, m)$ comme le montrent (3) et (15). Par conséquent,

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^m dx \left| \int_0^X f_p(t)\, \varphi(t, x)\, dt \right|^\beta = \int_0^m dx \left| \int_0^X f^*(t)\, \varphi(t, x)\, dt \right|^\beta,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{p \to \infty} S_\beta(f_p) = S_\beta(f^*).$$

Or, $S_\beta(f_p) = 1$. Donc, $S_\beta(f^*) = 1$ et f^* appartient à la classe des fonctions admises à la concurrence. Par suite, $\mathcal{J}_\alpha(f^*) \geqq \mathcal{J}_\alpha^*$, d'où $\mathcal{J}_\alpha(f^*) = \mathcal{J}_\alpha^*$. La relation $S_\beta(f^*) = 1$ implique $f^* \not\equiv 0$ dans $(0, X)$, d'où $\mathcal{J}_\alpha^* > 0$.

Par hypothèse la fonction de λ

$$H(\lambda) = [\mathcal{J}_\alpha(f^* + \lambda h)]^{\frac{1}{\alpha}} : [S_\beta(f^* + \lambda h)]^{\frac{1}{\beta}},$$

où h est une fonction quelconque de L_α, prend sa valeur minimum $\mathcal{J}_\alpha^*$ lorsque $\lambda = 0$. Par suite, quelque soit cette fonction h, on doit avoir $H'(0) = 0$. Cette condition conduit à la relation

$$\int_0^X |f^*|^{\alpha-1} \operatorname{sgn}(f^*)\, h(x)\, dx = \mathcal{J}_\alpha^* \int_0^m dx \left| \int_0^X f^*(t)\, \varphi(t, x)\, dt \right|^{\beta-1} \operatorname{sgn}\left(\int_0^X f^*\, \varphi\, dt\right) \int_0^X h(\xi)\, \varphi(\xi, x)\, d\xi. \tag{23}$$

Permutons au second membre l'intégration en x et celle en ξ. C'est légitime, car l'intégrale double $\iint \ldots dx\, d\xi$ est absolument convergente. Il devient

$$\mathcal{J}_\alpha^* \int_0^X d\xi\, h(\xi) \int_0^m dx\, \varphi(\xi, x) \left| \int_0^X f^*(t)\, \varphi(t, x)\, dt \right|^{\beta-1} \operatorname{sgn}\left(\int_0^X f^*\, \varphi\, dt\right). \tag{24}$$

Or, la fonction $|f^*|^{\alpha-1} \operatorname{sgn} f^*$ est de carré intégrable dans $(0, X)$. Il en est de même de

$$\int_0^m dx\, \varphi(\xi, x) \left| \int_0^X f^*(t)\, \varphi(t, x)\, dt \right|^{\beta-1} \operatorname{sgn}\left(\int_0^X f^*\, \varphi\, dt\right)$$

qui est une fonction bornée dans $0 \leqq \xi \leqq X$. La relation (23), où le second membre est remplacé par (24) entraine, puisque l'on peut y prendre, en particulier, pour h une fonction arbitraire de carré intégrable dans $(0, X)$ et nulle en dehors de cet intervalle (h appartient alors à L_α), que

$$|f^*(\xi)|^{\alpha-1} \operatorname{sgn} f^*(\xi) = \mathcal{F}_\alpha^* \int_0^m dx\, \varphi(\xi, x) \left| \int_0^X f^*(t)\, \varphi(t, x)\, dt \right|^{\beta-1} \operatorname{sgn} \int_0^X f^*\, \varphi\, dt.$$

Le second membre est la transformée $\mathfrak{T}$ de la fonction suivante de classe L_2

$$\begin{cases} \mathcal{F}_\alpha^* \left| \int_0^X f^*(t)\, \varphi(t, x)\, dt \right|^{\beta-1} \operatorname{sgn} \int_0^X f^*\, \varphi\, dt, & x < m \\ 0, & x > m \end{cases}$$

Or, pour toute transformation orthogonale du type $\varphi(x, y)$ considéré, on a, dans L_2 (§ 2, 7),

$$\int_0^\infty |\mathfrak{T}(f)|^2\, dx \leqq \int_0^\infty |f|^2\, dx.$$

Par conséquent,

$$\int_0^X |f^*|^{2\alpha-2}\, dx \leqq \mathcal{F}_\alpha^{*2} \int_0^m dx \left| \int_0^X f^*(t)\, \varphi(t, x)\, dt \right|^{2\beta-2}$$

ou

$$\mathcal{F}_{2\alpha-2}(f^*) \leqq \mathcal{F}_\alpha^{*2}\, S_{2\beta-2}(f).$$

Introduisons les quantités

$$\alpha' = 2(\alpha - 1), \quad \beta_1 = 2(\beta - 1), \quad \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} = 1,$$

d'où

$$\alpha_1 = \frac{2(\beta - 1)}{2\beta - 3} = \frac{2}{3 - \alpha} = t\alpha + (1 - t)\alpha', \text{ avec } t = 2\frac{2 - \alpha}{3 - \alpha}, \quad 1 - t = \frac{\alpha - 1}{3 - \alpha}.$$

On a donc $\alpha' < \alpha$, $\alpha_1 < \alpha$, $\beta_1 > \beta$. L'inégalité (3) donne

$$\int_0^X |f^*|^{\alpha_1} dx = \int_0^X |f^*|^{t\alpha} \, |f^*|^{(1-t)\alpha'} \, dx$$
$$\leqq \left(\int_0^X |f^*|^{\alpha} \, dx\right)^t \left(\int_0^X |f^*|^{\alpha'}\right)^{1-t}$$

c'est-à-dire, d'après (25)

$$\mathcal{F}_{\alpha_1}(f^*) \leqq \mathcal{F}_\alpha^{*\,\frac{2-\alpha}{3-\alpha}} \left[\mathcal{F}_{2\alpha-2}(f^*)\right]^{\frac{\alpha-1}{3-\alpha}}$$
$$\leqq \mathcal{F}_\alpha^{*\,\frac{2}{3-\alpha}} \left[S_{2\beta-2}(f^*)\right]^{\frac{\alpha-1}{3-\alpha}};$$

donc

$$\mathcal{F}_\alpha^* \geqq \left[\mathcal{F}_{\alpha_1}(f^*)\right]^{\frac{1}{\alpha_1}} : \left[S_{\beta_1}(f^*)\right]^{\frac{1}{\beta_1}} \geqq \mathcal{F}_{\alpha_1}^{*\,\frac{1}{\alpha_1}}. \tag{26}$$

De cette inégalité découle que $\mathcal{F}_\alpha^* \geqq 1$. En effet, dans le cas contraire, nous aurions $\mathcal{F}_{\alpha_1}^* \leqq \mathcal{F}_\alpha^{*\alpha 1} < \mathcal{F}_\alpha^*$, puis en construisant la suite illimitée $\beta_\nu = 2(\beta_{\nu-1} - 1) = 2 + 2^\nu(\beta - 2), \nu = 1, 2, 3, \ldots$ et définissant α_ν par $\frac{1}{\alpha_\nu} + \frac{1}{\beta_\nu}$ nous aurions d'après (26), $\mathcal{F}_{\alpha_\nu}^* \leqq (\mathcal{F}_{\alpha_{\nu-1}}^*)^{\alpha_{\nu-1}}$. Par conséquent

$$\mathcal{F}_\alpha^* > \mathcal{F}_{\alpha_1}^* > \mathcal{F}_{\alpha_2}^* > \ldots$$

Il existerait donc une fonction f_ν de L_α telle que

$$\mathcal{F}_{\alpha_\nu}(f_\nu) < \mathcal{F}_\alpha^*, \quad S_{\beta_\nu}(f_\nu) = 1.$$

Pour elle, en vertu de $|\varphi| \leqq 1$ et de (3)

$$\left|\int_0^X f_\nu(x)\,\varphi(x,y)\,dx\right| \leqq \int_0^X |f|\,dx \leqq X^{\frac{1}{\beta_\nu}} \left(\int_0^X |f_\nu|^{\alpha_\nu} dx\right)^{\frac{1}{\alpha_\nu}} = X^{\frac{1}{\beta_\nu}} \left[\mathcal{F}_{\alpha_\nu}(f_\nu)\right]^{\frac{1}{\alpha_\nu}},$$

d'où

$$1 = S_{\beta_\nu}(f_\nu) \leqq m\,X \left[\mathcal{F}_{\alpha_\nu}(f_\nu)\right]^{\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}} < m\,X\,\mathcal{F}_\alpha^{*\,\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}}.$$

Faisons tendre ν vers l'infini; nous arrivons à une contradiction, $\mathcal{F}^*_\alpha$ étant < 1. Par conséquent $\mathcal{F}_\alpha^* \geqq 1$, ce qui démontre (18).

§ 6. Formule de Parseval.

Soient f, g deux fonctions quelconques de L_α. Soient

$$G(x) = T(g) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty dt\, g(t) \int_0^x d\xi\, \varphi(t, \xi),$$

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{T}(f) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty dt\, f(t) \int_0^x d\xi\, \varphi(\xi, t).$$

Introduisons encore les fonctions

$$G_a(x) = \int_0^a g(t)\, \varphi(t, x)\, dt, \quad \mathfrak{F}_X(x) = \int_0^X f(t)\, \varphi(x, t)\, dt.$$

On sait que (théor. I)

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^\infty |G - G_a|^\beta\, dx = 0, \quad \lim_{X \to \infty} \int_0^\infty |\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_X|^\beta\, dx = 0.$$

Or,

$$\int_0^X f(x)\, G(x)\, dx = \int_0^X dx\, f(x) \int_0^a dt\, g(t)\, \varphi(t, x)$$

$$= \int_0^a dt\, g(t) \int_0^X f(x)\, \varphi(t, x)\, dt$$

$$= \int_0^a g(t)\, \mathfrak{F}_X(t)\, dt,$$

car, l'inversion des intégrations est légitime, $\iint .. \, dt\, dx$ étant absolument convergente. Mais

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^X f(x)\, G_a(x)\, dx = \int_0^X f(x)\, G(x)\, dx.$$

Par conséquent,

$$\int_0^X f(x)\, G(x)\, dx = \int_0^\infty g(t)\, \mathfrak{F}_X(t)\, dt\,.$$

Il suffit de faire tendre X vers l'infini pour obtenir la formule de Parseval (17).

§ 7. Démonstration du théorème III.

Par hypothèse la fonction

$$g_x(y) = \int_0^x \varphi(y, t)\, dt \sim \sum_p \psi_p(y) \int_0^x \Psi_p(\xi)\, d\xi$$

est de classe L_α; elle est aussi de classe L_2 en y. Sa transformée $G_x = T(g_x)$ est

$$G_x(y) = \frac{d}{dy} \sum_p \int_0^x \Psi_p(u)\, du \int_0^y \Psi_p(\xi)\, d\xi \sim \sum_p \int_0^x \Psi_p(u)\, du\,.\ \Psi_p(y)$$

$$= \begin{cases} 1, & y < x \\ 0, & y > x \end{cases}$$

à cause de la fermeture du système orthogonal Ψ_p. La formule de Parseval appliquée à la fonction $g_x(y)$ choisie et à une fonction f quelconque de L_α donne, puisque

$$\int_0^\infty f(y)\, G_x(y)\, dy = \int_0^x f(y)\, dy\,,$$

le résultat cherché:

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty dt\, \mathfrak{T}(f(t)) \int_0^x d\xi\, \varphi(t, \xi)\,.$$

Bibliographie.

1. *Hausdorff, F.* — Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen. [Math. Zeitschrift 16 (1923) S. 163—169.]

2. *Plancherel, M.* — Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies. [Rend. di Palermo 30 (1910) p. 289—335.]

3. *id.* — Démonstration du théorème de Riesz-Fischer et du théorème de Weyl sur les suites convergentes en moyenne. [Bull. d. Sc. Math. (2) 47 (1923) p. 195-204.]

4. *id.* — Sur les formules d'inversion de Fourier et de Hankel. [Proc. London Math. Soc. (2) 24 (1925), p. 62—70.]

5. *Riesz, F.* — Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. [Math. Annalen 69 (1910), S. 449—497.]

6. *id.* — Ueber eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel. [Math. Zeitschrift 18 (1923), S. 117—124.]

7. *Riesz, M.* — Sur le maximum des formes bilinéaires, et sur les fonctionnelles linéaires. [Acta mathematica, 49 (1926), p. 465—497.]

8. *Titchmarsh, E. C.* — A contribution to the theory of Fourier transforms. [Proc. London Math. Soc. (2) 23 (1925), p. 279—289.]

9. *id.* — A note on Hankel transforms. [Journal of London Math. Soc. 1 (1926), p. 195—196.]

10. *Young, W. H.* — On the determination of the summability of a function by means of its Fourier constants. [Proc. London Math. Soc. (2) 12 (1913), p. 71—88.]

11. *id.* — Sur la généralisation du théorème de Parseval. [Comptes rendus, Paris, 155 (1912), p. 30—33.]

(Reçu le 11 juin 1929)