

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	1 (1929)
<b>Artikel:</b>	Alcuni esempi di superficie algebriche degli iperspazi che rappresentano un' equazione di Laplace.
<b>Autor:</b>	Togliatti, Eugenio G. di
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-1145">https://doi.org/10.5169/seals-1145</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Alcuni esempi di superficie algebriche degli iperspazi che rappresentano un' equazione di Laplace

di EUGENIO G. TOGLIATTI, Genova (Italia)

I. — Negli studi recenti di geometria differenziale proiettiva negli iperspazi s'incontrano spesso superficie che "rappresentano," un' equazione di LAPLACE. Essendo  $r$  la dimensione dello spazio in cui è immersa una superficie così fatta, le coordinate proiettive omogenee  $x_0 x_1 \dots x_r$ , d'un suo punto generico, pensate come funzioni dei parametri  $u, v$  che son coordinate curvilinee sulla superficie stessa, risolvono un' equazione alle derivate parziali del 2° ordine lineare ed omogenea (di LAPLACE):

$$\alpha \theta_{uu} + \beta \theta_{uv} + \gamma \theta_{vv} + \delta \theta_u + \varepsilon \theta_v + \eta \theta = 0; \quad (1)$$

$\theta$  è la funzione incognita;  $\theta_u, \theta_v, \theta_{uu}, \theta_{uv}, \theta_{vv}$  ne son le derivate 1<sup>e</sup> e 2<sup>e</sup> rispetto ad  $u, v$ ;  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$  son funzioni note di  $u, v$ <sup>1)</sup>. Ciò equivale a dire che i punti  $x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}$  (cioè i punti le cui coordinate omogenee sono rispett. le  $x_i, \frac{\partial x_i}{\partial u}, \dots, \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}$ , per  $i = 0, 1, \dots, r$ ) stanno in un  $S_4$ , osculatore in  $x$  alla superficie, anzichè in un  $S_5$ , come avverrebbe per una superficie generica; sicchè tutti gli  $\infty^{r-5}$  iperpiani passanti per l'  $S_4$  osculatore anzidetto tagliano la superficie secondo linee aventi in  $x$  un punto triplo. Sulla superficie si devono considerare poi le *caratteristiche*, cioè le linee:

$$\gamma du^2 - \beta du dv + \alpha dv^2 = 0, \quad (2)$$

le quali si distribuiscono in due sistemi  $\infty^1$  distinti e di indice 1, oppure formano un solo sistema  $\infty^1$  d'indice 1, secondochè la (1) è di tipo non parabolico oppure parabolico.

Una superficie della specie ora ricordata è "particolare," solo se  $r \geq 5$ ; perchè una superficie dell' ordinario spazio a tre dimensioni rappresenta sempre due equazioni del tipo (1) fra loro linearmente indipendenti;

<sup>1)</sup> C. Segre, Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2<sup>o</sup> ordine, Atti Acc. Torino 42 (1906—07) p. 1047.

mentre una superficie di  $S_4$  ne rappresenta sempre una, ed in generale una sola<sup>2)</sup>. È noto pure che le sole superficie di  $S_r$ , con  $r \geq 4$ , che rappresentano due equazioni di Laplace linearmente indipendenti sono le rigate sviluppabili<sup>1)</sup>.

Può essere utile vedere alcuni esempi di superficie di un  $S_r$ , con  $r \geq 5$ , che rappresentano un'equazione (1). È quanto ci proponiamo di fare, supponendo  $r = 5$ , e ponendo anche la condizione che le superficie volute siano algebriche ed abbiano l'ordine più basso possibile. Escluderemo naturalmente tutte le rigate (anche non sviluppabili):  $x_i = a_i(v) + u b_i(v)$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ), perchè queste rappresentano sempre l'equazione, di tipo parabolico:  $\theta_{uu} = 0$ .

2. — Sia dunque  $F^n$  una superficie algebrica di  $S_5$ , d'ordine  $n$ , non rigata, che rappresenta un'equazione del tipo (1); essa ammetterà in ogni punto generico  $x$  un iperpiano osculatore  $\xi$ , le cui coordinate  $\xi_i$  si potranno avere risolvendo le sei equazioni:

$$(\xi x) = (\xi x_u) = (\xi x_v) = (\xi x_{uu}) = (\xi x_{uv}) = (\xi x_{vv}) = 0; \quad (3)$$

una delle quali, per la (1), è conseguenza delle rimanenti. (Il simbolo  $(\xi x)$  sta per  $\sum_{i=0}^5 \xi_i x_i$ , e così gli analoghi  $(\xi x_u)$ , ...).

Dovrà essere anzitutto  $n > 4$ ; perchè la sola  $F^4$  non rigata di  $S_5$  è la superficie (romana) di STEINER, e questa, essendo rappresentabile biunivocamente sul piano in modo che le immagini delle sue sezioni iperpiane siano le coniche del piano rappresentativo, non ammette sezioni iperpiane con punti tripli.

Anche il valore  $n = 5$  va escluso. Una  $F^5$  di  $S_5$  non rigata è, infatti, razionale, normale in  $S_5$ , e si può rappresentare biunivocamente su un piano  $\pi$  mediante il sistema lineare  $\Sigma$  di tutte le cubiche passanti per quattro punti dati<sup>3)</sup>. Per avere una  $F^5$  del tipo voluto bisognerebbe quindi scegliere in  $\pi$  i quattro punti base di  $\Sigma$  in modo che un punto generico di  $\pi$  fosse triplo per una  $C^3$  di  $\Sigma$ ; da un punto generico di  $\pi$  dovrebbero quindi uscire tre rette contenenti complessivamente i quattro

<sup>1)</sup> C. Segre, Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2<sup>o</sup> ordine, Atti Acc. Torino 42 (1906–07) p. 1047.

<sup>2)</sup> V. per es., per le superficie dell' $S_3$ , le equazioni normali del *Fubini* in: G. *Fubini* ed E. *Cech*, Geometria proiettiva differenziale, Bologna, Zanichelli, 1926–27, p. 90. E per le superficie di  $S_4$  si veda il § 109 della stessa opera.

<sup>3)</sup> P. *Del Pezzo*, Sulle superficie dell' $n^o$  ordine immerse nello spazio di  $n$  dimensioni, Rend. Palermo 1 (1887) p. 241.

punti base di  $\Sigma$ . La cosa è certo impossibile se quei quattro punti son distinti, ed anche se due di essi coincidono fra loro (ed eventualmente anche gli altri due); però, per eliminare i dubbi che potrebbero restare negli altri casi di punti base non tutti distinti, si può ragionare nel modo seguente, che non fa alcuna ipotesi sulla posizione dei quattro punti.

Sia  $A$  un punto base di  $\Sigma$ , certo semplice; le rette uscenti da  $A$  son le immagini di  $\infty^1$  coniche di  $F^5$ , costituenti un fascio  $S$ . Sia poi  $P$  un punto generico di  $F^5$ ; l' $S_4$  osculatore ad  $F^5$  in  $P$  taglia  $F^5$  secondo una linea  $L$  avente in  $P$  un punto triplo, e la cui immagine su  $\pi$ , dovendo essere una  $C^3$  con un punto triplo nell'immagine  $P'$  di  $P$ , contrerà come parte la retta  $AP'$ ; la linea  $L$  contiene perciò come parte la conica  $\Gamma$  del fascio  $S$  che passa per  $P$ . La parte residua  $L_0$  di  $L$  sarà contenuta totalmente nella rete  $R$  delle cubiche segate su  $F^5$ , oltre  $\Gamma$ , dagli  $\infty^2 S_4$  che passano per il piano di  $\Gamma$ , rete che è residua del fascio  $S$  rispetto al sistema lineare  $\infty^5$  delle sezioni iperpiane di  $F^5$ <sup>4)</sup>. D'altra parte, l'immagine  $L_0'$  di  $L$ , che è di  $2^0$  ordine, deve avere un punto doppio in  $P'$ , sicchè la rete di coniche  $R'$  immagine di  $R$  avrà la sua Jacobiana indeterminata. Dunque  $R$  si compone di tutte le coppie di rette d'uno stesso fascio<sup>5)</sup>. Ma ciò è assurdo, perchè una retta generica d'un tal fascio sarebbe l'immagine d'una linea almeno di  $2^0$  ordine di  $F^5$ ; e, per di più, due di quelle linee, insieme con una conica generica del fascio  $S$ , darebbero una linea, almeno di  $6^0$  ordine, sezione iperpiana di  $F^5$ .

Il risultato ora ottenuto è più espressivo se si tien conto anche che ogni  $F^5$  di  $S_6$  è rigata<sup>6)</sup>; si ha cioè: *Non esistono superficie di  $4^0$  e di  $5^0$  ordine, non rigate, immerse in uno spazio di dimensione  $> 4$ , che rappresentino un'equazione di LAPLACE.*

3. — Sia ora  $n = 6$ . Una sezione iperpiana generica di  $F^6$  è proiettata da un suo punto generico su un  $S_3$  in una curva di  $5^0$  ordine, la quale può essere solo di genere: 0, 1, 2. Escluse sempre le rigate<sup>7)</sup>, le sezioni

<sup>4)</sup> Per le operazioni sui sistemi lineari di curve su una superficie algebrica, si veda per es. l'Art. di *G. Castelnuovo e F. Enriques*, Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus. Encycl. d. math. Wiss., III C 6 b, n<sup>o</sup> 9.

<sup>5)</sup> V. per es. *F. Enriques* ed *O. Chisini*, Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, II, Bologna, Zanichelli, 1918, p. 45.

<sup>6)</sup> *P. Del Pezzo*, Sulle superficie di ordine  $n$  immerse nello spazio di  $n+1$  dimensioni, Rend. Acc. Napoli 24 (1885) p. 212.

<sup>7)</sup> *G. B. Guccia*, Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono unicursali, Rend. Palermo 1 (1884-87) p. 165. *E. Picard*, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, II, p. 59, n<sup>o</sup> 11.

iperpiane generiche di  $F^6$  saranno quindi di genere 1 o 2; ed  $F^6$  sarà in ambo i casi razionale.

Nel primo caso  $F^6$  sarà normale in  $S_6$ , e si rappresenterà su un piano  $\pi$  mediante un sistema lineare  $\Sigma$ ,  $\infty^5$ , incompleto, di cubiche di genere 1 passanti per tre punti  $A, B, C$ .

Viceversa, esaminiamo se nel sistema lineare  $\infty^6$  di tutte le  $C^3$  passanti per  $A, B, C$  si può trovare un sistema lineare  $\infty^5$  tale che un punto generico di  $\pi$  sia triplo per una delle sue cubiche. Distingueremo i varî casi che si possono avere secondochè i punti  $A, B, C$  son distinti oppure coincidono variamente tra loro. Chiamando sempre  $x$  un punto della  $F^6$  di  $S_5$  che si cerca, diremo invece  $y$  un punto della  $\Phi^6$  di  $S_6$  di cui  $F^6$  sarà proiezione; e chiameremo poi  $u_0 u_1 u_2$  le coordinate omogenee di punto nel piano  $\pi$ , sicchè come coordinate curvilinee su  $F^6$  e su  $\Phi^6$  si potranno prendere sempre:  $u = \frac{u_1}{u_0}$ ,  $v = \frac{u_2}{u_0}$ . Indicheremo poi sempre i punti fondamentali delle coordinate, sia in  $S_5$ , che in  $S_6$ , che su  $\pi$ , con una semplice numerazione.

a) Se  $A, B, C$  son vertici d'un triangolo, e si assumono come punti fondamentali delle coordinate nel piano  $\pi$ , le rette che li proiettano da un punto generico  $m_i$  di  $\pi$  compongono la  $C^3$ :

$$(m_1 u_2 - m_2 u_1) (m_2 u_0 - m_0 u_2) (m_0 u_1 - m_1 u_0) = 0;$$

la quale, al variare delle  $m_i$ , varia entro il sistema lineare  $\infty^5$  di cubiche definito dalle sei cubiche seguenti:

$$u_0^2 u_1, \ u_0^2 u_2, \ u_0 u_1^2, \ u_0 u_2^2, \ u_1^2 u_2, \ u_1 u_2^2.$$

Soddisfa pertanto alle condizioni volute la  $F^6$  luogo del punto:

$$x (u, v, u^2, v^2, u^2 v, u v^2). \quad (I)$$

Sostituendo successivamente le coordinate di  $x$  nella (I) se ne determinano i coefficienti; si trova così che  $F^6$  rappresenta l'equazione seguente:

$$u^2 \theta_{uu} + uv \theta_{uv} + v^2 \theta_{vv} - 2u \theta_u - 2v \theta_v + 2\theta = 0; \quad (4)$$

le cui caratteristiche son date dall' equazione:

$$u^2 dv^2 - uv du dv + v^2 du^2 = 0;$$

dalla quale si ricava:  $\frac{dv}{du} = \frac{v}{u} \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ,

e quindi:

$$v = Cu^{\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})},$$

ove  $C$  è una costante arbitraria. Le immagini su  $\pi$  delle caratteristiche son dunque delle parabole trascendenti.

La  $\mathcal{Q}^6$  di  $S_6$  rappresentata sul piano dal sistema lineare  $\infty^6$  di tutte le  $C^3$  passanti per  $A, B, C$ , e di cui la  $F^6$  precedente è proiezione, è luogo del punto:

$$y(u, v, u^2, v^2, u^2v, uv^2, uv);$$

la circostanza che la sua proiezione su un  $S_5$  dal punto fondamentale 6 rappresenta un'equazione (1) dipende dal fatto che l'iperpiano  $\xi$  osculatore a  $\mathcal{Q}^6$  in un suo punto generico, che è definito dai punti  $y, y_u, y_v, y_{uu}, y_{uv}, y_{vv}$ , ossia l'  $S_5$  di equazione:

$$uv^2y_0 - u^2vy_1 - v^2y_2 + u^2y_3 + vy_4 - uy_5 = 0,$$

al variare di  $u, v$ , passa sempre per il punto 6. E non vi sono, oltre 6, altri punti comuni a tutti gli  $S_5$  osculatori di  $\mathcal{Q}^6$ . Si può rilevare, e lo si verifica con un facile calcolo, che il primo inviluppo degli iperpiani  $\xi$ , ossia il luogo degli  $S_3$  intersezioni di  $\xi, \xi_u, \xi_v$ , si compone degli  $S_3$  che proiettano dal punto 6 i piani tangenti di  $\mathcal{Q}^6$ , mentre il secondo inviluppo è il cono che proietta da 6 la  $\mathcal{Q}^6$  stessa. L'equazione di  $\xi$  mostra anche che gli iperpiani  $\xi$  formano, entro la stella di centro 6, una varietà duale della  $F^6$  di  $S_5$ , pensata come luogo di punti.

La  $F^6$  di  $S_5$  così trovata contiene tre fasci di coniche, rappresentati su  $\pi$  dai tre fasci di rette di centri  $A, B, C$ ; e l'  $S_4$  osculatore ad  $F^6$  in un suo punto generico  $x$  taglia  $F^6$  secondo le coniche dei tre fasci uscenti da  $x$ .

L'equazione (4) si può semplificare assumendo come nuove variabili:

$$u_1 = vu^\omega, \quad v_1 = vu^{\omega'};$$

ove si è posto per brevità:  $\omega = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ ,  $\omega' = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) = \omega^2$ ; se poi le coordinate di  $x$  vengono moltiplicate tutte per:  $u_1^\omega v_1^{\omega'}$ , il che non altera  $F^6$ , la (4) diviene:

$$3 u_1 v_1 \theta_{u_1 v_1} - \theta = 0, \quad (4')$$

equazione ad invarianti uguali. Assumendo infine come nuove variabili  $u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \log u_1$ ,  $v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \log v_1$ , essa assume la forma:

$$\theta_{u_0 v_0} = \theta, \quad (4'')$$

caratteristica delle equazioni di LAPLACE che son mutate in sè dalle trasformazioni di LAPLACE<sup>8)</sup>. La (4') mostra poi che i trasformati di LAPLACE del punto  $x$  sono i punti:

$$\frac{\partial}{\partial v_1} (u_1^\omega v_1^{\omega'} x), \frac{\partial}{\partial u_1} (u_1^\omega v_1^{\omega'} x).$$

Ma si ha:

$$\frac{\partial}{\partial u} = \omega v u^{\omega-1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \omega' v u^{\omega'-1} \frac{\partial}{\partial v_1}, \quad \frac{\partial}{\partial v} = u^\omega \frac{\partial}{\partial u_1} + u^{\omega'} \frac{\partial}{\partial v_1};$$

e quindi anche:

$$(\omega' - \omega) v u^{\omega'} \frac{\partial}{\partial v_1} = u \frac{\partial}{\partial u} - \omega v \frac{\partial}{\partial v}, \quad (\omega - \omega') v u^\omega \frac{\partial}{\partial u_1} = u \frac{\partial}{\partial u} - \omega' v \frac{\partial}{\partial v};$$

dimodochè i due punti anzidetti, a meno dei due fattori:  $(\omega' - \omega) \frac{v^2}{u^\omega}$ ,  $(\omega - \omega') \frac{v^2}{u^\omega}$ , coincidono rispett. coi punti:

$$x_1 = (\omega - 1) x + u x_u - \omega v x_v, \quad x_{-1} = (\omega' - 1) x + u x_u - \omega' v x_v;$$

cioè coi punti:

$$x_1 (\omega u, -v, -\omega' u^2, \omega' v^2, u^2 v, -\omega u v^2);$$

$$x_{-1} (\omega' u, -v, -\omega u^2, \omega v^2, u^2 v, -\omega' u v^2);$$

i quali si deducono da  $x$  mediante due omografie cicliche di 6º ordine, di cui la seconda è la 5ª potenza della prima. Si conclude perciò: *La superficie (I rappresenta un'equazione di LAPLACE ad invarianti uguali,*

<sup>8)</sup> *Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces*, II, 2e éd., 1915, p. 31.

e dà luogo ad una serie di LAPLACE periodica composta di sei superficie fra loro proiettivamente identiche:

$$\begin{aligned}
 & x(u, v, u^2, v^2, u^2v, uv^2); \\
 x_{-5} &= x_1(\omega u, -v, -\omega' u^2, \omega' v^2, u^2v, -\omega uv^2); \\
 x_{-4} &= x_2(\omega' u, v, \omega u^2, \omega v^2, u^2v, \omega' uv^2); \\
 x_{-3} &= x_3(u, -v, -u^2, v^2, u^2v, -uv^2); \\
 x_{-2} &= x_4(\omega u, v, \omega' u^2, \omega' v^2, u^2v, \omega uv^2); \\
 x_{-1} &= x_5(\omega' u, -v, -\omega u^2, \omega v^2, u^2v, -\omega' uv^2) \text{ (9).}
 \end{aligned}$$

b) Quando i punti  $A, B, C$  sono allineati, si posson prendere rispett. come punti (010), (001), (011) del piano  $\pi$ ; con ciò la  $C^3$  composta delle rette che li proiettano da un punto generico  $m_i$  di  $\pi$  diviene:

$$(m_2 u_0 - m_0 u_2) (m_1 u_0 - m_0 u_1) [(m_1 - m_2) u_0 - m_0 u_1 + m_0 u_2] = 0;$$

cioè:

$$\begin{aligned}
 & m_1 m_2 (m_1 - m_2) u_0^3 - m_0 m_2 (2 m_1 - m_2) u_0^2 u_1 - m_0 m_1 (m_1 - 2 m_2) u_0^2 u_2 \\
 & + m_0^2 m_2 u_0 u_1 (u_1 - 2 u_2) + m_0^2 m_1 u_0 u_2 (2 u_1 - u_2) - m_0^3 u_1 u_2 (u_1 - u_2) = 0.
 \end{aligned}$$

Al variare delle  $m_i$ , essa varia nel sistema lineare  $\infty^5$  definito dalle sei  $C^3$ :

$$u_0^3, u_0^2 u_1, u_0^2 u_2, u_0 u_1 (u_1 - 2 u_2), u_0 u_2 (-2 u_1 + u_2), u_1 u_2 (u_1 - u_2);$$

perciò soddisfa alle condizioni volute la  $F^6$  di  $S_5$  luogo del punto:

$$x [1, u, v, u(u-2v), v(v-2u), uv(u-v)]. \quad (\text{II})$$

Essa rappresenta l'equazione:

$$\theta_{uu} + \theta_{uv} + \theta_{vv} = 0, \quad (5)$$

avente come caratteristiche le linee:

---

(9) V. *Tzitzéica*, Géométrie différentielle projective des réseaux, 1924, n° 184 a p. 196. Esprimendo le  $x_i$ , normate nel modo che s'è detto, coi parametri  $u_0, v_0$ , esse assumono la forma  $e^{h_i} u_0 + \frac{1}{h_i} v_0$ , ove le costanti  $h_i$  valgono rispett.:  $\frac{\omega-1}{\sqrt{3}}, \frac{2\omega+1}{\sqrt{3}}$ ,  $-\frac{\omega+2}{\sqrt{3}}, \frac{\omega+2}{\sqrt{3}}, -\frac{2\omega+1}{\sqrt{3}}, -\frac{\omega-1}{\sqrt{3}}$ .

$$dv^2 - du dv + du^2 = 0,$$

ossia:

$$v = \frac{1}{2} (1 \pm i\sqrt{3}) u + C;$$

le immagini su  $\pi$  ne sono le rette di due fasci, coi centri sulla retta  $ABC$ , nei due punti del gruppo Hessiano di  $ABC$ ; su  $F^6$  avremo due fasci di  $C^3$  sghembe come caratteristiche.

La superficie (II è proiezione, su  $y_4 = 0$ , della  $\Phi^6$  di  $S_6$  luogo del punto:

$$y [1, u, v, u^2, uv, v^2, uv(u-v)],$$

quando si assuma come centro di proiezione il punto (0002120), il quale sta, di nuovo, su tutti gli  $S_5$  osculatori di  $\Phi^6$ :

$$\begin{aligned} uv(u-v)y_0 + v(v-2u)y_1 - u(u-2v)y_2 + vy_3 + 2(u-v)y_4 \\ - uy_5 - y_6 = 0, \end{aligned}$$

ed è il solo punto in queste condizioni. Anche ora, come nel caso precedente, gli  $S_4$  osculatori della  $F^6$  la tagliano secondo terne di coniche.

Assumendo come nuovi parametri:

$$u_1 = v + \omega u, \quad v_1 = v + \omega' u,$$

la (5) diventa:

$$\theta_{u_1 v_1} = 0; \quad (5')$$

perciò la superficie (II ammette un doppio sistema coniugato di coni circoscritti. I vertici dei coni suddetti sono i due punti  $x_{v_1}$  ed  $x_{u_1}$ ; cioè i punti  $x_u - \omega x_v, x_u - \omega' x_v$ ; cioè infine i punti di coordinate rispett.:

$$(0, 1, -\omega, -2v_1, 2\omega'v_1, -v_1^2); \quad (0, 1, -\omega', -2u_1, 2\omega u_1, -u_1^2);$$

i quali hanno per luoghi due coniche, le quali passano entrambe per il punto fondamentale (000001) e stanno su due piani entro  $x_0 = 0$ .

c) d) Se  $A, B$  coincidono, si può collocare in  $A$  il punto (010) ed in  $C$  il punto (001), supponendo poi  $B$  consecutivo ad  $A$  sulla retta  $u_2 = 0$  oppure sulla  $u_0 = 0$  secondochè  $A, B, C$  non sono oppur sono allineati. Allora il sistema  $\infty^6$  di tutte le  $C^3$  passanti per  $A, B, C$  si potrà definire con le  $C^3$ :

$$u_0^3, u_0^2 u_1, u_0^2 u_2, u_0 u_1 u_2, u_0 u_2^2, u_1 u_2^2, u_1^2 u_2 \text{ (oppure } u_0 u_1^2);$$

esso rappresenta la  $\mathcal{Q}^6$  di  $S_6$  luogo del punto:

$$\gamma [1, u, v, uv, v^2, uv^2, u^2v \text{ (oppure } u^2)];$$

per la quale l'  $S_5$  osculatore generico ha per equazione, in ambo i casi:

$$uv^2 y_0 - v^2 y_1 - 2uv y_2 + 2v y_3 + u y_4 - y_5 = 0.$$

Al variare di  $u, v$ , esso passa sempre per il punto  $O$  (0000001), e non per altri punti fissi; ma  $O$ , assunto come centro di proiezione, non conduce a nuove soluzioni, perchè esso sta, in ambo i casi, su  $\mathcal{Q}^6$ ; anzi per esso passano tutte le coniche  $v = \text{coste}$  di  $\mathcal{Q}^6$ , sicchè la proiezione di  $\mathcal{Q}^6$  da  $O$  sarebbe rigata. Ponendo infatti  $v = k$  nelle coordinate di  $\gamma$ , esse diventano quelle di  $O$  per  $u \rightarrow \infty$ <sup>10)</sup>.

e) f) Infine, quando  $A, B, C$  coincidono, si può collocare in  $A$  il punto (010) e sulla retta  $AB$  il punto (001). Il sistema di tutte le  $C^3$  passanti per  $A, B, C$  è definito allora dalle  $C^3$ :

$$u_0^3, u_0^2 u_1, u_0^2 u_2, u_0 u_1 u_2, u_0 u_2^2, u_2^3, u_0 u_1^2 + k u_1 u_2^2,$$

ove  $k$  è una costante. I punti  $A, B, C$  non sono oppure sono allineati secondochè  $k \neq 0$  oppure  $k = 0$ . Si ha così la  $\mathcal{Q}^6$  di  $S_6$  luogo del punto:

$$\gamma (1, u, v, uv, v^2, v^3, u^2 + k u v^2);$$

l'equazione del suo  $S_5$  osculatore generico è:

$$v^3 y_0 - 3v^2 y_2 + 3v y_4 - y_5 = 0;$$

perciò gli  $S_5$  osculatori di  $\mathcal{Q}^6$  passano tutti per il piano fondamentale 136, il quale si appoggia a  $\mathcal{Q}^6$  solo nel punto 6, che si ha per  $u \rightarrow \infty$

<sup>10)</sup> Non deve sorprendere il fatto che, in questo caso, non si trovi alcuna soluzione. Infatti, l'iperpiano osculatore ad  $F^6$  in un suo punto generico taglierebbe ora  $F^6$  secondo tre coniche, di cui due coincidenti e rappresentate su  $\pi$  da una retta del fascio  $A$ ; ed allora (v. loc. cit <sup>1)</sup>, n<sup>o</sup> 21) le caratteristiche di  $F^6$  dei due sistemi coinciderebbero tutte con le coniche aventi per immagini le rette del fascio  $A$ . D'altra parte, se una superficie luogo di  $\infty^1$  curve piane:  $x_i = a_i(v) + u b_i(v) + \varphi(u) c_i(v)$  rappresenta un'equazione (1) in modo che tali curve ne sian caratteristiche, devono essere legati fra loro linearmente i punti:  $x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}$ , cioè i punti:  $a, b, c, a_v + u b_v + \varphi c_v, b_v + \varphi' c_v$ ; il che esige, poichè la retta che congiunge gli ultimi due non può variare in un fascio, che i piani di quelle  $\infty^1$  curve formino una sviluppabile ordinaria (e viceversa). Ed allora, nel caso nostro di caratteristiche coincidenti, i piani delle coniche sopra considerate sarebbero tangentì ad  $F^6$ , che avrebbe solo  $\infty^1$  piani tangentì, e sarebbe una sviluppabile.

e  $v$  arbitrario. Proiettando  $\mathcal{Q}^6$  da un punto  $(0, \lambda, 0, \mu, 0, 0, 2v)$  del piano 136 ( $\lambda, \mu$  non entrambi nulli), per es. sopra  $y_1 = 0$ , si trova la  $F^6$  luogo del punto:

$$x \left( 1, v, uv - \frac{\mu}{\lambda} u, v^2, v^3, u^2 + kuv^2 - 2 \frac{v}{\lambda} u \right), \quad (III)$$

la quale rappresenta l'equazione:

$$\left( kv^2 - 2u - 2k \frac{\mu}{\lambda} v + 2 \frac{v}{\lambda} \right) \theta_{uu} + 2 \left( \frac{\mu}{\lambda} - v \right) \theta_{uv} + 2 \theta_u = 0. \quad (6)$$

Le caratteristiche di un sistema son le linee  $dv = 0$ , cioè le coniche dell'unico fascio esistente ora su  $F^6$ ; quelle dell'altro sistema son date dall'equazione:

$$-2 \left( \frac{\mu}{\lambda} - v \right) du + \left( kv^2 - 2u - 2k \frac{\mu}{\lambda} v + 2 \frac{v}{\lambda} \right) dv = 0,$$

cioè:

$$d \left( \frac{u - \frac{v}{\lambda}}{v - \frac{\mu}{\lambda}} \right) + \frac{k}{2} \left[ 1 - \frac{\mu^2}{\lambda^2} \frac{1}{(v - \frac{\mu}{\lambda})^2} \right] dv = 0;$$

da cui, integrando:

$$2\lambda^2 \left( u - \frac{v}{\lambda} \right) + k\lambda^2 v \left( v - \frac{\mu}{\lambda} \right) + k\mu^2 = C \left( v - \frac{\mu}{\lambda} \right),$$

ed in forma omogenea:

$$2\lambda^2 u_0 (\lambda u_1 - v u_0) + k\lambda^2 u_2 (\lambda u_2 - \mu u_0) + k\lambda\mu^2 u_0^2 = C u_0 (\lambda u_2 - \mu u_0).$$

Le immagini su  $\pi$  di queste altre caratteristiche son coniche passanti per  $A$  e  $B$ , e che si osculano in  $A$  senza passare per  $C$  (se  $k \neq 0$ ); esse passano inoltre per il punto  $D$  ( $\lambda u_2 - \mu u_0 = 2\lambda(\lambda u_1 - v u_0) + k\mu^2 u_0 = 0$ ). Se  $k = 0$ , esse si spezzano nella retta  $u_0 = 0$  e nelle rette del fascio di centro  $D$ . Su  $F^6$  si hanno, nei due casi rispettivamente, delle  $C^4$  e delle  $C^3$  di un fascio.

Questa volta i piani delle coniche del fascio esistente su  $F^6$  passano tutti per la retta fondamentale 25; infatti, se nelle (III) si fissa il valore

di  $v$  e si fa tendere  $u$  all'infinito, si trovano le coordinate del punto fondamentale 5, e, d'altra parte, il punto  $x_u$  sta sempre sulla retta 25. Più esattamente, i piani anzidetti proiettano dalla retta 25 i punti della  $C^3$  sghemba ( $1 \circ v^2 v^3 \circ$ ); essi ricoprono quindi una  $V_3^3$ , cono di 2<sup>a</sup> specie; e gli  $S_4$  osculatori di  $F^6$  son quelli che osculano la  $V_3^3$  lungo i suoi piani generatori, e quindi son solo  $\infty^1$  (anzichè  $\infty^2$  come per i casi precedenti), e tagliano ciascuno  $F^6$  secondo una conica contata tre volte.

Assumendo come nuove variabili:

$$u_1 = \left[ 2\lambda^2 \left( u - \frac{v}{\lambda} \right) + k\lambda^2 v \left( v - \frac{\mu}{\lambda} \right) + k\mu^2 \right] : \left( v - \frac{\mu}{\lambda} \right), \quad v_1 = v,$$

e moltiplicando inoltre le coordinate di  $x$  per  $\left( v - \frac{\mu}{\lambda} \right)^{-2}$ , la (6) diventa:

$$\theta_{u_1 v_1} = 0; \quad (6')$$

sicchè anche quest'altra superficie ammette un doppio sistema coniugato di coni circoscritti. I vertici di detti coni sono rispett. i punti:  $\frac{\partial}{\partial v_1}$   $\frac{x}{\left( v - \frac{\mu}{\lambda} \right)^2}$ ,  $\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{x}{\left( v - \frac{\mu}{\lambda} \right)^2}$ ; il secondo di essi coincide con  $x_u$ , ed ha per luogo la retta 25; il primo è il punto:

$$-4\lambda^2 x + (2\lambda^2 u - k\lambda^2 v^2 + 2k\lambda\mu v - 2\lambda v) x_u + 2\lambda(\lambda v - \mu) x_v,$$

esso descrive una  $C^3$  sghemba quando  $k \neq 0$ , una conica se  $k = 0$ .

Oss. — In tutti i casi a) b) ... f) l'equazione dell' $S_5$  osculatore della corrispondente  $\Phi^6$  di  $S_6$  non è mai risultata indeterminata; ciò basta per concludere che nessuna  $\Phi^6$  di  $S_6$ , non rigata, può rappresentare un'equazione (1).

4. — Supponiamo infine che le sezioni iperpiane di  $F^6$  siano di genere 2; allora  $F^6$  sarà razionale, normale in  $S_5$ , e si potrà rappresentare su un piano  $\pi$  con un sistema lineare  $\infty^5$  di  $C^4$  avente un punto base doppio  $A$  e sei punti base semplici  $B_1, \dots, B_6$ :  $C^4 (A^2 B_1 B_2 \dots B_6)$ , oppure con un sistema  $C^5 (A^3 B^2 C_1 C_2 \dots C_6)$ , oppure con un sistema  $C^6 (A^4 B_1^2 B_2^2 C_1 C_2 \dots C_6)$  ove  $B_1$  e  $B_2$  sono consecutivi ad  $A$  secondo direzioni distinte<sup>11)</sup>. Però i sistemi del 2<sup>o</sup> e del 3<sup>o</sup> tipo si possono ridurre

<sup>11)</sup> *Ferretti*, Sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane irriducibili di genere  $p$ ; in particolare per i valori 0, 1, 2 del genere; Rend. Palermo 16 (1902) p. 236.

al 1º tipo mediante trasformazioni birazionali del piano  $\pi^{12})$ . Infatti, un sistema  $C^5$  ( $A^3 B^2 C_1 C_2 \dots C_6$ ) si abbassa al 4º ordine, e con una sola trasformazione quadratica del piano  $\pi$ , tranne quando  $B$  è consecutivo ad  $A$  ed i punti  $C_i$  son tutti consecutivi ad  $A$  su un ramo (lineare) non contenente  $B$ , oppure quando i punti  $A, B, C_i$  son tutti consecutivi su un ramo non lineare (e che potrà essere solo di 2º o di 3º ordine); ma, se si verifica la prima di queste due ipotesi, la trasformazione cubica (di Jonquieres) definita dalle  $C^3$  ( $A^2 B C_1 C_2 C_3$ ) riduce al 4º ordine il sistema di  $C^5$ ; lo stesso avviene nella seconda ipotesi se il ramo uscente da  $A$  e contenente gli otto punti base è di 2º ordine, mentre se esso fosse di 3º ordine si otterrebbe lo stesso scopo mediante la trasformazione definita dalle  $C^4$  ( $A^3 B C_1 \dots C_5$ ). E considerazioni analoghe si posson fare per il sistema  $C^6$  ( $A^4 B_1^2 B_2^2 C_1 \dots C_6$ ).

Le superficie  $F^6$  che cerchiamo si possono pertanto rappresentare su  $\pi$  con un sistema lineare  $\Sigma$  di  $C^4$  di genere 2 con un punto base doppio  $A$  e sei punti base semplici  $B_i$ ; le rette di  $\pi$  uscenti da  $A$  rappresentano coniche di  $F^6$  costituenti un fascio  $S$ . Ragionando come al n° 2, si trova che l'  $S_4$  osculatore ad  $F^6$  in un suo punto generico  $P$ , di cui sia  $P'$  l'immagine su  $\pi$ , taglia  $F^6$  secondo una  $C^6$  la cui immagine su  $\pi$  è una  $C^4$  contenente come parte la retta  $AP'$ , mentre la parte residua è una  $C^3$  contenuta in una rete a Jacobiana indeterminata, perciò costituita, tolta una eventuale retta fissa, di rette variabili in un fascio. Il centro di questo fascio dev' essere  $A$ , perchè una sua retta generica deve rappresentare una linea di  $F^6$  di ordine non superiore a 2 (dal momento che due, almeno, di queste linee, insieme con una conica del fascio  $S$ , compongono una sezione iperpiana di  $F^6$ ). Ne segue che tre coniche generiche del fascio  $S$  costituiscono una sezione iperpiana di  $F^6$ ; se due di esse si tengono fisse, mentre si fa variare l'altra entro  $S$ , si vede che i piani di due coniche generiche di  $S$  stanno su  $\infty^1 S_4$ , e quindi in un  $S_3$ ; i piani delle coniche di  $S$  si tagliano quindi a due a due secondo rette, sicchè essi passano tutti per una stessa retta  $\alpha$ , cioè ricoprono un cono di 2ª specie di vertice  $\alpha$ . E sarà un cono di 3º ordine,  $V_3^3$ , perchè un piano generico  $\tau$  incontra tre piani generatori del cono: son quelli delle tre coniche di  $S$  costituenti la sezione di  $F^6$  con l'iperpiano  $\alpha \tau$ . Si spiega allora, come al n° 3 e) f), che gli  $S_4$  osculatori di  $F^6$  son solo  $\infty^1$ : essi sono gli  $S_4$  osculatori al cono  $V_3^3$  lungo i suoi vari piani generatori, e tagliano ciascuno  $F^6$  secondo una conica di  $S$  contata tre volte.

<sup>12)</sup> V. la mia Memoria su: Le superficie di sesto ordine con infinite coniche, Mem. Ist. Lombardo, 21 [(3) 12] 1916 p. 243, § 113.

D'altra parte, due sezioni iperpiane generiche di  $F^6$  stanno su  $\infty^4$  quadriche dell'  $S_5$ : lo si vede osservando che su una di tali sezioni le  $\infty^{20}$  quadriche di  $S_5$  tagliano una  $g_{12}^{10}$  completa, onde essa sta su  $\infty^9$  quadriche; queste, poi, segano sull'altra delle due sezioni, fuori dei sei punti che essa ha in comune con la prima, una  $g_6^4$  completa, sicchè le due sezioni considerate stanno proprio su  $\infty^4$  quadriche. Quelle di esse che contengono un punto ulteriore di  $F^6$  conterranno  $F^6$  per intero, ed essendo ancora  $\infty^3$ , non conterranno tutte il cono  $V_3^3$ , il quale sta solo su  $\infty^2$  quadriche; dunque  $F^6$  si può costruire intersecando il cono  $V_3^3$  con una quadrica  $Q$ , che si può prendere in modo generico, perchè, comunque essa venga scelta, gli  $\infty^1 S_4$  osculatori del cono  $V_3^3$  saran sempre osculatori anche ad  $F^6$ .

Le coniche del fascio  $S$  danno anche uno dei due sistemi di caratteristiche di  $F^6$ , perchè i piani tangentи ad  $F^6$  nei punti di una di quelle coniche stanno tutti nell'  $S_3$  tangente al cono  $V_3^3$  lungo il piano della conica stessa, e quindi formano una sviluppabile. Le caratteristiche dell'altro sistema son le linee di contatto di  $F^6$  coi coni che si possono circoscrivere ad essa dai singoli punti della retta  $\alpha$ ; tali linee si ottengono anche tagliando  $F^6$  con gli  $S_4$  polari dei punti di  $\alpha$  rispetto alla quadrica  $Q$ , cioè con gli  $S_4$  che passano per l'  $S_3$  polare di  $\alpha$  rispetto a  $Q$ . I due sistemi di caratteristiche son dunque sempre distinti.

Nel piano  $\pi$ , le  $C^4$  del sistema  $\Sigma$  avranno in  $A$  un punto doppio a tangentи fisse; infatti, se dette tangentи (o una sola di esse) fossero variabili, il punto  $A$  sarebbe l'immagine d'una conica (o di una retta) di  $F^6$ , unisecante le coniche del fascio  $S$ , le quali starebbero pertanto tutte in un  $S_4$  (o in un  $S_3$ ), determinato da  $\alpha$  e da quella conica (o retta). Si avranno poi in  $\Sigma$   $\infty^3$  curve spezzate in tre rette variabili del fascio  $A$  ed in una retta fissa  $r$ , che non passerà oppure passerà per  $A$  secondochè la quadrica  $Q$  ha in comune con  $\alpha$  due punti distinti o coincidenti. In ogni caso, però, la retta  $r$  non potrà essere incontrata in punti variabili dalle  $C^4$  di  $\Sigma$ ; sicchè, quando  $r$  non passa per  $A$ , essa dovrà contenere quattro dei sei punti base semplici di  $\Sigma$ , mentre gli altri due saranno infinitamente vicini ad  $A$ ; quando invece  $r$  contiene  $A$ , al più due dei sei punti  $B_i$  potranno essere distinti da  $A$ , e situati su  $r$ . Cerchiamo le equazioni di  $F^6$  nei casi principali.

a) *La retta  $r$  non passa per  $A$ , e le tangentи in  $A$  alle  $C^4$  di  $\Sigma$  son distinte.* Collocando in  $A$  il punto fondamentale (100), e prendendo  $r$  e quelle due tangentи rispett. come rette  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ , il sistema  $\Sigma$  si potrà definire con le sei  $C^4$ :

$$u_0^2 u_1 u_2, \quad u_0 u_1^3, \quad u_0 u_1^2 u_2, \quad u_0 u_1 u_2^2, \quad u_0 u_2^3, \quad \varphi(u_1 u_2); \quad (7)$$

$$\text{ove: } \varphi(u_1 u_2) = \alpha_0 u_1^4 + 4 \alpha_1 u_1^3 u_2 + 6 \alpha_2 u_1^2 u_2^2 + 4 \alpha_3 u_1 u_2^3 + \alpha_4 u_2^4;$$

sicchè si trova la  $F^6$  luogo del punto:

$$x [u v, u^3, u^2 v, u v^2, v^3, \varphi(u v)]. \quad (\text{IV})$$

Sostituendo nella (1) successivamente le espressioni  $u^3, v^3, u v$ , si trova:

$$\begin{aligned} 6\alpha + 3u\delta + u^2\eta &= 0, \quad 6\gamma + 3v\epsilon + v^2\eta = 0, \\ \beta + v\delta + u\epsilon + uv\eta &= 0; \end{aligned}$$

sostituendo invece  $u^2 v, u v^2$  si hanno altre due equazioni, le quali, eliminandone  $\alpha, \beta, \gamma$  mediante le tre precedenti, si riducono entrambe a:

$$3v\delta + 3u\epsilon + 4uv\eta = 0;$$

sostituendo infine  $\varphi(u v)$  nella (1), eliminando di nuovo  $\alpha, \beta, \gamma$ , e ricordando che:

$$\begin{aligned} 4\varphi &= u\varphi_u + v\varphi_v, \quad u\varphi_{uu} + v\varphi_{uv} = 3\varphi_u, \quad u\varphi_{uv} + v\varphi_{vv} = 3\varphi_v, \\ u^2\varphi_{uu} + 2uv\varphi_{uv} + v^2\varphi_{vv} &= 12\varphi, \end{aligned}$$

si trova inoltre:

$$\varphi_u \delta + \varphi_v \epsilon + 2\varphi \eta = 0.$$

Se ne traggono i valori di  $\alpha, \beta, \dots, \eta$ ; per cui la superficie (IV) rappresenta l'equazione:

$$\begin{aligned} u^2(u\varphi_u - 3v\varphi_v) \theta_{uu} + 4uv(u\varphi_u - v\varphi_v) \theta_{uv} + v^2(3u\varphi_u - v\varphi_v) \theta_{vv} - (8) \\ - 2u(3u\varphi_u - 5v\varphi_v) \theta_u - 2v(5u\varphi_u - 3v\varphi_v) \theta_v + 12(u\varphi_u - v\varphi_v) \theta = 0. \end{aligned}$$

L'equazione delle caratteristiche:

$$v^2(3u\varphi_u - v\varphi_v) du^2 - 4uv(u\varphi_u - v\varphi_v) du dv + u^2(u\varphi_u - 3v\varphi_v) dv^2 = 0$$

si scinde nelle due seguenti:

$$u dv - v du = 0, \quad u\varphi_u(u dv - 3v du) = v\varphi_v(3u dv - v du);$$

la seconda delle quali si può anche scrivere:

$$\varphi \cdot d(uv) = uv \cdot d\varphi.$$

Le immagini delle caratteristiche son dunque:

$$u = Cv, \quad \varphi(uv) = Cu v;$$

ossia, in forma omogenea:

$$u_1 - Cu_2 = 0, \quad \varphi(u_1 u_2) - Cu_0^2 u_1 u_2 = 0,$$

ove  $C$  è una costante arbitraria. Son dunque le rette del fascio  $A$ , e le  $C^4$  di un fascio: queste ultime hanno in  $A$  un punto doppio con le rette  $u_1 = 0, u_2 = 0$  come tangentи quadripunte, e passano inoltre per i quattro punti base semplici  $u_0 = \varphi(u_1 u_2) = 0$  di  $\Sigma$ , toccando ivi le rette che li congiungono con  $A$ ; esse sono quindi  $C^4$  di  $\Sigma$ . Su  $F^6$  si avranno, come s'è già detto, le coniche del fascio  $S$  ed un fascio di sezioni iperpiane.

L'equazione (8) è ad invarianti nulli. Lo si può vedere subito geometricamente. Diciamo infatti  $\rho$  l'  $S_3$  polare della retta  $\alpha$ , vertice del cono  $V_3^3$  considerato poco fa, rispetto alla quadrica  $Q$ ; l'intersezione di  $F^6$  con un  $S^4$  passante per  $\rho$  è una caratteristica, e le tangentи nei suoi vari punti alle coniche di  $S$  che rispett. ne escono passano tutte per un punto di  $\alpha$ , cioè per il polo dell'  $S_4$  considerato rispetto a  $Q$ ; uno dei due trasformati di LAPLACE del punto  $x$  descrive quindi la retta  $\alpha$ . Prendiamo ora invece le tangentи nei punti d'una conica  $\Gamma$  di  $S$  alle caratteristiche situate negli  $S_4$  passanti per  $\rho$ ; pensando alla  $C^3$  sghemba  $L$  che i piani generatori del cono  $V_3^3$  tagliano su  $\rho$ , si vede che quelle tangentи, stanno tutte sull'  $S_3$  tangente a  $V_3^3$  lungo il piano  $\sigma$  di  $\Gamma$ , stanno sull'  $S_3$  che proietta da  $\alpha$  la tangente  $t$  ad  $L$  nel punto  $\sigma \rho$ ; d'altra parte esse si devono appoggiare tutte a  $t$ , perchè una qualunque di esse sta in un  $S_4$  uscente da  $\rho$ , e che taglia l'  $S_3$  precedente secondo un piano che passa per  $t$ ; d'altra parte ancora, essendo anche tangentи a  $Q$ , stanno anche rispett. sugli  $S_4$  polari dei punti di  $\Gamma$  rispetto a  $Q$ , i quali tagliano  $\rho$  secondo il piano  $\sigma'$  polare di  $\sigma$ ; quelle tangentи passano quindi tutte per il punto  $t \sigma'$ . E poichè, al variare di  $\Gamma$  entro  $S$ , il piano  $\sigma'$  inviluppa entro  $\rho$  una nuova  $C^3$  sghemba  $L'$ , che riesce riferita proiettivamente ad  $L$ , la linea luogo del punto  $t \sigma'$  appare generata, mediante due  $C^3$  sghembe fra loro proiettive, prendendo le intersezioni delle tangentи dell' una coi piani osculatori omologhi dell' altra: tagliando con un piano generico di  $\rho$ , ed applicando il principio di corrispondenza sulla  $C^4$  sezione della sviluppabile circoscritta alla prima  $C^3$ , si trova che il luogo del punto  $t \sigma$  è una linea razionale di 7° ordine.

Analiticamente: se si prendono come nuovi parametri:

$$u_1 = \frac{u}{v}, \quad v_1 = \frac{\varphi(uv)}{uv},$$

l'equazione (8) diventa:

$$4u^2v_1^2 \cdot \theta_{u_1v_1} - 6u^2v_1\theta_{u_1} + 2v_1(u\varphi_u - v\varphi_v)\theta_{v_1} - 3(u\varphi_u - v\varphi_v)\theta = 0; \quad (8')$$

sulla quale si riconosce, senza ulteriori sviluppi, che gli invarianti sono nulli, e che i due trasformati di LAPLACE del punto  $x$  sono rispett.:

$$3x - ux_u - vx_v, \quad (u\varphi_u - v\varphi_v)x + u(v\varphi_v - \varphi)x_u - v(u\varphi_u - \varphi)x_v;$$

il primo dei quali sta su  $\alpha$ ; mentre l'altro ha per coordinate le espressioni:

$$[0, u^3(\varphi + v\varphi_v), -u^2v(\varphi - v\varphi_v), uv^2(\varphi - u\varphi_u), -v^3(\varphi + u\varphi_u), 0],$$

che sono omogenee e di 7° grado in  $u, v$ .

b) Quando le tangenti in  $A$  alle  $C^4$  di  $\Sigma$  coincidono, basta sostituire  $u_0^2u_2^2$  alla prima delle (7); si ha così la  $F^6$ :

$$x [v^2, u^3, u^2v, uv^2, v^3, \varphi(uv)], \quad (V)$$

che rappresenta l'equazione:

$$u(v\varphi_v - u\varphi_u)\theta_{uu} + v(v\varphi_v - 3u\varphi_u)\theta_{uv} - 2v^2\varphi_u\theta_{vv} - 2(v\varphi_v - 3u\varphi_u)\theta_u + 8v\varphi_u\theta_v - 12\varphi_u\theta = 0, \quad (9)$$

con le caratteristiche:

$$u_1 - C u_2 = 0, \quad \varphi(u_1 u_2) - C u_0^2 u_2^2 = 0.$$

c) La retta  $r$  passa per  $A$ . Nel caso più generale la retta  $r$  contiene, oltre  $A$ , due punti base semplici  $B_1, B_2$  di  $\Sigma$ ; collocheremo in  $A, B_1, B_2$  i punti (100), (011), (111) rispett.; gli altri quattro punti base di  $\Sigma$ , che devono essere tutti infinitamente vicini ad  $A$ , li supporremo collocati, a coppie, su due rami lineari uscenti da  $A$  e tangenti rispett. ad  $u_1 = 0, u_2 = 0$ . Si ha così per  $\Sigma$  il sistema definito dalle  $C^4$ :

$$2u_0^2u_1u_2 + 2hu_0u_1^3 + 2ku_0u_2^3 - (h+k+1)u_0u_1u_2(u_1+u_2), \quad u_0u_1u_2(u_1-u_2), \\ u_1^3(u_1-u_2), \quad u_1^2u_2(u_1-u_2), \quad u_1u_2^2(u_1-u_2), \quad u_2^3(u_1-u_2);$$

ponendo  $u_0: u_2 = u$ ,  $u_1: u_2 = v$ , si ha la  $F^6$  luogo del punto:

$$x[2u^2v + 2hv^3 + 2ku - (h+k+1)uv(v+1), uv(v-1), \\ v^3(v-1), v^2(v-1), v(v-1), v-1]. \quad (\text{VI})$$

Essa rappresenta l'equazione:

$$\left[ -hv^2 - uv + \frac{1}{2}hv^3 - k + \frac{k}{2v} + \frac{v}{2}(h+k+1) \right] \theta_{uu} \\ - v(v-1) \theta_{uv} + (2v-1) \theta_u = 0, \quad (\text{IO})$$

con le caratteristiche:

$$u_1 - C u_2 = 0, 2u_0 u_1 u_2 + hu_1^2(u_1 - u_2) - ku_2^2(u_1 - u_2) - \\ - u_1 u_2^2 = C u_1 u_2(u_1 - u_2);$$

la seconda di queste equazioni rappresenta un fascio di  $C^3$  aventi in  $A$  un punto doppio, passanti per i primi due punti base di  $\Sigma$  consecutivi ad  $A$ , ed inoltre anche per il coniugato armonico di  $A$  rispetto a  $B_1$  e  $B_2$ : insieme con la retta  $B_1 B_2$  danno, di nuovo, l'immagine d'un fascio di sezioni iperpiane di  $F^6$ .

Oss. — Un calcolo analogo al precedente mostra che non più di due dei quattro punti base semplici di  $\Sigma$  consecutivi ad  $A$  posson stare su uno stesso dei due rami uscenti da  $A$ .

d) Quando  $A$  è una cuspide per le  $C^4$  di  $\Sigma$ , a cui son consecutivi quattro punti base semplici, si può far coincidere la tangente cuspidale con  $u_2 = 0$  e la retta  $B_1 B_2$  con  $u_1 = 0$ ;  $\Sigma$  è allora dato dalle  $C^4$ :

$$u_0^2 u_2^2 - u_0 u_2^3 + hu_0 u_1^3 + ku_0 u_1^2 u_2, u_0 u_1 u_2^2, u_1^4, u_1^3 u_2, u_1^2 u_2^2, u_1 u_2^3.$$

Si ha così la  $F^6$ :

$$x(u^2v^2 - uv^3 + hu + kuv, uv^2, v^3, v^2, v, 1) \quad (\text{VII})$$

(si è posto:  $u = u_0: u_1$ ;  $v = u_2: u_1$ ). Essa rappresenta l'equazione:

$$(v^3 + kv + 2h) \theta_{uu} + 2v^3 \theta_{uv} - 4v^2 \theta_u = 0, \quad (\text{II})$$

con le caratteristiche:

$$u_1 - C u_2 = 0, \quad u_2^3 - ku_1^2 u_2 - hu_1^3 = 2u_0 u_2^2 + C u_1 u_2^2.$$

Anche le equazioni (9) (10) (11) hanno gli invarianti nulli, come si può facilmente verificare.

### 5. — Riassumiamo i risultati ottenuti.

*Le sole superficie, non rigate, d'ordine  $\leq 6$ , e di uno spazio  $S_r$  con  $r \geq 5$ , che rappresentano un'equazione di LAPLACE sono: 1) Le  $F^6$  di  $S_5$ , normali in  $S_6$ , a sezioni iperpiane di genere uno, date dalle formole (I) (II) (III; 2) Le  $F^6$  di  $S_5$ , a sezioni iperpiane di genere 2, che si ottengono intersecando un cono di 2<sup>a</sup> specie  $V_3^3$  con una quadrica non passante per la retta vertice del cono.*

*Tutte queste superficie rappresentano equazioni di LAPLACE ad invarianti nulli, tranne la (I), la quale rappresenta un'equazione ad invarianti uguali che dà luogo ad una serie di LAPLACE periodica di 6<sup>o</sup> ordine composta di sei superficie deducibili dalla (I) mediante le successive potenze di un'omografia ciclica di 6<sup>o</sup> ordine.*

(Ricevuto il 7 maggio 1929)