Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 1 (1929)

Artikel: Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite.

Autor: Plancherel, M. / Rotach, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1144

Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right),$$

Par M. PLANCHEREL et W. ROTACH, Zurich.

§1. Introduction.

Nous obtenons dans ce travail des formules asymptotiques pour les polynomes d'Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

applicables aux cas où l'une des quantités $|x|$, n ou toutes les deux sont très grandes. La méthode que nous suivrons est la méthode dite du col. S'il est aisé d'obtenir, par cette méthode, d'une manière formelle, des formules asymptotiques lorsque $x^2 : 4n$ est $\ll 1$, ou $\gg 1$, la délimitation précise de leurs domaines de validité, l'estimation de l'ordre de grandeur de leur approximation, ainsi que l'étude du cas $x^2 \sim 4n$ demandent une étude plus approfondie qu'on trouvera dans les pages suivantes.

Nous n'étudierons que le cas de x réel, positif ou nul. Le cas de x négatif s'y ramène, car $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$. Nous laisserons de côté le cas de x complexe; les démonstrations devraient, dans ce cas, être modifiées sur certains points et le départage des cas où un seul des cols ou tous les deux sont à considérer demanderait une étude particulière.

Partant du développement de Taylor de la fonction entière de z

$$e^{-\frac{1}{2}(z+x)^2} = e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} H_n(x)\, z^n,$$

nous exprimerons les coefficients de la série à l'aide de la formule intégrale de Cauchy,

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} H_{n-1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{-\frac{z^2}{2} - zx}}{z^n}\, dx\,. \tag{2}$$

Le chemin d'intégration est un lacet simple, entourant $z=0$ dans le sens positif.

La formule (2) est notre point de départ pour l'application de la méthode du col. Construisons la surface $w=|F(z)|$, où $F(z)$ est une abréviation pour

$$F(z)=\frac{e^{-\frac{z^2}{2}-zx}}{z^n}, \tag{3}$$

et prenons le plan $w=0$ horizontal. La position des cols de cette surface est donnée par celle des zéros de $F'(z)$, c'est-à-dire par les points $z_0=-\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{x^2}{4}-n}$, solutions de l'équation

$$z+x+\frac{n}{z}=0. \tag{4}$$

La surface a deux cols simples z_0', z_0'' si $x^2\neq 4n$; elle a un col double si $x^2=4n$. La méthode du col utilise le fait que le lacet de l'intégrale (2), mené dans le plan $w=0$, peut être déformé sans que l'intégrale change de valeur ; elle le fait passer, suivant le cas, par un des points z_0 ou par tous les deux, tangentiellement à la projection dans le plan $w=0$ de la ligne de plus grande pente de la surface passant par le col. Elle montre ensuite que la contribution des parties du lacet qui ne sont pas voisines des cols est asymptotiquement négligeable relativement à celle des parties voisines des cols.

§ 2. Les formules asymptotiques.

Définissons les polynomes

$$\varphi_\nu(\xi)=\sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\nu\mu}\,\xi^\mu,\quad \psi_{\nu p}(\xi)=\sum_{\mu=0}^{\nu} b_{\nu\mu}^{(p)}\,\xi^\mu, \tag{5_1, 5_2}$$

par les développements, $(|\tau|<1)$,

$$\exp\left[\xi\sum_{\mu=3}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{\mu}\tau^{\mu-2}\right]=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(\xi)\,\tau^\nu, \tag{6_1}$$

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma}\tau^{\sigma-1}\right)^p\exp\left[\xi\sum_{\mu=4}^{\infty}\frac{1}{\mu}\tau^{\mu-3}\right]=\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_{\nu p}(\xi)\,\tau^\nu \tag{6_2}$$

Par conséquent,

$$\varphi_0(\xi) = 1, \varphi_1(\xi) = -\frac{1}{3}\xi, \varphi_2(\xi) = \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{18}\xi^2, \varphi_3(\xi) = -\frac{1}{5}\xi - \frac{1}{12}\xi^2 - \frac{1}{162}\xi^3, \ldots$$

$$\psi_{0p}(\xi) = 1, \quad \psi_{1p}(\xi) = \frac{p}{2} + \frac{\xi}{4}, \ldots$$

Les cas suivants sont à distinguer:

I. $x^2 < 4n$. On introduit l'angle auxiliaire ψ $\left(0 < \psi \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ défini par

$$\cos\psi = \frac{x}{2\sqrt{n}}$$

et l'on a

$$\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{e^{n\left(\frac{1}{2}+\cos^2\psi\right)}}{\pi n^{\frac{n}{2}}\sqrt{\sin\psi}} \left[\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\nu\mu}\frac{1+(-1)^\nu}{2}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{\nu+1}{2}\right)}{n^{\frac{\nu}{2}}(\sin\psi)^{\mu+\frac{\nu}{2}}}\right. \tag{7}$$

$$\sin\left\{n\left(\psi - \frac{1}{2}\sin 2\psi\right) + \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} - (2\mu+\nu)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)\right\}$$

$$\left. + O\left([n\sin^3\psi]^{-\frac{k}{2}}\right)\right].$$

Lorsque x est borné et n très grand, $\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2\sqrt{n}} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$ et pour $k = 1$, (7) conduit à

$$\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{e^{\frac{n}{2}+\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{1-\frac{x^2}{4n}}}\frac{1}{n^{\frac{n}{2}}}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2} - x\sqrt{n}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right], \tag{8}$$

formule déjà donnée par l'un de nous [1]).

---

[1]) W. Rotach, Reihenentwicklungen einer willkürlichen Funktion nach Hermiteschen und Laguerreschen Polynomen. Inauguraldissertation, E. T. H. Zürich. 1925.

II. $x^2 > 4n$. On introduira l'angle auxiliaire $\psi\,(0 < \psi < \infty)$ par

$$ch\,\psi = \frac{x}{2\sqrt{n}}$$

et l'on a

$$\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{e^{n\left[\frac{1}{2} + ch\,\psi\,(ch\,\psi - sh\,\psi)\right]}}{2\pi n^{\frac{n}{2}}\sqrt{sh\,\psi}\left(ch\,\psi - sh\,\psi\right)^{n-\frac{1}{2}}}\left[\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\nu\mu}\,\frac{1+(-1)^{\nu}}{2}\right.$$

$$\left.\frac{(-1)^{\mu+\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\mu+\frac{\nu+1}{2}\right)}{n^{\frac{\nu}{2}}\left[sh\,\psi\,(ch\,\psi - sh\,\psi)\right]^{\mu+\frac{\nu}{2}}} + O\left(n^{-\frac{k}{2}}\left[sh\,\psi\,(ch\,\psi - sh\,\psi)\right]^{-\frac{3k}{2}}\right)\right]. \tag{9}$$

Si x est très grand et si n est borné, la formule (9) n'est d'aucune utilité. Mais, dans ce cas, H_{n-1} étant un polynome (pair ou impair) de degré $n-1$, on a évidemment,

$$H_{n-1}(x) = x^{n-1}\left[1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]. \tag{10}$$

III. $x^2 \sim 4n$. Introduisons la grandeur auxiliaire

$$t = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(n - \frac{x^2}{4}\right). \tag{11}$$

On aura, h, h^* étant certaines constantes positives, pour $|t| < h\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$,

$$\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{e^{\frac{3x^2}{8}}}{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{n-\frac{1}{3}}}\left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{A_p(x)}{p!}\,t^p + O\left(x^{-\frac{1}{3}}e^{-h^* x^2}\right)\right] \tag{12_1}$$

$$A_p(x) = 3^{\frac{p-2}{3}}\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{(-1)^{\mu}\,3^{\mu+\frac{\nu}{3}}}{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{\nu}{3}}}\,\Gamma\left(\frac{p+\nu+1}{3}+\mu\right) \tag{12_2}$$

$$b_{\nu\mu}^{(p)}\sin\frac{p+\nu+1}{3}\pi + O\left(x^{-\frac{2k}{3}}\right).$$

La série figurant dans (12_1) est une fonction entière de t. Lorsque $x \to \infty$, elle converge uniformément dans tout domaine fini $|t| \leqq T$, vers

$$\sum_{p=0}^{\infty} 3^{\frac{p-2}{3}} \Gamma\left(\frac{p+1}{3}\right) \sin \frac{p+1}{3} \pi \frac{t^p}{p!}$$

qui est une fonction entière de t. Il en résulte que si l'on néglige dans (12_1) les termes d'indice $p \geqq k'$, l'erreur ainsi commise est de l'ordre de grandeur de $M_T \left(\frac{t}{T}\right)^{k'}$, M_T étant une quantité ne dépendant que de T.

La formule (7), qui s'applique au cas $x^2 < 4n$, n'est utile que si

$$n \sin^3 \psi = n\left(1 - \frac{x^2}{4n}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{2\sqrt{n}} t^{\frac{3}{2}}$$

est grand, ce qui exige que n soit grand. Elle est toujours applicable si $\frac{x^2}{4n} \ll 1$. Si n est grand sans que $n \sin^3 \psi$ soit grand, $\frac{x}{2\sqrt{n}}$ est voisin de 1 et t n'est pas grand. Dans ce cas, il y a lieu d'utiliser la formule (12).

La formule (9), qui s'applique au cas $x^2 > 4n$, n'est avantageuse que si l'expression

$$n\, sh^3 \psi\, (ch\, \psi - sh\, \psi)^3 = \left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)^4 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4n}{x^2}}\right)^3 |t|^{\frac{3}{2}}$$

est grande, ce qui exige que x soit grand. Si x est grand, sans que cette expression soit grande, ou bien n n'est pas grand ou bien $\frac{x}{2\sqrt{n}}$ est voisin de 1 et alors t n'est pas grand. Dans le premier cas, c'est la formule (10) qui est à utiliser; dans le second cas, c'est la formule (12).

Les formules données épuisent tous les cas. On vérifie d'ailleurs qu'elles se raccordent en ce qui concerne l'ordre de grandeur qu'elles donnent pour $H_{n-1}(x)$.

Donnons encore les valeurs de la fonction Γ qui figurent dans les formules asymptotiques:

$$\Gamma\left(\mu+\frac{\nu+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2\mu+\nu-1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \nu \text{ pair}$$

$$\Gamma\left(\frac{p+\nu+1}{3}+\mu\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}\cdots\frac{3\mu+p+\nu-2}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \text{si } p+\nu+1\equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Gamma\left(\frac{p+\nu+1}{3}+\mu\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdots\frac{3\mu+p+\nu-2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right), \text{ si } p+\nu+1\equiv 2 \pmod{3}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)=2{,}67905\ldots, \quad \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}=1{,}35412\ldots$$

Chapitre I. Le cas $x^2 \neq 4n$.

§ 3. Fixation du chemin d'intégration.

Nous supposons donc x réel, non négatif, et $x^2 \neq 4n$. Les deux quantités z_0', z_0'' sont différentes. Elles sont réelles, négatives, si $x^2 > 4n$; z_0' désignera, dans ce cas, celle qui a la plus petite valeur absolue. Elles sont complexes, conjuguées, si $x^2 < 4n$; z_0' désignera alors celle dont le coefficient de la partie imaginaire est positif.

Dans le cas $x^2 > 4n$, le lacet d'intégration de (2) passera par le seul col z_0' et sera composé:

a) d'un segment rectiligne L' ayant pour milieu z_0' et tangent en ce point à la projection horizontale de la ligne de plus grande pente de $w = |F(z)|$. Par raison de symétrie ce segment est perpendiculaire à l'axe réel. Sa longueur sera fixée ultérieurement. Appelons z_1', z_2' les extrémités de L'.

b) de l'arc de cercle K_1, de centre $z=0$, joignant z_1' et z_2' et coupant l'axe réel positif.

Dans le cas $x^2 < 4n$, nous prendrons comme lacet d'intégration un chemin passant par les deux points z_0', z_0'' et composé:

a) d'un segment rectiligne L' ayant z_0' comme milieu, tangent en z_0' à la projection horizontale de la ligne de plus grande pente de $w = |F(z)|$. La position exacte des extrémités z_1', z_2' de L' sera fixée plus loin. Pour fixer les idées, nous admettrons $\Re z_1' \leqq \Re z_2'$.

b) du segment L'', d'extrémités z''_1, z''_2, symétrique de L' par rapport à l'axe réel.

c) des arcs de cercles K_1 et K_2, de centre $z=0$, reliant respectivement z'_1 et z''_1, z'_2 et z''_2, le premier coupant l'axe réel négatif, le second l'axe réel positif.

§ 4. La contribution du voisinage d'un col.

Soit z_0 la position d'un col. La substitution $z=z_0+\zeta$ montre que

$$\frac{F(z)}{F(z_0)}=\exp\left[-\frac{\zeta^2}{2}-\zeta(x+z_0)-n\log\left(1+\frac{\zeta}{z_0}\right)\right],$$

la branche du log. étant celle qui, pour $\zeta=0$, se réduit à $\log 1=0$. Pour $|\zeta|<|z_0|$, nous aurons donc le développement

$$\frac{F(z)}{F(z_0)}=\exp\left[-a\,\zeta^2+\frac{n\,\zeta^2}{z_0^{\,2}}\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\left(\frac{\zeta}{z_0}\right)^{\nu-2}\right], \tag{14}$$

où

$$a=\frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{z_0^{\,2}}\right)=1+\frac{x}{2\,z_0}. \tag{15}$$

La tangente à la projection de la ligne de plus grande pente de $|F(z)|$ au col z_0 est caractérisée par le fait que, sur elle, $a\zeta^2$ est positif. Introduisons $u=\zeta\sqrt{a}$, en convenant de prendre comme détermination de $\sqrt{a}$ celle pour laquelle du est >0 lorsque $d\zeta$ a la direction positive de circulation du lacet au col.

Nous prendrons un segment L de centre z_0, situé sur la tangente indiquée ci-dessus. Soit $\theta|z_0|$ sa demi-longueur. Imposons à θ la condition $0<\theta<1$ et notons

$$N=\theta\,|z_0\sqrt{a}|. \tag{16}$$

Les extrémités de L seront

$$z_1=z_0-\frac{N}{\sqrt{a}},\quad z_2=z_0+\frac{N}{\sqrt{a}}. \tag{17}$$

Nous aurons pour l'intégrale de $F(z)$ prise sur L de z_1 à z_2

$$\int_L F(z)\,dz = \frac{F(z_0)}{\sqrt{a}} \int_{-N}^{N} \exp\left[-u^2 + \frac{n u^2}{a z_0^2} \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \left(\frac{u}{z_0\sqrt{a}}\right)^{\nu-2}\right] du.$$

Suivant ici une idée de O. Perron [2]) développons l'expression

$$\exp\left(\xi \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} \tau^{\nu-2}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(\xi)\,\tau^\nu, \quad |\tau| < 1. \qquad (6_1)$$

Les $\varphi_\nu(\xi)$ sont des polynomes en ξ

$$\varphi_\nu(\xi) = \sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\nu\mu}\,\xi^\mu,$$

de degré maximum ν. Les valeurs de ces polynomes pour $\nu = 0, 1, 2, 3$ ont été données au § 2.

k étant un entier positif arbitraire, nous aurons donc

$$\int_L F(z)\,dz = \frac{F(z_0)}{\sqrt{a}} \left[\sum_{\nu=0}^{k-1} \int_{-N}^{N} e^{-u^2} \varphi_\nu\left(\frac{n u^2}{a z_0^2}\right) \left(\frac{u}{z_0\sqrt{a}}\right)^\nu du + R_k'\right],$$

en désignant par R_k'

$$R_k' = \int_{-N}^{N} e^{-u^2} \sum_{\nu=k}^{\infty} \varphi_\nu\left(\frac{n u^2}{a z_0^2}\right) \left(\frac{u}{z_0\sqrt{a}}\right)^\nu du. \qquad (18)$$

Si, dans la somme finie, nous étendons l'intégration de $-\infty$ à $+\infty$, nous commettons une erreur

$$R_k'' = -\sum_{\nu=0}^{k-1} \left(\int_{-\infty}^{-N} + \int_{N}^{\infty}\right) e^{-u^2} \varphi_\nu\left(\frac{n u^2}{a z_0^2}\right) \left(\frac{u}{z_0\sqrt{a}}\right)^\nu du, \qquad (19)$$

et obtenons, en remplaçant encore φ_ν par son développement (5), ce qui conduit à calculer des intégrales du type

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} u^{2\mu+\nu}\,du$$

---

[2]) O. Perron. Ueber die näherungsweise Berechnung von Funktionen grosser Zahlen. [Münchener Sitzungsberichte, math.-phys. Klasse (1917). S. 191-219.]

qui ont pour valeur $\frac{1+(-1)^\nu}{2}\,\Gamma\left(\mu+\frac{\nu+1}{2}\right)$, la formule finale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L F(z)\,dz = \frac{F(z_0)}{2\pi i\sqrt{a}}\left[\sum_{\nu=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\nu\mu}\frac{1+(-1)^\nu}{2}\right. \tag{20}$$

$$\left.\Gamma\left(\mu+\frac{\nu+1}{2}\right)\frac{n^\mu}{(z_0\sqrt{a})^{2\mu+\nu}}+R'_k+R''_k\right]$$

pour la contribution du segment rectiligne L passant par le col z_0.

§ 5. Estimation de R'_k.

La formule obtenue n'a évidemment d'intérêt que si l'on peut estimer R'_k et R''_k et montrer que ces quantités sont asymptotiquement négligeables par rapport aux autres termes de la formule (20). Ces estimations reposent sur celle de la série $\sum \varphi_\nu(\xi)\,\tau^\nu$, qu'à la suite de Perron [3]) nous pourrons obtenir de la manière suivante.

La fonction (6_1), considérée comme série de puissance de ξ, τ a comme dominante la série de puissances de $\exp\left(\xi\sum_1^\infty\frac{\tau^\nu}{\nu}\right)$ donc, a fortiori, celle de

$$\exp\left[(1+\xi)\sum_1^\infty\frac{\tau^\nu}{\nu}\right]=\frac{1}{(1-\tau)^{1+\xi}}$$

$$=1+\left(1+\frac{\xi}{1}\right)\tau+\left(1+\frac{\xi}{1}\right)\left(1+\frac{\xi}{2}\right)\tau^2+\dots.$$

De là résulte l'inégalité

$$|\varphi_\nu(\xi)|\leqq\left(1+\frac{|\xi|}{1}\right)\left(1+\frac{|\xi|}{2}\right)\dots\left(1+\frac{|\xi|}{\nu}\right)$$

et, pour $|\tau|<1$,

---

[3]) Loc. cit.

$$\left|\sum_{\nu=k}^{\infty} \varphi_\nu(\xi)\tau^\nu\right| \leqq \left(1+\frac{|\xi|}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{|\xi|}{k}\right)|\tau|^k\left[1+\left(1+\frac{|\xi|}{k+1}\right)|\tau|+\cdots\right]$$

$$\leqq\left(1+|\xi|\right)^k|\tau|^k\left[1+\left(1+\frac{|\xi|}{1}\right)|\tau|+\left(1+\frac{|\xi|}{1}\right)\left(1+\frac{|\xi|}{2}\right)|\tau|^2+\cdots\right]$$

$$\leqq(1+|\xi|)^k|\tau|^k(1-|\tau|)^{-1-|\xi|}.$$

Par conséquent,

$$|R'_k| \leqq \int_{-N}^{N} e^{-u^2}\left(1-\left|\frac{u}{z_0\sqrt{a}}\right|\right)^{-1-\left|\frac{n u^2}{a z_0^2}\right|}\left(1+\left|\frac{n u^2}{a z_0^2}\right|\right)^k\left|\frac{u}{z_0\sqrt{a}}\right|^k du.$$

En vertu de (16), on a

$$1-\left|\frac{u}{z_0\sqrt{a}}\right| \geqq 1-\theta$$

dans l'intervalle d'intégration. Donc,

$$|R'_k| \leqq (1-\theta)^{-1}\int_{N}^{N}\left[e(1-\theta)^{\frac{n}{|a z_0^2|}}\right]^{-u^2}\left(1+\left|\frac{n u^2}{a z_0^2}\right|\right)^k\left|\frac{u}{z_0\sqrt{a}}\right|^k du.$$

Soit δ une quantité fixe, comprise entre 0 et 1. Imposons à θ qui, jusqu'ici, est astreint à la seule condition $0<\theta<1$ la condition plus restrictive

$$e(1-\theta)^{\frac{n}{|a z_0^2|}} \geqq e^{1-\delta},$$

c'est-à-dire

$$0<\theta\leqq 1-e^{-\delta\frac{|a z_0^2|}{n}}.$$

Si $\frac{\delta|a z_0^2|}{n} \geqq 1$, nous prendrons $\theta=1-e^{-1}$. Si $\frac{\delta|a z_0^2|}{n}\leqq 1$, en tenant compte de l'inégalité $1-e^{-\lambda}\geqq(1-e^{-1})\lambda$, $0\leqq\lambda\leqq 1$, nous prendrons

$$\theta=(1-e^{-1})\frac{\delta|a z_0^2|}{n}. \tag{21}$$

Dans les deux cas $\theta \leqq 1 - e^{-1}$, d'où $(1-\theta)^{-1} \leqq e$. Dans le premier cas $N = (1 - e^{-1}) \left| z_0 \sqrt{a} \right|$ et dans le second

$$N = \delta (1 - e^{-1}) \left| z_0 \sqrt{a}\, n^{-\frac{1}{3}} \right|^3. \tag{22}$$

En remarquant encore que $(1 + |y|)^k \leqq 2^{k-1} (1 + |y|^k)$, nous voyons que

$$\left| R'_k \right| \leqq 2^k e \int_0^\infty e^{-(1-\delta)\, u^2} \left[1 + \frac{n^k\, u^{2k}}{\left| a z_0^2 \right|^k} \right] \frac{u^k}{\left| z_0 \sqrt{a} \right|^k}\, du$$

$$= 2^{k-1} e \left[\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{(1-\delta)^{\frac{k+1}{2}}} \frac{1}{\left| z_0 \sqrt{a} \right|^k} + \frac{\Gamma\left(\frac{3k+1}{2}\right)}{(1-\delta)^{\frac{3k+1}{2}}} \frac{n^k}{\left| z_0 \sqrt{a} \right|^{3k}} \right].$$

Nous obtenons donc, pour

$$\left| z_0 \sqrt{a}\, n^{-\frac{1}{3}} \right| \to \infty, \tag{23}$$

$$R'_k = O\left(\left| z_0 \sqrt{a}\, n^{-\frac{1}{3}} \right|^{-3k} \right) \tag{24}$$

Remarquons encore que $N \to \infty$ en même temps que $\left| z_0 \sqrt{a}\, n^{-\frac{1}{3}} \right|$.

Lorsque x est réel, on a

$$\frac{\left| a z_0^2 \right|}{n} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4n}}, \quad \text{si } x^2 < 4n,$$

$$\frac{\left| a z_0^2 \right|}{n} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4n}{x^2}}} \right)^1, \quad \text{si } x^2 > 4n,$$

et par suite

$$\frac{\left| a z_0^2 \right|}{n} \leqq 1.$$

Le cas où $\frac{\delta \left| a z_0^2 \right|}{n} \geqq 1$ ne se présente donc pas lorsque x est réel et θ, N ont dans ce cas les valeurs (21) et (22).

§ 6. Estimation de R''_k.

R''_k est la somme d'au plus k^2 termes du type

$$a_{\nu\mu}\frac{n^u}{|z_0\sqrt{a}|^{2\mu+\nu}}\left(\int_{-\infty}^{-N}+\int_N^{\infty}\right)e^{-u^2}u^{2\mu+\nu}\,du.$$

Or, $e^{-u^2}u^{2\mu+\nu+2}$ est une fonction décroissante de $|u|$ po u $u^2>\mu+1+\frac{\nu}{2}$, à fortiori donc, pour $u^2\geqq\frac{3k}{2}$. Si donc $N\geqq\sqrt{\frac{3k}{2}}$, ce qui sera le cas si $\left|z_0\sqrt{a}\,n^{-\frac{1}{3}}\right|$ est assez grand,

$$\int_N^{\infty}e^{-u^2}u^{2\mu+\nu}\,du=\int_N^{\infty}e^{-u^2}u^{2\mu+\nu+2}\frac{du}{u^2}<e^{-N^2}N^{2\mu+\nu+1}.$$

La même inégalité a lieu pour $\int_{-\infty}^{-N}$. Ceci entraine l'existence d'une quantité K, dépendante de k, telle que

$$\left|R''_k\right|<K e^{-N^2}N^{3k-2}.$$

Les expressions données pour N au § 5 montrent que, sous l'hypothèse (23), on a, a fortiori,

$$R''_k=O\left(\left|z_0\sqrt{a}\,n^{-\frac{1}{3}}\right|^{-3k}\right). \tag{25}$$

Remarquons en passant que l'analyse faite jusqu'ici ne suppose pas que x soit réel.

§ 7. La contribution des arcs de cercles.

Soit K l'un de ces arcs, $z_1=z_0\mp\frac{N}{\sqrt{a}}$ son extrémité commune avec le segment L passant par z_0. Nous écrirons

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K F(z)\,dz = \frac{F(z_0)}{2\pi i\sqrt{a}}\cdot\frac{F(z_1)}{F(z_0)}\cdot\sqrt{a}\int_K \frac{F(z)}{F(z_1)}\,dz.$$

Or,

$$\left|\frac{F(z_1)}{F(z_0)}\right| = \left|\exp\left[-N^2 \pm \frac{nN^3}{(z_0\sqrt{a})^3}\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\left(\frac{\pm N}{z_0\sqrt{a}}\right)^{\nu-3}\right]\right|$$

$$\leqq \exp\left[-N^2\left(1 - \frac{n\theta}{|z_0\sqrt{a}|^2}\sum_3^{\infty}\frac{\theta^{\nu-3}}{\nu}\right)\right].$$

D'après (21)

$$\frac{n\theta}{|z_0\sqrt{a}|^2}\sum_3^{\infty}\frac{\theta^{\nu-3}}{\nu} \leqq \delta(1-e^{-1})\sum_3^{\infty}\frac{(1-e^{-1})^{\nu-3}}{\nu}.$$

(on obtiendrait la même inégalité si $\frac{\delta\,|a z_0^2|}{n}$ était $\geqq 1$). On pourra donc imposer au nombre δ qui, jusqu'ici, doit satisfaire à la seule condition $0 < \delta < 1$, la condition plus restrictive: h_1 étant une quantité telle que $0 < h_1 < 1$, on prendra δ assez petit pour que

$$1-(1-e^{-1})\,\delta\sum_3^{\infty}\frac{(1-e^{-1})^{\nu-3}}{\nu} \geqq h_1. \tag{26}$$

Dans ces conditions

$$\left|\frac{F(z_1)}{F(z_0)}\right| < e^{-h_1 N^2}. \tag{27}$$

Le cercle de centre $z = 0$, passant par z_1 a pour équation $z = |z_1|\,e^{i\Phi}$. Si

$$z_1 = -\alpha + i\beta, \tag{28}$$

un calcul élémentaire donne

$$\left|\int_K \frac{F(z)}{F(z_1)}\,dz\right| \leqq |z_1|\int_K \exp\left[-(\alpha^2+\beta^2)\cos^2\Phi - x\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\Phi - \alpha(x-\alpha)\right]d\Phi.$$

La symétrie de l'arc K par rapport à l'axe réel permet de se restreindre à l'intervalle d'intégration suivant:

a) $$\frac{\pi}{2} < \arc\cos\frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \leqq \Phi \leqq \pi,$$

si $\alpha > \frac{x}{2}$, auquel cas K coupe l'axe réel négatif;

b) $$0 \leqq \Phi \leqq \arc\cos\frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} < \pi,$$

si $\alpha \leqq \frac{x}{2}$, auquel cas K coupe l'axe réel positif.

Les zéros Φ_1, Φ_2 du trinome du second degré en $\cos\Phi$ sont donnés par

$$\cos\Phi_1 = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \cos\Phi_2 = \frac{-x+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

et $\cos\Phi_1 - \cos\Phi_2$ est < 0 dans le cas a), > 0 dans le cas b). Par suite, dans les deux cas,

$$(\alpha^2+\beta^2)\cos^2\Phi + x\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\Phi + \alpha(x-\alpha) \geqq 0$$

dans l'intervalle d'intégration; d'où, dans le cas a), puisque

$$\pi - \arc\cos\frac{-\alpha}{|z_1|} = \arc\sin\left|\frac{\beta}{z_1}\right| \leqq \frac{\pi}{2}\left|\frac{\beta}{z_1}\right|,$$

$$\left|\int_K \frac{F(z)}{F(z_1)}\,dz\right| \leqq \pi\,|\beta|; \tag{29}$$

et dans le cas b)

$$\left|\int_K \frac{F(z)}{F(z_1)}\,dz\right| \leqq 2\pi\,|z_1|. \tag{30}$$

L'estimation (30) est insuffisante, lorsque $|z_1|$ est grand. Pour obtenir dans ce cas une estimation meilleure, nous ferons la substitution $v = \alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\Phi$, d'où,

$$\left|\int_K \frac{F(z)}{F(z_1)}\,dz\right| \leqq 2\int_0^{|z_1|+\alpha} \exp\left[-v^2 - v(x-2\alpha)\right]\frac{dv}{\sqrt{1-\frac{(v-\alpha)^2}{|z_1|^2}}}.$$

Comme ici $x - 2\alpha \geqq 0$, on a encore

$$\left|\int_K \frac{F(z)}{F(z_1)}\,dz\right| \leqq 2\int_0^{|z_1|+\alpha} \frac{e^{-v^2}\,dv}{\sqrt{1-\frac{(v-\alpha)^2}{|z_1|^2}}}.$$

Décomposons l'intervalle d'intégration du second membre en deux intervalles par $\frac{1}{2}(|z_1|+\alpha)$. Nous aurons

$$\left|\int_K \frac{F(z)}{F(z_1)}\,dz\right| < \frac{2}{\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{|z_1|}\right)\left(1-\frac{1}{4}\left[1+\frac{\alpha}{|z_1|}\right]\right)}} \int_0^{\frac{1}{2}(|z_1|+\alpha)} \exp(-v^2)\,dv$$

$$+ 2e^{-\frac{1}{4}(|z_1|+\alpha)^2} \int_{\frac{1}{2}(|z_1|+\alpha)}^{|z_1|+\alpha} \frac{dv}{\sqrt{1-\left|\frac{v-\alpha}{z_1}\right|^2}}.$$

Si $\alpha \geqq 0$, la quantité

$$\left(1+\frac{\alpha}{|z_1|}\right)\left(1-\frac{1}{4}\left[1+\frac{\alpha}{|z_1|}\right]\right)$$

est supérieure à $\frac{1}{2}$. Si $\alpha < 0$, auquel cas $x^2 < 4n$, on a

$$\alpha = \frac{x}{2} - \Re\frac{N}{\sqrt{a}} \geqq -\frac{N}{|\sqrt{a}|},$$

d'où

$$|\alpha| \leqq \frac{N}{|\sqrt{a}|} < \delta(1-e^{-1})\sqrt{n}.$$

Mais, d'autre part,

$$|z_1| > |z_0| - \frac{N}{|\sqrt{a}|} = \sqrt{n} - \frac{N}{|\sqrt{a}|},$$

d'où

$$|z_1| > \sqrt{n}\left(1-\delta(1-e^{-1})\right)$$

et

$$\frac{\alpha}{|z_1|} < \frac{\delta(1-e^{-1})}{1-\delta(1-e^{-1})}.$$

c désignant une constante positive inférieure à 1, imposons à δ la condition

$$\frac{\delta(1-e^{-1})}{1-\delta(1-e^{-1})} \leqq c.$$

La quantité (31) est alors au moins égale à $(1-c)\left[1-\frac{1}{4}(1+c)\right]$. Nous choisissons c de manière qu'elle soit encore, dans le cas $\alpha < 0$, au moins égale à $\frac{1}{2}$.

On a ensuite

$$\int_0^{\frac{1}{2}(|z_1|+\alpha)} \exp(-v^2)\,dv < \int_0^{\infty} e^{-v^2}\,dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

puis

$$\int_{\frac{1}{2}(|z_1|+\alpha)}^{|z_1|+\alpha} \frac{dv}{\sqrt{1-\left|\frac{v-\alpha}{z_1}\right|^2}} = |z_1| \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{|z_1|}\right)}^{1} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \leqq \frac{|z_1|}{\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2|z_1|}}} \times$$

$$\int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{|z_1|}\right)}^{1} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}} = \frac{2|z_1|\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2|z_1|}}}{\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2|z_1|}}} < \sqrt{2}\sqrt{|z_1|(|z_1|+\alpha)}.$$

Par conséquent,

$$\left|\int_K \frac{F(z)}{F(z_1)}\,dz\right| \leqq \sqrt{2\pi} + 2\sqrt{2}\sqrt{|z_1|(|z_1|+\alpha)}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{4}|z_1|(|z_1|+\alpha)\left(1+\frac{\alpha}{|z_1|}\right)\right]$$

$$\leqq \sqrt{2\pi} + 2\sqrt{2}\sqrt{|z_1|(|z_1|+\alpha)}\exp\left[-\frac{1}{4}|z_1|(|z_1|+\alpha)(1-c)\right].$$

Il existe donc une constante C telle que

$$\left|\int_K \frac{F(z)}{F(z_1)}\,dz\right| < C, \qquad (32)$$

dans le cas b).

Le cas a) ne se présente que si $x^2 < 4n$. Dans ce cas, $|z_0| = \sqrt{n}$ et $|a| = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4n}}$. Par suite, d'après (29), (28) et (17),

$$\left| \int_K \frac{F(z)}{F(z_1)} dz \right| \leqq \pi |\beta| \leqq \pi \left[|\mathfrak{I} z_0| + \frac{N}{|\sqrt{a}|} \right] = \pi \left[|z_0 a| + \frac{N}{|\sqrt{a}|} \right]$$

d'où, puisque ici $N = \delta(1 - e^{-1}) |z_0 a^{\frac{3}{2}}|$,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_K F(z)\, dz \right| < \left| \frac{F(z_0)}{2\pi \sqrt{a}} \right| \pi \left[|z_0 a^{\frac{3}{2}}| + N \right] e^{-h_1 N^2}$$

$$\leqq d_1 \left| \frac{F(z_0)}{2\pi \sqrt{a}} \right| N e^{-h_1 N^2},$$

d_1 désignant une constante positive convenable.

Dans le cas b) on peut avoir aussi bien $x^2 < 4n$ que $x^2 > 4n$. Si $x^2 < 4n$, nous utiliserons (32) et, en remarquant que dans ce cas

$$|a| = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4n}} \leqq 1,$$

nous obtiendrons

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_K F(z)\, dz \right| \leqq C \left| \frac{F(z_0)}{2\pi \sqrt{a}} \right| e^{-h_1 N_2}.$$

Si $x^2 > 4n$, le seul col à considérer est $z'_0 = -\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1 - \frac{4n}{x^2}} < 0$. Ici, par conséquent,

$$\frac{x^2}{4n} - 1 < |a| = \frac{x^2}{4n} - 1 + \sqrt{1 - \frac{4n}{x^2}} < \frac{x^2}{4n}.$$

Par suite, lorsque $x^2 \leqq 8n$, on a $|a| \leqq 2$ et lorsque $x^2 \geqq 8n$, $|a| > \frac{x^2}{8n}$. Dans le premier cas, nous nous servirons de (32) et conclurons que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_K F(z)\, dz \right| \leqq C\sqrt{2} \left| \frac{F(z_0)}{2\pi \sqrt{a}} \right| e^{-h_1 N^2}.$$

Dans le second cas, nous nous servirons de (30) et obtiendrons

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_K F(z)\,dz\right| \leqq \left|\frac{F(z_0)}{2\pi\sqrt{a}}\right| \left|z_1\sqrt{a}\right| e^{-h_1 N^2}.$$

$$\leqq \left|\frac{F(z_0)}{2\pi\sqrt{a}}\right| \left[\left|z_0\sqrt{a}\right| + N\right] e^{-h_1 N^2}.$$

Or, dans ce cas, nous pouvons écrire

$$\left|z_0\sqrt{a}\right| + N = N\left[1 + \frac{n}{\delta(1-e^{-1})\left|a z_0^2\right|}\right] \leqq N\left[1 + \frac{8}{\delta(1-e^{-1})}\right].$$

Il existe donc, ici aussi, une constante d_2 telle que

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_K F(z)\,dz\right| \leqq d_2 \left|\frac{F(z_0)}{2\pi\sqrt{a}}\right| N e^{-h_1 N^2}.$$

Ainsi se trouve établi, dans tous les cas, que

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_K F(z)\,dz\right| \leqq d \left|\frac{F(z_0)}{2\pi\sqrt{a}}\right| N e^{-h_1 N^2}, \tag{33}$$

d étant une constante positive convenable.

§ 8. Récapitulation des résultats obtenus.

Les résultats obtenus montrent bien qu'asymptotiquement, lorsque $\left|z_0\sqrt{a}\,n^{-\frac{1}{8}}\right| \to \infty$, la contribution du voisinage L du ou des cols, donnée dans la formule (20) est seule importante.

Dans le cas $x^2 < 4n$, le chemin d'intégration de (2) passe par les deux cols conjugués z_0' et z_0''. Les directions positives du chemin aux cols sont donc symétriques et opposées. La valeur $\sqrt{a}''$ à prendre pour $\sqrt{a}$ au col z_0'' est donc égale à $-\overline{\sqrt{a'}}$. Il y a avantage à introduire un angle auxiliaire ψ par

$$\cos\psi = \frac{x}{2\sqrt{n}},\ 0 < \psi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Alors $z_0' = \sqrt{n}\, e^{i(\pi - \psi)}$ et $\sqrt{a'} = \pm \sqrt{\sin \psi}\, e^{i\left(\frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$. Pour décider du signe à prendre pour $\sqrt{a'}$, il faut voir que sur le segment L' passant par le col l'élément dz ou $d\zeta$ d'intégration doit avoir un argument compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ et que $du = \sqrt{a'}\, d\zeta$ doit alors être positif. Il faut, par suite, prendre

$$\sqrt{a'} = -\sqrt{\sin \psi}\, e^{i\left(\frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{\sin \psi}\, e^{i\left(\frac{\psi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)}.$$

Ecrivant alors les contributions des deux cols, nous obtiendrons, d'après (20), (24), (25) et (33), la formule (7) du § 2.

Dans le cas $x^2 > 4n$, le chemin d'intégration de (2) passe par le col z_0', le plus rapproché de l'origine. Nous introduisons ici

$$\operatorname{ch} \psi = \frac{x}{2\sqrt{n}}, \quad 0 < \psi < \infty.$$

Alors $z_0' = -\sqrt{n}\,(ch\, \psi - sh\, \psi)$ et $\sqrt{a'} = i\sqrt{\dfrac{sh\, \psi}{ch\, \psi - sh\, \psi}}$ et il résulte des mêmes formules que ci-dessus la formule (9).

Chapitre II. Le cas $x^2 \sim 4n$.

§ 9. Fixation du chemin d'intégration.

Lorsque $x^2 \sim 4n$, les deux cols sont très rapprochés ou coïncident et les considérations du chapitre I peuvent être en défaut si $n\left(1 - \frac{x^2}{4n}\right)^{\frac{3}{2}}$ n'est pas grand.

Dans le cas où $x^2 = 4n$, il aboutit au col $-\frac{x}{2}$ 3 vallées dont les directions en ce point ont des arguments $\frac{\pi}{3}$, π et $-\frac{\pi}{3}$. Il serait donc indiqué de prendre, dans ce cas, comme lacet d'intégration un chemin composé:

a) de deux segments rectilignes L', L'', symétriques par rapport à l'axe réel, d'extrémités $-\frac{x}{2}$ et $z' = -\frac{x}{2}\left(1 - \varrho e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ pour le premier, $-\frac{x}{2}$ et $z'' = \overline{z'}$ pour le second, la quantité ϱ étant comprise entre o et 1.

b) de l'arc de cercle de centre $z = 0$, joignant z' et z'' et coupant l'axe réel positif.

Il serait naturel de prendre encore le même lacet lorsque les cols sont très voisins. Mais, comme il nous sera utile de considérer plus loin des valeurs complexes de n, il faut que nous définissions $H_n(x)$ pour n complexe. $F(z)$ n'est plus alors une fonction uniforme de z dans le plan simple de la variable z, mais chacune de ses déterminations est encore uniforme dans ce plan coupé le long de l'axe réel positif. Convenons de prendre comme détermination de $\log z$ dans le plan coupé celle dont la partie imaginaire est comprise entre o et 2π. Définissons ensuite $H_{n-1}(x)$ par

$$\frac{e^{i\pi(n-1)}}{\Gamma(n)} H_{n-1}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int e^{-\frac{z^2}{2} - zx - n\log z}\,dz, \tag{34}$$

le chemin d'intégration étant un lacet partant de l'infini dans le secteur $0 \leqq \arg z \leqq \frac{\pi}{4} - \varepsilon$, tournant autour de $z = 0$ et aboutissant à l'infini dans le secteur $\frac{7\pi}{4} + \varepsilon \leqq \arg z \leqq 2\pi$, ε désignant une quantité fixe, positive, inférieure à $\frac{\pi}{4}$. Lorsque n est un entier, le second membre de (34) est égal à l'intégrale prise le long d'un lacet fermé fini entourant $z = 0$ et se réduit donc au second membre de (2). L'avantage de la définition précédente est de donner un sens à $H_n(x)$ pour toute valeur réelle ou complexe de n, différente d'un pôle de $\Gamma(n+1)$, c'est-à-dire de $n = -1, -2, -3, \ldots$

La définition (34) entraîne une modification du chemin d'intégration indiqué plus haut. Nous fixerons comme chemin d'intégration le chemin formé:

a) des deux segments rectilignes L', L''.

b) de l'arc de cercle K' de centre $z = 0$, reliant z' au point $|z'|$ d'argument zéro.

c) de l'arc symétrique K'' reliant z'' au point $|z'|$ d'argument 2π.

d) de la demi-droite D' allant du point $|z'|$ d'argument zéro à l'infini sur le bord supérieur de la coupure et de la demi-droite D'' symétrique, sur le bord inférieur de la coupure.

§ 10. La contribution des segments rectilignes L' et L''.

Les substitutions

$$z = -\frac{x}{2} + \zeta, \quad \zeta = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \xi, \tag{35}$$

nous donnent, en notant encore

$$\omega = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad t = -\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\left(1 - \frac{4n}{x^2}\right) = n\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{x^2}{4n}\right) \tag{36}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L', L''} F(z)\, dz = \frac{F\left(-\frac{x}{2}\right)\sqrt{\omega}}{2\pi i}\int_{\Lambda', \Lambda''} \exp \omega\left[-(\omega^2 + t)\log\left(1 - \frac{\xi}{\omega}\right)\right. \tag{37}$$

$$\left. - \omega\xi - \frac{\xi^2}{2}\right] d\xi,$$

Λ' et Λ'' désignant les images dans le plan ξ des segments L', L''. La longueur de ces images est $\rho\omega$, où ρ est une quantité positive indépendante de t, que nous prendrons inférieure à 1. Désignant par $-i\,G(t, \omega)$ l'intégrale du second membre de (37), nous aurons

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L', L''} \mathrm{F}(z)\, dz = -\frac{F\left(-\frac{x}{2}\right)\sqrt{\omega}}{\pi} G(t, \omega) \tag{38}$$

$G(t, \omega)$ est une fonction entière de t, possède donc un développement

$$G(t, \omega) = A_0 + \frac{A_1}{1!} t + \ldots + \frac{A_p}{p!} t^p + \ldots \tag{39}$$

convergent pour toute valeur réelle ou complexe de t. On a

$$A_p = \frac{(-1)^p i\, \omega^p}{2}\int_{\Lambda', \Lambda''} \left[\log\left(1 - \frac{\xi}{\omega}\right)\right]^p \tag{40}$$

$$\exp \omega\left[-\omega^2 \log\left(1 - \frac{\xi}{\omega}\right) - \omega\xi - \frac{\xi^2}{2}\right] d\xi.$$

(Si dans (37) nous étendions l'intégrale non à Λ', Λ'' mais au chemin $\mathfrak{L}$ qui correspond dans le plan ξ à celui qui a été fixé au § 9 dans le plan z, nous verrions de même que $\dfrac{e^{(n-1)\pi i} H_{n-1}(x)}{\Gamma(n) F\left(-\frac{x}{2}\right) \sqrt{\omega}}$ est aussi une fonction entière de t dont les coefficients du développement analogue à (39) seraient donnés par (40) où l'intégrale serait à étendre au chemin $\mathfrak{L}$.)

Pour $t=0$, c'est-à-dire lorsque $x^2=4n$, on a

$$\frac{e^{i\pi(n-1)} H_{n-1}(x)}{\Gamma(n)} = -\frac{F\left(-\frac{x}{2}\right)\sqrt{\omega}}{\pi} A_0 .$$

§ 11. Valeur asymptotique de A_p.

Développons $\log\left(1-\dfrac{\xi}{\omega}\right)$ en série; puisque sur Λ' et Λ'', $|\xi| \leqq \varrho\omega$, nous aurons

$$A_p = \frac{i}{2}\int_{\Lambda', \Lambda''} \xi^p \left[\sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\xi}{\omega}\right)^{\sigma-1}\right]^p \exp\left[\frac{\xi^3}{3} + \xi^3 \sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{1}{\nu}\left(\frac{\xi}{\omega}\right)^{\nu-3}\right] d\xi .$$

Introduisons les polynomes $\psi_{\nu p}(u)$ par

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \tau^{\sigma-1}\right)^p \exp\left[u \sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{1}{\nu} \tau^{\nu-3}\right] = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_{\nu p}(u)\, \tau^\nu, \quad |\tau| < 1 . \tag{62}$$

Ils sont de degré $\leqq \nu$. Nous avons donné au § 2 les valeurs de ψ_{0p} et de ψ_{1p}. Nous aurons alors

$$A_p = \frac{i}{2}\int_{\Lambda', \Lambda''} \xi^p e^{\frac{\xi^3}{3}} \sum_{\nu=0}^{k-1} \psi_{\nu p}(\xi^3)\left(\frac{\xi}{\omega}\right)^\nu d\xi + R'_k \tag{41}$$

avec

$$R'_k = \frac{i}{2}\int_{\Lambda', \Lambda''} \xi^p e^{\frac{\xi^3}{3}} \sum_{\nu=k}^{\infty} \psi_{\nu p}(\xi^3)\left(\frac{\xi}{\omega}\right)^\nu d\xi . \tag{42}$$

La substitution $\xi = v e^{i\frac{\pi}{3}}$ sur Λ' et $\xi = v e^{-\frac{i\pi}{3}}$ sur Λ'' ramène A_p à être égal à

$$A_p = \mathfrak{Z}\left[e^{i\frac{\pi}{3}(p+1)} \int_0^{\infty} v^p e^{-\frac{v^3}{3}} \sum_{\nu=0}^{k-1} \psi_{\nu p}(-v^3) \left(\frac{v e^{i\frac{\pi}{3}}}{\omega}\right)^{\nu} dv \right] + R_k' + R_k'',$$

R_k'' étant l'erreur commise en remplaçant l'intégrale étendue de 0 à $\varrho\,\omega$ par celle étendue de 0 à ∞. Si nous notons

$$\psi_{\nu p}(u) = \sum_{\mu=0}^{\nu} b_{\nu\mu}^{(p)} u^{\mu},$$

nous obtiendrons, après quelques calculs élémentaires,

$$A_p = 3^{\frac{p-2}{3}} \sum_{\nu=0}^{k-1} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{(-1)^{\mu}\, 3^{\mu+\frac{\nu}{3}}}{\omega^{\nu}}\, \Gamma\left(\frac{p+\nu+1}{3}+\mu\right) b_{\nu\mu}^{(p)} \tag{43}$$

$$\sin\frac{p+1+\nu}{3}\pi + R_k' + R_k''.$$

§ 12. Estimation de R_k'.

L'expression

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{\tau^{\sigma-1}}{\sigma}\right)^{p} \exp\left(u \sum_{\nu=4}^{\infty} \frac{\tau^{\nu-3}}{\nu}\right), \quad |\tau| < 1,$$

qui sert à définir les $\psi_{\nu p}(u)$ a, considérée comme série de puissances de u, τ la dominante

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{\infty} \tau^{\sigma-1}\right)^{p+1} \exp\left(u \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\tau^{\nu}}{\nu}\right) = (1-\tau)^{-(1+p+u)}$$

$$= 1 + \frac{1+p+u}{1}\tau + \frac{1+p+u}{1}\cdot\frac{2+p+u}{2}\tau^2 + \dots.$$

De là résulte l'inégalité

$$|\psi_{\nu p}(u)| \leqq \frac{(1+p+|u|)(2+p+|u|)\dots(\nu+p+|u|)}{\nu!}$$

$$= \left(1+\frac{p+|u|}{1}\right)\left(1+\frac{p+|u|}{2}\right)\dots\left(1+\frac{p+|u|}{\nu}\right),$$

et pour $|\tau| < 1$

$$\left|\sum_{\nu=k}^{\infty} \psi_{\nu p}(u)\tau^{\nu}\right| \leqq \left(1+\frac{p+|u|}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{p+|u|}{k}\right)|\tau|^{k}\left[1+\frac{p+|u|}{k+1}|\tau|+\ldots\right]$$

$$\leqq (1+p+|u|)^{k}|\tau|^{k}(1-|\tau|)^{-1-p-|u|}.$$

De là découle

$$\left|R'_{k}\right| < \int_{0}^{\rho\omega} v^{p} e^{-\frac{v^3}{3}} (1+p+v^3)^{k}\left(\frac{v}{\omega}\right)^{k}\left(1-\frac{v}{\omega}\right)^{-1-p-v^3} dv$$

$$\leqq \frac{1}{\omega^{k}(1-\rho)^{1+p}}\int_{0}^{\infty}\left[e(1-\rho)^{3}\right]^{-\frac{v^3}{3}} v^{p+k}(1+p+v^3)^{k}\, dv.$$

On prendra ρ assez petit pour que

$$e(1-\rho)^{3} > 1. \tag{44}$$

Il existera dans ce cas une constante M_1 (dépendant de p et de k) telle que

$$|R'_{k}| < \frac{M_1}{\omega^{k}}. \tag{45}$$

§ 13. Estimation de R''_{k}.

R''_{k} se décompose en k^2 termes au plus, du type

$$\int_{\rho\omega}^{\infty} v^{p+3\mu+\nu} e^{-\frac{v^3}{3}} dv$$

qui, pour ω grand, sont de l'ordre $O\left(\omega^{p+4(k-1)} e^{-\frac{(\rho\omega)^3}{3}}\right)$, a fortiori donc, de l'ordre $O(\omega^{-k})$. Il existe donc une constante M_2, dépendant de p et k, telle que

$$\left|R''_{k}\right| < \frac{M_2}{\omega^{k}}. \tag{46}$$

En résumé donc

$$R'_k + R''_k = O\left(\omega^{-k}\right) = O\left(x^{-\frac{2k}{3}}\right). \tag{47}$$

§ 14. Contribution des arcs de cercles.

La contribution d'un des arcs de cercle, K' par exemple, dans l'intégrale (34) a pour valeur

$$\frac{1}{2\pi i} F\left(-\frac{x}{2}\right)\sqrt{\omega}\;\frac{F(z')}{F\left(-\frac{x}{2}\right)\sqrt{\omega}}\int_{K'}\frac{F(z)}{F(z')}\,dz,$$

$z' = -\frac{x}{2}\left(1 - \varrho e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ étant l'extrémité commune de K' et de L'. Or,

$$\left|\frac{F(z')}{F\left(-\frac{x}{2}\right)}\right| = \left|\exp\left[t\,\omega\,\varrho\, e^{i\frac{\pi}{3}}\left(1+\frac{1}{2}\varrho e^{i\frac{\pi}{3}}\right) + (t\,\omega + \omega^3)\,\varrho^3\sum_{3}^{\infty}\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{3}}}{\nu}\varrho^{\nu-3}\right]\right|$$

$$= \left|\exp \omega^3\left[(1 + t\,\omega^{-2})\,\varrho^3\left(-\frac{1}{3} + \varrho\sum_{4}^{\infty}\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{3}}}{\nu}\varrho^{\nu-4}\right) + t\,\omega^{-2}\,\varrho\, e^{i\frac{\pi}{3}}\left(1+\frac{1}{2}\varrho e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right]\right|,$$

et

$$\Re\left(\frac{1}{3} - \varrho\sum_{4}^{\infty}\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{3}}}{\nu}\varrho^{\nu-4}\right) > 0$$

pour $0 < \varrho < 1$. Par suite, on peut trouver deux quantités positives h, h' telles que pour $|t| < h\,\omega^2$

$$\left|\frac{F(z')}{F\left(-\frac{x}{2}\right)\sqrt{\omega}}\right| < \frac{e^{-h'\omega^2}}{\sqrt{\omega}}.$$

Pour calculer $\int_K \frac{F(z)}{F(z')} dz$, on posera comme au § 7, $z' = -\alpha + \beta i$ et on remarquera qu'ici $\alpha > 0$. Les considérations du § 7 se transposent avec une légère modification provenant du fait que n et t peuvent être ici complexes. On trouvera que sur K'

$$\left|\frac{F(z)}{F(z')}\right| \leqq \exp\left[-|z'|^2 (\cos\Phi - \cos\Phi_1)(\cos\Phi - \cos\Phi_2) + t''\,\omega\,(\Phi - \Phi_1)\right],$$

en notant $t'' = \Im t$ et $\cos\Phi_1$, $\cos\Phi_2$ ayant les valeurs indiquées au § 7. Sur K' on a

$$\cos\Phi - \cos\Phi_2 \geqq \cos\Phi_1 - \cos\Phi_2 = \frac{\varrho\cos\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{4}\left|1 - \varrho e^{i\frac{\pi}{3}}\right|}.$$

Par suite,

$$\frac{t''\,\omega\,(\Phi - \Phi_1)}{|z'|^2(\cos\Phi - \cos\Phi_1)(\cos\Phi - \cos\Phi_2)} = O\left(\frac{|t|\,\omega}{|z'|^2}\right) = O\left(|t|\,\omega^{-2}\right).$$

On pourra donc conclure, comme au § 7 (cas b) (32), que pour $|t| < h\,\omega^2$

$$\int_K \frac{F(z)}{F(z')} dz = O(1).$$

La contribution des arcs de cercles est donc, pour $|t| < h\,\omega^2$, de l'ordre de

$$F\left(-\frac{x}{2}\right)\sqrt{\omega}\; O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{-h'\,\omega^3}\right). \tag{49}$$

§ 15. La contribution des chemins rectilignes infinis.

Les extrémitées finies de ces chemins ont pour affixe

$$z_3 = |z'| = \frac{x}{2}\sqrt{1 - \varrho + \varrho^2}.$$

Or, pour $|t| < h\,\omega^2$,

$$\left|\frac{F(z_3)}{F\left(-\frac{x}{2}\right)}\right| \leqq \exp(-\omega^3)\left[1+\sqrt{1-\varrho+\varrho^2}+\frac{1}{2}(1-\varrho+\varrho^2)\right. \cdot$$

$$\left.+\frac{1}{2}(1+|t|\,\omega^{-2})\log(1-\varrho+\varrho^2)\right]$$

$$= O\left(e^{-h''\omega^3}\right),$$

si ϱ et h sont suffisamment petits.

L'intégrale prise le long de la demi-droite $D = D'$ ou D'' s'estime immédiatement:

$$\left|\int_D \frac{F(z)}{F(z')}\,dz\right| \leqq \left|\frac{F(z_3)}{F(z')}\right| \left|\int_0^\infty \exp\left[-\frac{\zeta^2}{2}-\zeta(x+z_3)-n'\log\left(1+\frac{\zeta}{z_3}\right)\right] d\zeta\right|,$$

si $n' = \Re\, n$. Si donc $n' \geqq 0$, cette intégrale est inférieure à

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\zeta^2}{2}}\,d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ car } \left|\frac{F(z_3)}{F(z')}\right| < 1.$$

Or, $n = \omega^3(1+t\,\omega^{-2})$. $n' \geqq 0$ est donc équivalent à $\Re\, t \geqq -\omega^2$.

La contribution de D' et de D'' est donc, pour $|t| < h\,\omega^2$, de l'ordre de

$$F\left(-\frac{x}{2}\right)\sqrt{\omega}\; O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\, e^{-h''\omega^2}\right).$$

En appelant h^* la plus petite des deux constantes h', h'' et en groupant les résultats des § précédents, on est conduit finalement à la formule (12) du § 2.

§16. La convergence uniforme de $G(t, \omega)$ pour $\omega \to \infty$.

La valeur limite de A_p pour $x \to \infty$ est

$$B_p = 3^{\frac{p-2}{3}}\,\Gamma\left(\frac{p+1}{3}\right)\sin\frac{p+1}{3}\,\pi. \tag{51}$$

La fonction $\sum\limits_0^\infty \frac{B_p}{p!}\,t^p$ est encore une fonction entière de t et il se pose naturellement la question de savoir si

$$\lim_{\omega \to \infty} G(t, \omega) = \sum_{0}^{\infty} \frac{B_p}{p!} t^p . \tag{52}$$

Il suffira, pour le voir, en vertu d'un théorème connu d'Analyse, de démontrer qu'il existe une quantité M_T indépendante de ω, telle que

$$| G(t, \omega) | < M_T ,$$

pour tout $|t| \leqq T$. Dans ce cas, la limite (52) est uniforme dans $|t| \leqq T$. De (37) et (38) découle, en développant $\log\left(1 - \frac{\xi}{\omega}\right)$ en série

$$\begin{aligned} | G(t, \omega) | = \frac{1}{2} \Big| \int_{\Lambda', \Lambda''} \exp \Big[\xi^3 \Big(\frac{1}{3} + \sum_{4}^{\infty} \frac{1}{\nu} \Big(\frac{\xi}{\omega}\Big)^{\nu - 3} \Big) \\ - t \xi \Big(1 + \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\nu} \Big(\frac{\xi}{\omega} \Big)^{\nu - 1} \Big) \Big] d\xi \Big| \end{aligned}$$

$$\leqq \int_{0}^{\varrho \omega} \exp \Big[- v^3 \Big(\frac{1}{3} - \sum_{4}^{\infty} \frac{\varrho^{\nu - 3}}{\nu} \Big) + |t| v \Big(1 + \sum_{2}^{\infty} \frac{\varrho^{\nu - 1}}{\nu} \Big) \Big] dv.$$

On peut prendre ϱ assez petit pour que

$$\frac{1}{3} - \sum_{4}^{\infty} \frac{\varrho^{\nu - 3}}{\nu} = m_1 > 0.$$

En désignant par m_2 la quantité

$$1 + \sum_{2}^{\infty} \frac{\varrho^{\nu - 1}}{\nu} ,$$

on a, a fortiori, pour $|t| \leqq T$,

$$| G(t, \omega) | \leqq \int_{0}^{\infty} e^{- m_1 v^3 + m_2 T v} \, d v = M_T .$$

Si donc, dans la série $G(t, \omega)$, on néglige le reste $\sum_{p = k'}^{\infty} \frac{A_p}{p!} t^p$, l'erreur ainsi commise est, pour $|t| \leqq T$, inférieure à $\dfrac{M_T}{1 - \frac{|t|}{T}} \left| \frac{t}{T} \right|^{k'}$.

(Reçu le 18 avril 1929)