

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 1 (1929)  
  
**Artikel:** Die Zetafunktionen, die Klassenzahl und die Kronecker'sche Grenzformel eines beliebigen Kreiskörpers.  
**Autor:** Gut, Max  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1143>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Die Zetafunktion, die Klassenzahl und die Kronecker'sche Grenzformel eines beliebigen Kreiskörpers.

Von MAX GUT, Zürich

In dieser Arbeit wird die Zetafunktion eines beliebigen Kreiskörpers aufgestellt und ohne jede Benutzung bestimmter Integrale und nachfolgender Partialbruchzerlegung die linke Seite der klassischen Formel

$$\lim_{s=1} (s-1) \zeta_k(s) = h \cdot \kappa$$

ausgewertet, endlich vermöge der Theorie der Fourier-Reihen die Kronecker'sche Grenzformel aufgestellt.

Während meines Wissens die Kronecker'sche Grenzformel für einen beliebigen Kreiskörper (also nicht nur der  $L$ -Reihen) noch nicht berechnet wurde, hat Herr N. G. W. H. Beeger in mehreren Arbeiten <sup>1)</sup> sich mit der Zetafunktion und mit der Klassenzahl beschäftigt. Bei aller Würdigung seiner wertvollen Arbeiten scheint mir der hier gegebene Beweis sowohl im analytischen, wie im zahlentheoretischen Teile einfacher und durchsichtiger. Den Vergleich dem Leser überlassend, soll nur auf die Hauptunterschiede aufmerksam gemacht werden. Im analytischen Teile ist hier die Einführung und Auswertung der bestimmten Integrale und die damit verknüpfte Partialbruchzerlegung vermieden. Im zahlentheoretischen Teile werden die Beweise mit Hilfe der zu den Körpern der  $h$ -ten Einheitswurzeln ( $h$  Primzahl) gehörenden bestimmenden ganzen Zahlen und erzeugenden Substitutionen auf einfachste Weise explizite durchgeführt.

Von den quadratischen Körpern abgesehen hat Herr Fueter schon in einem Spezialfalle die Berechnung der Klassenzahl ohne Benutzung des  $\Gamma$ -Integralen und nachfolgender Partialbruchzerlegung durchgeführt <sup>2)</sup>, und

---

<sup>1)</sup> Ueber die Teilkörper des Kreiskörpers  $K \left( e^{\frac{2\pi i}{l^h}} \right)$ ; K. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings of the Section of Sciences, vol. XXI, pag. 454—465, 758—773, 774—779 (1919); Bestimmung der Klassenzahl der Ideale aller Unterkörper des Kreiskörpers der  $m$ -ten Einheitswurzeln, wo die Zahl  $m$  durch mehr als eine Primzahl teilbar ist, l. c. vol. XXII, pag. 331—350, 395—414, (1920), und eine Korrektur hiezu, l. c. vol. XXIII, pag. 1399—1401, (1922).

<sup>2)</sup> Die Klassenzahl zyklischer Körper vom Primzahlgrad, deren Diskriminante nur eine Primzahl enthält. Crelle, Bd. 147, pag. 174, (1917).



die Lektüre jener Arbeit gab mit den Anstoß zur vorliegenden Untersuchung. Aus einer Stelle in Dirichlet's Werken geht hervor, daß das hiezu analytisch notwendige schon Dirichlet<sup>3)</sup> bekannt war. Wahrscheinlich wußte dies auch E. E. Kummer, dem wir ja die fundamentalen und klassischen Arbeiten über die Klassenzahlbestimmung der vollen Kreiskörper der  $m$ ten Einheitswurzel verdanken<sup>4)</sup>. Jedenfalls scheint er bei allgemeinem  $m$  auch so vorgegangen zu sein, daß er die Zetafunktion des Körpers der  $m$ ten Einheitswurzel als Produkt sämtlicher  $L$ -Reihen darstellte, und jeden einzelnen Faktor (vielleicht dann aber vermöge des

$\Gamma$ -Integrale oder des Integrals  $\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1} dx$ ) umformte.

Auf eine historisch-bibliographische Zusammenstellung der Arbeiten über die Zetafunktionen und die Berechnung der Klassenzahlen kann hier verzichtet werden<sup>5)</sup>, da diese schon ausgeführt wurde in dem Hilbert'schen Zahlberichte<sup>6)</sup>, und in bezug auf die seither publizierten Arbeiten in den beiden: «Bulletins of the National Research Council»: Algebraic Numbers by L. E. Dickson, H. H. Mitchell, H. S. Vandiver, G. E. Wahlin; Number 28, February 1923. Algebraic Numbers II by H. S. Vandiver, G. E. Wahlin; Number 62, February 1928.

Die Arbeit gliedert sich in vier Teile. Ein erstes Kapitel handelt über die  $L$ -Reihen. Im zweiten sind aus didaktischen Erwägungen alle Uebersetzungen abschließend durchgeführt für die Körper, die hier Ausgangskreiskörper genannt werden, und zu denen neben weiteren Körpern insbesondere sämtliche vollen Kreiskörper gehören. Im dritten Kapitel endlich zeigt sich, daß die gleichen Methoden zu den gesuchten Resultaten führen auch für die allgemeinsten Kreiskörper.

In einem vierten Kapitel wird endlich noch ein weiterer kurzer Beweis für die Berechnung der Klassenzahl des allgemeinsten Kreiskörpers angegeben, der auf der Benutzung der Funktionalgleichungen der Rie-

<sup>3)</sup> Werke, pag. 473, wo er auf Bernoulli verweist.

<sup>4)</sup> Vgl. insbesondere für allgemeines  $m$ : Ueber die Klassenanzahl der aus zusammengesetzten Einheitswurzeln gebildeten idealen komplexen Zahlen. Monatsberichte der Königl. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin aus dem Jahre 1863 (gedruckt 1864), pag. 21.

<sup>5)</sup> Immerhin wollen wir noch besonders hinweisen auf eine Arbeit von L. Fuchs: Ueber die aus Einheitswurzeln gebildeten komplexen Zahlen von periodischem Verhalten, insbesondere die Bestimmung der Klassenanzahl derselben. Crelle, Bd. 65, pag. 74, (1866), und auf die Arbeiten von H. Weber, vgl. sein Lehrbuch der Algebra, 2. Bd., 2. Auflage, Braunschweig 1899.

<sup>6)</sup> Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 4, (1897). Im folgenden zitiert durch Angabe des Autornamens.

mann'schen  $\zeta$ -Funktion, der  $L$ -Reihen und der Hecke'schen Funktionalgleichung beruht. Hierbei erübrigt sich die Berechnung der Körperdiskriminanten und des Produktes der Größen  $G(1, \chi)$ .

## I. Kapitel. Die $L$ -Reihen.

### § 1. Die eigentlichen Charaktere mod. $m$ .

Es sei  $m$  eine ganze rationale positive Zahl. Die zu  $m$  teilerfremden Restklassen des rationalen Zahlkörpers bilden dann eine Abelsche Gruppe vom Grade  $\varphi(m)$ . Ihr ist ein System von  $\varphi(m)$  «Restcharakteren mod.  $m$ » zugeordnet, deren Grundeigenschaften folgende sind<sup>7)</sup>:

$$\begin{aligned} X(a) &= X(b), & \text{falls } a \equiv b \pmod{m} \\ X(a) \cdot X(b) &= X(ab) \\ X(a) &\neq 0, & \text{falls } (a, m) = (1) \\ X(a) &= 0, & \text{falls } (a, m) = (d), d > 1 \text{ ist.} \end{aligned} \tag{I}$$

Denjenigen Charakter, der für alle zu  $m$  teilerfremden  $a$  gleich 1 ist, nennt man den Hauptcharakter. Alle übrigen Charaktere nennen wir Nebencharaktere. Ein Nebencharakter ist reell, wenn sein Quadrat für alle zu  $m$  teilerfremden ganzen rationalen Zahlen  $a$  gleich 1 ist. Andernfalls ist der Nebencharakter nicht reell.

Die Charaktere, seien sie nun reell oder nicht, sind entweder eigentlich oder uneigentlich. Ein Charakter ist *uneigentlich*, wenn es mindestens einen von  $m$  verschiedenen Teiler  $\bar{t} > 0$  von  $m$  gibt, so daß für alle zu  $m$  teilerfremden  $a, b$  aus  $a \equiv b \pmod{\bar{t}}$  stets  $X(a) = X(b)$  folgt. In jedem andern Falle ist der Charakter *eigentlich*.

Der uneigentliche Charakter kann dann als Charakter nach dem Modul  $\bar{t}$  aufgefaßt werden, indem man dabei das Gesetz

$$X(a) = X(b), \text{ falls } a \equiv b \pmod{\bar{t}}; \underline{(a, m) = (1)},$$

auch gelten läßt für solche  $b$ , die zwar mit  $m$ , aber *nicht* mit  $\bar{t}$  einen von 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler haben.

Gibt es zu einem festen uneigentlichen Charakter mod.  $m$  mehrere solche echten Teiler  $\bar{t}$ , so sei  $t$  der kleinste von ihnen. Dann ist der

<sup>7)</sup> Wir verweisen hier auf das II. und III. Kapitel der «Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen» von E. Hecke, Leipzig 1923. Im folgenden zitiert durch Angabe des Autornamens.

vorgegebene uneigentliche Charakter mod.  $m$  ein eigentlicher Charakter mod.  $t$ . Wir bezeichnen diese mod.  $t$  dann *eigentlichen* Charaktere mit Minuskeln:  $\chi$ .

Nimmt man bei einem festen Charakter  $\chi$  immer den reziproken Wert, so kommt man wieder zu einem Charakter  $\bar{\chi}$ , den man den «konjugierten» oder «reziproken» Charakter nennt. Der Hauptcharakter und die reellen Nebencharaktere sind zu sich selbst konjugiert, die nicht reellen Nebencharaktere haben je den konjugiert komplexen Wert.

Es ist leicht, für jeden Modul  $m$  anzugeben, für welchen Teiler  $t$  jeder der  $\varphi(m)$  Charaktere eigentlich wird.

Ist  $m = 1$ ;  $\varphi(m) = 1$ , so existiert nur ein (eigentlicher Haupt-) Charakter, der gleich  $+1$  ist für alle positiven ganzen rationalen Zahlen  $a$ ; also  $\chi(a) = +1$ .

Ist  $m = l^h$ ;  $\varphi(m) = (l-1) l^{h-1}$ ;  $l$  eine ungerade Primzahl,  $h \geq 1$ , so sei  $g$  eine ein für allemal fest gewählte Primitivwurzel mod.  $l^h$ . Wir setzen:

$$\chi(g) = e^{\frac{2\pi i}{\varphi(m)}}.$$

Dadurch ist ein erzeugender Charakter für alle Restklassen mod.  $l^h$  gemäß den Formeln (1) festgelegt. Die Potenzen

$$X^n(a) = [\chi(a)]^n, \quad 0 \leq n \leq \varphi(m) - 1$$

geben alle  $\varphi(m)$  von einander verschiedenen Charaktere mod.  $m$ .

Man beachte, was wir mit Rücksicht auf die Formulierung im Hilbert'schen Zahlbericht ausdrücklich hervorheben wollen, daß  $X^0(a) = 0$  ist, wenn  $a \equiv 0 \pmod{l}$  ist. Dagegen ist für den  $X^0$  zugeordneten *eigentlichen* Charakter (der zu  $t = 1$  gehört!):  $\chi(a) = 1$  für jedes ganze rationale positive  $a$ .

Falls wir unter  $\varphi(q)$  den Wert 0 verstehen wollen, falls  $q$  ein rationaler echter Bruch ist, so sieht man durch Potenzieren des erzeugenden Charakters, resp., wenn man lieber will, durch Schluß von  $h$  auf  $h+1$  unmittelbar folgende Tatsache ein:

Es gibt  $\varphi(l^i) - \varphi(l^{i-1})$  Charaktere, für die  $(n, l^h) = l^{h-i}$  ist, und die für  $t = l^i$  eigentlich werden. Hierbei darf  $i$  irgend einen der Werte  $0 \leq i \leq h$  annehmen. Von diesen  $\varphi(m)$  Charakteren sind nur zwei reell, nämlich der Hauptcharakter, der dem Werte  $n = 0$  entspricht, und

welcher eigentlich ist für  $t = 1$ , ferner der Nebencharakter, der dem Werte  $n = \frac{\varphi(m)}{2}$  entspricht, und welcher eigentlich ist für  $t = l$ .

Ist  $m = 2$ ;  $\varphi(m) = 1$ , so existiert nur ein uneigentlicher Hauptcharakter:

$$X(2a) = 0, \quad X(2a + 1) = +1.$$

Dieser Charakter wird eigentlich für  $t = 1$ , nämlich:  $\chi(a) = +1$  für alle ganzen rationalen Zahlen  $a$ . 2 ist der einzige Primzahlpotenzmodul, für welchen *kein eigentlicher* Charakter existiert.

Ist  $m = 4$ ;  $\varphi(m) = 2$ , so existiert ein (reeller) eigentlicher Nebencharakter:  $\chi(4a - 1) = -1$ . Das Quadrat dieses Charakters ist eigentlich für  $t = 1$ .

Ist  $m = 2^h$ ;  $h \geq 3$ ,  $\varphi(m) = 2^{h-1}$ , so definiert bekanntlich

$$\chi(-5^a) = \chi(+5^a) = e^{\frac{2\pi i}{2^{h-2}} \cdot a}$$

einen eigentlichen Nebencharakter mod.  $m$ . Die Potenzen dieses Charakters:

$$X^n(b) = [\chi(b)]^n; \quad 0 \leq n \leq 2^{h-2} - 1$$

sind  $2^{h-2}$  voneinander verschiedene Charaktere mod.  $m$ . Ist  $(n, 2^h) = 2^{h-i}$ , so ist der Charakter  $X^n$  eigentlich für den Teiler  $2^i$  von  $m$ .

Das Produkt aus dem (reellen) eigentlichen Nebencharakter mod. 4, nämlich  $\chi(4a - 1) = -1$ , welcher Charakter für  $m = 2^h$  uneigentlich wird, und als Charakter mod.  $2^h$  mit  $X_*$  bezeichnet werden möge, und aus  $X^n$  liefert vermöge:

$$X(b) = X_*(b) \cdot X^n(b); \quad 1 \leq n \leq 2^{h-2}$$

weitere  $2^{h-2}$  voneinander und von den schon erwähnten verschiedene Charaktere mod.  $m$ . Ist wieder  $(n, 2^h) = 2^{h-i}$ , so ist der Charakter  $X_* X^n$  eigentlich für den Teiler  $2^i$  von  $m$ .

Zusammenfassend kann man sagen:

Für  $t = 1$  wird der reelle Hauptcharakter eigentlich [ $1 = \varphi(1) - \varphi(2^{-1})$ ];  
für  $t = 2$  ist kein Charakter eigentlich [ $0 = \varphi(2) - \varphi(1)$ ];  
für  $t = 4$  ist ein reeller Nebencharakter eigentlich [ $1 = \varphi(4) - \varphi(2)$ ];  
für  $t = 8$  werden  $\varphi(8) - \varphi(4) = 2$  reelle Nebencharaktere eigentlich;  
und, falls  $h > 3$ :

für  $t = 16$  werden  $\varphi(16) - \varphi(8)$  je zu zweien konjugiert komplexe Nebencharaktere eigentlich;

und, falls  $h > 4$ :

für  $t = 32$  werden  $\varphi(32) - \varphi(16)$  je zu zweien konjugiert komplexe Nebencharaktere eigentlich;

u. s. f.

Da die Anzahl der Charaktere mod.  $m$  gleich  $\varphi(m)$  ist, so haben wir *alle*, welchen Wert  $h$  auch haben möge.

Ist schließlich  $m$  von der Form:

$m = 2^{h_0} \cdot l_1^{h_1} \cdot l_2^{h_2} \cdot \dots \cdot l_R^{h_R}$ , wo die  $l$  voneinander verschiedene ungerade Primzahlen sind, so erhält man alle  $\varphi(m)$  Charaktere mod.  $m$  durch Multiplikation der zu jedem  $l^h$ , resp.  $2^{h_0}$  gehörenden Charaktere, entsprechend der Formel

$$\varphi(m) = \varphi(2^{h_0}) \cdot \varphi(l_1^{h_1}) \cdot \varphi(l_2^{h_2}) \cdot \dots \cdot \varphi(l_R^{h_R}).$$

Ist  $\chi_0(a)$  hiebei eigentlich für den Teiler  $t_0$  von  $2^{h_0}$ ,

$\chi_r(a)$  eigentlich für den Teiler  $t_r$  von  $l_r^{h_r}$ ;  $r = 1, 2, \dots, R$ , so ist

$$\chi(a) = \chi_0(a) \cdot \chi_1(a) \cdot \chi_2(a) \cdot \dots \cdot \chi_R(a)$$

eigentlich für den Teiler  $t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_R$  von  $m$ . Dies ergibt sich unmittelbar aus (I). Zu diesem Teiler gehören im Ganzen mithin

$$\left[ \varphi(t_0) - \varphi\left(\frac{t_0}{2}\right) \right] \cdot \left[ \varphi(t_1) - \varphi\left(\frac{t_1}{l_1}\right) \right] \cdot \left[ \varphi(t_2) - \varphi\left(\frac{t_2}{l_2}\right) \right] \cdot \dots \cdot \left[ \varphi(t_R) - \varphi\left(\frac{t_R}{l_R}\right) \right]$$

*eigentliche* Charaktere.

Bilden wir auf diese Weise sämtliche eigentliche Charaktere sämtlicher Teiler von  $m$  (die Teiler 1 und  $m$  natürlich inbegriffen), so erhalten wir  $\varphi(m)$  voneinander verschiedene, d. h. also *alle* Charaktere mod.  $m$ .

## § 2. Die zu einem eigentlichen Charakter gehörende $L$ -Reihe

Unsere Absicht ist es, die  $L$ -Reihe

$$L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}, \quad \Re(s) > 1,$$

wo  $p$  alle Primzahlen 2, 3, 5, 7, . . . durchläuft, nach Potenzen von  $(s-1)$  zu entwickeln. Hiebei soll  $\chi$  ein *eigentlicher* Charakter mod.  $t$  sein.

Da für  $t = 1$

$$L(s, \chi) = \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + E + E_1 \cdot (s-1) + E_2 (s-1)^2 + \dots, \quad (2)$$

wo  $E$  die Euler'sche (Mascheroni'sche) Konstante ist, so kann sich unsere Untersuchung auf die  $L$ -Reihen beschränken, für welche  $\chi$  ein *eigentlicher Nebencharakter*, mithin auch  $t > 2$  ist.

Um *unter diesen Annahmen* die Berechnung durchzuführen, multiplizieren wir  $L(s, \chi)$  mit  $G(1, \bar{\chi})$ , einer Größe, deren Definition wir so gleich angeben werden. Das hat einen Sinn, weil man zeigen kann, daß das Quadrat des absoluten Betrages dieser Größe gleich  $t$ , mithin von Null verschieden ist. Hier bedeutet für ganzes rationales  $r$

$$G(r, \chi) = \sum_{k=1}^t \chi(k) \cdot e^{\frac{2\pi i r}{t} \cdot k}.$$

*Lemma:* Wenn  $r$  einen von 1 verschiedenen Teiler mit  $t$  gemeinsam hat, so ist  $G(r, \chi) = 0$ .

*Beweis:* Wenn  $r \equiv 0 \pmod{t}$  ist, so reduziert sich  $G(r, \chi)$  auf

$\sum_{k=1}^t \chi(k) = 0$ . Man kann mithin annehmen, daß in  $(r, t) = (d)$  die positive Zahl  $d$  ein von 1 und  $t$  verschiedener Teiler von  $t$  sei:

$$r = r_1 d, \quad t = t_1 d; \quad (r_1, t_1) = (1), \quad t_1 > 1, \quad d > 1.$$

Für jede zu  $t$  teilerfremde Zahl  $q$ , welche  $\equiv 1 \pmod{t_1}$  ist, gilt dann

$$G(r, \chi) = \sum_{k=1}^t \chi(k) e^{\frac{2\pi i r_1}{t_1} k} = \sum_{k=1}^t \chi(qk) e^{\frac{2\pi i r_1}{t_1} qk} = \chi(q) \cdot G(r, \chi).$$

Zum indirekten Beweis kann man daher annehmen, daß für jedes so definierte  $q$  der Charakter  $\chi(q) \neq 1$  ist. Das führt auf einen Widerspruch zu der Voraussetzung, daß  $\chi$  ein *eigentlicher Charakter* ist.

In der Tat sei

$$a \equiv b \pmod{t_1}; \quad (a, t) = 1, \quad (b, t) = 1.$$

Es gibt ein zu  $t$  teilerfremdes  $c$ , so daß  $ca \equiv 1 \pmod{t}$  ist, und mithin  $\chi(c) \cdot \chi(a) = 1$ . Nach dem Modul  $t_1$  gelten die Kongruenzen

$$ca \equiv cb \equiv 1 \pmod{t_1}.$$

Folglich ist  $cb$  eine der Zahlen  $q$  und  $\chi(c)\chi(b) = +1$  und endlich  $\chi(a) = \chi(b)$ . Q. E. D. —

Die Formel

$$G(r, \chi) = \bar{\chi}(r) \cdot G(1, \chi) \quad (3)$$

ist mithin richtig, ob  $r$  zu  $t$  teilerfremd ist oder nicht.

Die zu  $G(r, \chi)$  konjugiert komplexe Größe ist

$$\sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) e^{-\frac{2\pi i r}{t} k} = G(-r, \bar{\chi}).$$

Wir bilden nun auf zwei Arten die Summe über die absoluten Beträge

$$\sum_{r=1}^t G(r, \chi) \cdot G(-r, \bar{\chi}).$$

Einerseits ist diese Summe vermöge dreimaliger Anwendung der Formel (3) gleich

$$\sum_{r=1}^t \bar{\chi}(r) \cdot G(1, \chi) \cdot \chi(r) \cdot G(-1, \bar{\chi}) = \varphi(t) \cdot G(1, \chi) \cdot G(-1, \bar{\chi}).$$

Andererseits ist sie gleich

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^t \left\{ \sum_{k=1}^t \chi(k) \cdot e^{\frac{2\pi i r}{t} k} \cdot \sum_{l=1}^t \bar{\chi}(l) \cdot e^{-\frac{2\pi i r}{t} l} \right\} = \\ &= \sum_{r=1}^t \sum_{k=1}^t \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)=1}}^t \chi(kl) \cdot \bar{\chi}(l) \cdot e^{\frac{2\pi i r}{t} l(k-1)} = \\ &= \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)=1}}^t \sum_{k=1}^t \chi(k) \sum_{r=1}^t e^{\frac{2\pi i l(k-1)}{t} r} = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)=1}}^t \chi(1) \cdot t = \varphi(t) \cdot t. \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir die wichtige Formel, die zu beweisen war:

$$G(1, \chi) \cdot G(-1, \bar{\chi}) = t. \quad (4)$$

Für  $\Re(s) > 1$  konvergiert Produkt und Summe absolut in

$$L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Wir multiplizieren das erste und dritte Glied dieser Gleichung mit  $G(1, \bar{\chi})$ , welche Größe wir verschieden umformen, je nachdem  $\chi(-1) = -1$  ist oder  $\chi(-1) = +1$ . Wir nehmen diese Reihenfolge, um weiter unten mit den Kummer'schen Bezeichnungen: «erster» und «zweiter» Klassenzahlfaktor übereinzustimmen. Einer der beiden Fälle muß eintreten, da  $\chi(-1) \cdot \chi(-1) = \chi(1) = +1$  ist.

Sei zunächst also  $\chi(-1) = -1$ , mithin  $\chi(-k) = -\chi(k)$  und  $\bar{\chi}(-k) = -\bar{\chi}(k)$ .

$$G(1, \bar{\chi}) = \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) e^{\frac{2\pi i}{t} k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \cdot \left\{ e^{\frac{2\pi i}{t} k} - e^{-\frac{2\pi i}{t} k} \right\} = i \cdot \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \sin \frac{2\pi}{t} k,$$

und, falls  $n$  teilerfremd ist zu  $t$ :

$$G(1, \bar{\chi}) = i \cdot \bar{\chi}(n) \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \sin \left( \frac{2\pi k}{t} \cdot n \right).$$

Mit dem Ausdrucke auf der rechten Seite dieser Gleichung multiplizieren wir den Term  $\frac{\chi(n)}{n^s}$  der  $L$ -Reihe:

$$G(1, \bar{\chi}) \cdot L(s, \chi) = i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^t \frac{\bar{\chi}(k) \sin \left( \frac{2\pi k}{t} \cdot n \right)}{n^s}$$

Hier wäre die Summe zunächst nur über die zu  $t$  teilerfremden  $n$  zu bilden. Aber die Formel bleibt auch ohne diese Einschränkung richtig; denn hat  $n$  mit  $t$  einen echten Teiler, so ist hier  $\frac{1}{n^s}$  mit

$$\begin{aligned} i \cdot \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \cdot \sin \left( \frac{2\pi k}{t} \cdot n \right) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \cdot \left\{ e^{\frac{2\pi i k}{t} \cdot n} - e^{-\frac{2\pi i k}{t} \cdot n} \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \cdot e^{\frac{2\pi i k}{t} \cdot n} = G(n, \bar{\chi}) = 0 \end{aligned}$$

(gemäß unserem Lemma) multipliziert.

Für  $\Re(s) > 1$  folgt wegen der absoluten Konvergenz

$$L(s, \chi) = \frac{i}{G(1, \bar{\chi})} \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left( \frac{2\pi k}{t} \cdot n \right)}{n^s}$$



und für  $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$   $[L^{(0)}(s, \chi) \equiv L(s, \chi)]$ :

$$\frac{d^\nu}{ds^\nu} L(s, \chi) \equiv L^{(\nu)}(s, \chi) = \frac{i}{G(1, \bar{\chi})} \cdot \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\log n)^\nu \sin\left(\frac{2\pi k}{t} \cdot n\right)}{n^s}; \quad (5)$$

$$\chi(-1) = -1.$$

Sei zweitens  $\chi(-1) = +1$ , mithin  $\chi(-k) = \chi(k)$  und  $\bar{\chi}(-k) = \bar{\chi}(k)$ . Dann ist:

$$G(1, \bar{\chi}) = \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) e^{\frac{2\pi i}{t} k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \left\{ e^{\frac{2\pi i}{t} k} + e^{-\frac{2\pi i}{t} k} \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \cos \frac{2\pi k}{t}, \text{ und, falls } n \text{ teilerfremd ist zu } t:$$

$$G(1, \bar{\chi}) = \bar{\chi}(n) \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \cos\left(\frac{2\pi k}{t} \cdot n\right).$$

Mit dem Ausdrucke auf der rechten Seite dieser Gleichung multiplizieren wir den Term  $\frac{\chi(n)}{n^s}$  der  $L$ -Reihe:

$$G(1, \bar{\chi}) \cdot L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^t \frac{\bar{\chi}(k) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{t} \cdot n\right)}{n^s}.$$

Hier wäre die Summe zunächst nur über die zu  $t$  teilerfremden  $n$  zu erstrecken. Aber die Formel bleibt wieder auch ohne diese Einschränkung richtig; denn hat  $n$  mit  $t$  einen echten Teiler, so ist hier  $\frac{1}{n^s}$  mit

$$\sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \cos\left(\frac{2\pi k}{t} \cdot n\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \cdot \left\{ e^{\frac{2\pi i k}{t} \cdot n} + e^{-\frac{2\pi i k}{t} \cdot n} \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \cdot e^{\frac{2\pi i k}{t} \cdot n} = G(n, \bar{\chi}) = 0$$

(gemäß unserem Lemma) multipliziert.

Für  $\Re(s) > 1$  folgt wegen der absoluten Konvergenz:

$$L(s, \chi) = \frac{1}{G(1, \bar{\chi})} \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi k}{t} \cdot n\right)}{n^s},$$

und für  $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$   $[L^{(0)}(s, \chi) \equiv L(s, \chi)]$ :

$$\frac{d^\nu}{ds^\nu} L(s, \chi) \equiv L^{(\nu)}(s, \chi) = \frac{1}{G(1, \bar{\chi})} \cdot \sum_{k=1}^t \bar{\chi}(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\log n)^\nu \cos\left(\frac{2\pi k}{t} \cdot n\right)}{n^s}; \quad (6)$$

$$\chi(-1) = +1.$$

Summiert man jede der beiden Formeln:

$$\begin{aligned} \cos(2n-1)\pi x - \cos(2n+1)\pi x &= 2 \sin \pi x \cdot \sin 2\pi n x \\ \sin(2n-1)\pi x - \sin(2n+1)\pi x &= -2 \sin \pi x \cdot \cos 2\pi n x \end{aligned}$$

über  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ , so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \cos \pi x - \cos(2N+1)\pi x &= 2 \sin \pi x \cdot \sum_{n=1}^N \sin 2\pi n x \\ \sin \pi x - \sin(2N+1)\pi x &= -2 \sin \pi x \cdot \sum_{n=1}^N \cos 2\pi n x. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Sei  $0 < \varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon$ , wo  $\varepsilon$  beliebig, aber genügend klein sein möge, so ergibt sich mithin sofort, daß die beiden Summen dem absoluten Betrage nach höchstens gleich dem reziproken Werte von  $\sin \pi \varepsilon$  sind.

Andererseits bildet  $\frac{(-\log n)^\nu}{n}$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$  eine, abgesehen von wenigen Anfangsgliedern monoton gegen Null strebende Folge. Auf Grund eines oft angewandten Schlusses aus der Reihenlehre convergieren daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\log n)^\nu \sin 2\pi n x}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\log n)^\nu \cos 2\pi n x}{n} \quad (8)$$

gleichmäßig im Intervall  $\varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon$ .

Da

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= L(1, \chi) + (s-1)L'(1, \chi) + \frac{(s-1)^2}{2} L''(1, \chi) + \dots \\ &\quad + \frac{(s-1)^\nu}{\nu!} L^{(\nu)}(1, \chi) + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

ist, so handelt es sich jetzt darum, die Reihen (8) in bekannte Funktionen, oder (falls dies nicht möglich) in neue bequemer berechenbare und wenn möglich differentierbare Funktionen überzuführen.

### § 3. Das erste Glied der Entwicklung der $L$ -Reihe nach Potenzen von $(s-1)$

Zur Bestimmung der Klassenzahl haben wir die rechten Seiten der Formeln (8) nur für  $\nu = 0$  umzuformen. Und dies ist ohne jede Integration oder Verwendung der Theorie der Fourier-Reihen in jedem der beiden Fälle möglich<sup>8)</sup>.

Sei  $0 < \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$ . Wir betrachten die beiden Funktionen:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin 2\pi n x}{n} + \pi \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\cos(2N+1)\pi x}{2N+1} \cdot \frac{1}{\sin \pi x}$$

$$C_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\cos 2\pi n x}{n} + \log 2 \sin \pi x - \frac{\sin(2N+1)\pi x}{2N+1} \cdot \frac{1}{\sin \pi x}$$

und differentieren sie unter Berücksichtigung von (7) nach  $x$ :

$$S'_N(x) = -\pi \frac{\cos(2N+1)\pi x}{2N+1} \cdot \frac{\cos \pi x}{\sin^2 \pi x}$$

$$C'_N(x) = +\pi \frac{\sin(2N+1)\pi x}{2N+1} \cdot \frac{\cos \pi x}{\sin^2 \pi x}.$$

Wir wenden auf  $S_N(x)$  und  $C_N(x)$  den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an, welcher aussagt, daß für jede Funktion  $F(x)$ , die in einem endlichen Intervall  $(a, b)$  stetig ist, und im Innern eine einzige Derivierte hat,

$$F(b) - F(a) = (b-a) \cdot F'(\xi),$$

wo  $\xi$  eine Zahl im Innern des Intervalles  $(a, b)$  bedeutet. Es sei  $b = x$  und  $a$  habe den Wert  $\frac{1}{2}$ . Es folgt:

$$\sum_{n=1}^N \frac{\sin 2\pi n x}{n} + \pi \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\cos(2N+1)\pi x}{(2N+1) \cdot \sin \pi x} = \left(x - \frac{1}{2}\right) S'_N(\xi');$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{\cos 2\pi n x}{n} + \log 2 \sin \pi x - \frac{\sin(2N+1)\pi x}{(2N+1) \sin \pi x} - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n} - \log 2$$

$$+ \frac{(-1)^N}{2N+1} = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot C'_N(\xi''),$$

<sup>8)</sup> Für die erste der beiden Funktionen vergleiche man: Cesàro, E., Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung, Leipzig 1904, pg. 304/305; Pringsheim, Math. Ann., Bd. 26, pg. 193 und die dort pg. 195 erwähnten Literaturangaben.

wo  $\xi'$  und  $\xi''$  jedenfalls im Innern des Intervalles  $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$  liegen. Lassen wir in beiden Formeln  $N$  über alle Grenzen wachsen, so folgt gleichmäßig in  $x$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2 \pi n x}{n} = \pi \left( \frac{1}{2} - x \right); \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2 \pi n x}{n} = -\log 2 \sin \pi x. \quad (11)$$

*Bemerkung:* Wir wollen hier ein für allemal vereinbaren, daß der Ausdruck

$$\chi(k) \cdot f(k)$$

gleich Null sein soll, auch wenn die Funktion  $f(x)$  für  $x = k$  nicht definiert ist oder unendlich groß wird, falls nur  $\chi(k) = 0$  ist.

Dann folgt aus (5) und (10), bzw. (6) und (11), immer, weil  $\chi$  ein (eigentlicher) *Nebencharakter* ist:

$$L(1, \chi) = \frac{i \pi}{G(1, \bar{\chi})} \sum_{k=1}^t -\bar{\chi}(k) \cdot \frac{k}{t}; \quad \chi(-1) = -1; \quad (12)$$

$$L(1, \chi) = \frac{2}{G(1, \bar{\chi})} \sum_{k=1}^{\frac{t}{2}} -\bar{\chi}(k) \cdot \log \sin \frac{\pi k}{t}; \quad \chi(-1) = +1. \quad (13)$$

Ist  $t$  ungerade, so soll die Summation in der zweiten dieser Summen natürlich so ausgeführt werden, daß man über alle ganzen rationalen positiven Zahlen, die kleiner sind als  $\frac{t}{2}$ , summiert.

*Corollar:* Die Ausdrücke der Formeln (12) und (13):

$$\sum_{k=1}^t -\chi(k) \frac{k}{t}, \text{ bzw. } \sum_{k=1}^{\frac{t}{2}} -\chi(k) \log \sin \frac{\pi k}{t},$$

wo  $\chi$ , wie immer, ein eigentlicher Nebencharakter mod.  $t$  ist, ändern sich nicht, wenn man  $t$  durch ein positiv ganzzahliges Vielfaches von  $t$  ersetzt.

In der Tat ist:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{Vt} -\chi(k) \frac{k}{Vt} &= \frac{1}{Vt} \sum_{j=0}^{V-1} \left\{ \sum_{k=1}^t -\chi(tj+k) \cdot (tj+k) \right\} = \\ &= \frac{1}{Vt} \sum_{j=0}^{V-1} \left\{ tj \cdot \sum_{k=1}^t -\chi(k) + \sum_{k=1}^t -\chi(k) \cdot k \right\}, \end{aligned}$$

also, da die erste innere Summe verschwindet und die zweite innere Summe nicht von  $j$  abhängt:

$$= \sum_{k=1}^t -\chi(k) \cdot \frac{k}{t}, \text{ Q. E. D.}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\frac{Vt}{2}} -\chi(k) \log \sin \frac{\pi k}{Vt} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{Vt} -\chi(k) \log \left| \sin \frac{\pi k}{Vt} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{Vt} -\chi(k) \log \left| 2 \sin \frac{\pi k}{Vt} \right| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{Vt} -\chi(k) \log \left| 1 - e^{\frac{2\pi i k}{Vt}} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{V-1} \left\{ \sum_{k=1}^t -\chi(tj+k) \cdot \log \left| 1 - e^{\frac{2\pi i (tj+k)}{Vt}} \right| \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t \left\{ -\chi(k) \sum_{j=0}^{V-1} \log \left| 1 - e^{\frac{2\pi i j}{V}} \cdot e^{\frac{2\pi i k}{Vt}} \right| \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t -\chi(k) \log \left| 1 - e^{\frac{2\pi i k}{t}} \right| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t -\chi(k) \log \left| 2 \sin \frac{\pi k}{t} \right| = \\ &= \sum_{k=1}^{\left(\frac{t}{2}\right)} -\chi(k) \log \sin \frac{\pi k}{t}. \end{aligned}$$

Q. E. D.

#### § 4. Das zweite Glied der Entwicklung der $L$ -Reihen nach Potenzen von $(s-1)$

Zur Bestimmung der Kronecker'schen Grenzformel haben wir noch die rechten Seiten der Formeln (8) für  $\nu = 1$  umzuformen. Dazu bedienen wir uns der Theorie der Fourier-Reihen. Für die erste der beiden Formeln (8) kann man auf eine bekannte Formel von Kummer (vgl. Crelle, Bd. 35, pg. 1-4) zurückgreifen, die wir in etwas geänderter Form anschreiben. Sei  $0 < \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$ , so ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log n \sin 2n\pi x}{n} = \frac{\pi}{2} \log \frac{\Gamma(1-x)}{\Gamma(x)} + \pi \left(\frac{1}{2} - x\right) \cdot (E + \log 2\pi). \quad (14)$$

Für den Fall der zweiten der Formeln (8) wollen wir wieder für  $0 < \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$  die Reihe<sup>9)</sup>:

$$\begin{aligned} \Phi_r(x) \equiv C_r + & \left\{ \log x - \log \frac{1}{2} \right\} + \left\{ \log(1-x) - \log \frac{1}{2} \right\} + \\ & + \left\{ \log(1+x) - \log \frac{3}{2} \right\} + \left\{ \log(2-x) - \log \frac{3}{2} \right\} + \\ & + \left\{ \log(2+x) - \log \frac{5}{2} \right\} + \left\{ \log(3-x) - \log \frac{5}{2} \right\} + \quad (15) \\ & + \left\{ \log(3+x) - \log \frac{7}{2} \right\} + \left\{ \log(4-x) - \log \frac{7}{2} \right\} + \\ & + \dots \text{ ad infinitum,} \end{aligned}$$

ins Auge fassen. Hier ist  $r \geq 1$  ganz rational,  $C_r$  eine Zahlkonstante, über die wir noch verfügen werden.

Sei  $0 \leq x < \frac{1}{2}$ . Dann zeigt die Folge der Relationen:

$$\begin{aligned} - \left\{ \log(n+x) - \log\left(n+\frac{1}{2}\right) \right\} &= (r+1) \left(\frac{1}{2}-x\right) \cdot \frac{\log(n+\xi)}{n+\xi}; \quad 0 < \xi < \frac{1}{2}; \\ + \left\{ \log(n+1-x) - \log\left(n+\frac{1}{2}\right) \right\} &= (r+1) \left(\frac{1}{2}-x\right) \cdot \frac{\log(n+\frac{1}{2}+\xi')}{n+\frac{1}{2}+\xi'}; \quad 0 < \xi' < \frac{1}{2}; \\ - \left\{ \log(n+1+x) - \log\left(n+\frac{3}{2}\right) \right\} &= (r+1) \left(\frac{1}{2}-x\right) \cdot \frac{\log(n+1+\xi'')}{n+1+\xi''}; \quad 0 < \xi'' < \frac{1}{2}; \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

daß

$$\Phi_r(x) - C_r = \left\{ \log x - \log \frac{1}{2} \right\} - \left\{ \log(1-x) - \log \frac{1}{2} \right\} \quad (16)$$

eine Reihe ist, deren Glieder, abgesehen von wenigen, endlich vielen Anfangsgliedern, abwechselnd positiv und negativ sind, und dem absoluten Betrage nach eine abnehmende Folge bilden, die nach Null konvergiert. Folglich ist die Reihe (16) in  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  zwar bedingt, aber gleichmäßig konvergent. Weil die Vertauschung je eines Paares direkt aufeinander folgender Glieder der Reihe an der Konvergenz nichts ändert und auch nichts am Grenzwert der Reihe, welcher nur in etwas

<sup>9)</sup> Zur Konstruktion dieser Reihen bin ich gelangt durch das Studium der Arbeit von Hermann Kinkelin, Allgemeine Theorie der harmonischen Reihen mit Anwendung auf die Zahlentheorie. Basel 1862; Programm der Gewerbeschule in Basel für das Jahr 1862, auch Sonderdruck.

anderer Art erreicht wird, ist (16) sogar in  $0 \leq x \leq 1$  gleichmäßig konvergent. Für  $0 < \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$  ist

$$\Phi_r(1-x) = \Phi_r(x),$$

und ferner ist

$$\Phi_r\left(\frac{1}{2}\right) = C_r.$$

Die Funktion

$$\left\{ \log^{r+1}(n+x) - \log^{r+1}\left(n+\frac{1}{2}\right) \right\} + \left\{ \log^{r+1}(n+1-x) - \log^{r+1}\left(n+\frac{1}{2}\right) \right\},$$

wo  $n \geq N$  und  $N$  schon genügend groß gewählt sei, ist im Intervall  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  monoton wachsend. Denn ihre Derivierte:

$$(r+1) \left\{ \frac{\log^r(n+x)}{n+x} - \frac{\log^r(n+1-x)}{n+1-x} \right\}$$

ist im Innern des Intervalles positiv. Dasselbe gilt mithin in  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  von der Reihe

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left[ \left\{ \log^{r+1}(n+x) - \log^{r+1}\left(n+\frac{1}{2}\right) \right\} + \left\{ \log^{r+1}(n+1-x) - \log^{r+1}\left(n+\frac{1}{2}\right) \right\} \right]$$

und (16) ist daher in  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  als Summe von endlich vielen Funktionen von beschränkter Variation selbst von beschränkter Variation. Offensichtlich gilt dasselbe für die Reihe (16) in  $0 \leq x \leq 1$ . Endlich beachte man, daß

$$\int_0^1 \left| \log^{r+1} x \right| \cdot dx = (-1)^{r+1} \int_0^1 \log^{r+1} x \, dx$$

existiert. Nach bekannten Sätzen (vgl. H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris 1906, pg. 73/74; Picard, *traité d'analyse*, 3. édition, Paris 1927, t. I, pg. 329) stellt daher die Fourier-Entwicklung von  $\Phi_r(x)$  die Funktion  $\Phi_r(x)$  dar in  $0 < \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$ , wo  $\varepsilon$ , wie immer, beliebig, aber genügend klein. Man erhält für  $r = 1, 2, 3, \dots$  bzw. successive die gesuchten Fourier-Reihen der zweiten der Formeln (8) bzw. für  $\nu = 1, 2, 3, \dots$

Für die Kronecker'sche Grenzformel brauchen wir nur die Fourier-Reihe, für welche  $\nu = 1$  ist, und die man aus  $\Phi_1(x)$  erhält. In der Tat ergibt sich wegen der Stetigkeit von  $\Phi_1(x)$  im angegebenen Intervall:

$$\Phi_1(x) = A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos 2n\pi x; \quad 0 < \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon,$$

wobei

$$A_n = \int_0^1 \Phi_1(x) \cos 2n\pi x \cdot dx.$$

Sei  $n \geq 1$ , so ist

$$A_n = \lim_{K=\infty} \int_0^1 \left[ \left\{ \log^2 x - \log^2 \frac{1}{2} \right\} + \left\{ \log^2 (1-x) - \log^2 \frac{1}{2} \right\} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^K \left[ \left\{ \log^2 (k+x) - \log^2 \left(k + \frac{1}{2}\right) \right\} + \left\{ \log^2 (1+k-x) - \log^2 \left(k + \frac{1}{2}\right) \right\} \right] \right] \\ \cos 2n\pi x \cdot dx,$$

also wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (16) in  $0 \leq x \leq 1$ :

$$A_n = 2 \int_0^1 \log^2 x \cdot \cos 2n\pi x \, dx + 2 \lim_{K=\infty} \sum_{k=1}^K \int_0^1 \log^2 (k+x) \cos 2n\pi x \, dx,$$

oder, falls  $k+x=t$  gesetzt wird im Integral:

$$A_n = 2 \lim_{K=\infty} \sum_{k=0}^K \int_k^{k+1} \log^2 t \cdot \cos 2n\pi t \, dt = \frac{1}{n\pi} \lim_{K=\infty} \sum_{k=0}^K \int_k^{k+1} \log^2 t \cdot d \sin 2n\pi t.$$

$$A_n = \frac{1}{n\pi} \lim_{K=\infty} \sum_{k=0}^K \left\{ \log^2 t \sin 2n\pi t \Big|_k^{k+1} - 2 \int_k^{k+1} \frac{\log t}{t} \sin 2n\pi t \, dt \right\}.$$

$$A_n = -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\infty} \frac{\log t}{t} \sin 2n\pi t \, dt.$$

Wir setzen im letzten Integral  $2n\pi t = x$ ; dann erhalten wir:

$$A_n = -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x} \sin x \, dx + \frac{2}{n\pi} \log 2n\pi \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Nun gilt für  $0 < s < 2$  die Formel [vgl. z. B. das in der Anmerkung<sup>(8)</sup> erwähnte Lehrbuch von Cesàro, pg. 781]:



$$f(s) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^s} dx = \frac{\pi}{2 \Gamma(s) \sin \frac{s\pi}{2}}.$$

Folglich ist  $f(1) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$  und

$$f'(1) = - \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x} \sin x dx = - \frac{\pi}{2} \Gamma'(1) = \frac{\pi}{2} E. \quad 10)$$

Mithin ist

$$A_n = \frac{E + \log 2\pi}{n} + \frac{\log n}{n},$$

und für  $0 < \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$ :

$$\Phi_1(x) = \int_0^1 \Phi_1(x) dx + 2(E + \log 2\pi) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n \cos 2n\pi x}{n}. \quad (17)$$

Die Constante  $\int_0^1 \Phi_1(x) dx$  ergibt sich aus der Bedingung  $\Phi_1\left(\frac{1}{2}\right) = C_1$  als willkürlich. Sie ist auch für uns im folgenden ohne Bedeutung, da sie bei der Summation über die Nebencharakter-Argumente herausfällt. Setzt man:

$$C_1 = -\log 2 \cdot \log 8\pi^2, \quad (18)$$

so wird sie gleich Null:

$$\int_0^1 \Phi_1(x) dx = 0.$$

Dies ergibt sich, wenn man in (17) das Argument  $x = \frac{1}{2}$  setzt und die Entwicklung nach Potenzen von  $(s-1)$  beider Seiten der Identität:

$$(1 - e^{-(s-1)\log 2}) \cdot \zeta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \dots$$

heranzieht. Man vergleiche die Entwicklung von  $\zeta(s)$  nach Potenzen von  $(s-1)$  am Anfang von § 2, Formel (2).

<sup>10)</sup> Die Derivierten  $f''(1)$ ,  $f'''(1)$ , ... treten bei der Fourier-Entwicklung von  $\Phi_2(x)$ ,  $\Phi_3(x)$ , ... auf.

Diese Normierung für  $C_1$  empfiehlt sich, weil dann die Funktion  $\Phi_1(x)$  der Funktionalgleichung genügt<sup>11)</sup>

$$\sum_{t=0}^{M-1} \Phi_1\left(x + \frac{t}{M}\right) = \Phi_1(Mx) - 2 \log M \cdot \log(2 \sin M\pi x);$$

$M$  beliebig ganz rational und positiv;  $0 < \varepsilon \leq Mx \leq 1 - \varepsilon$ .

Unter Berücksichtigung von (11), (15) und (18) ergibt sich jetzt als Pendant zur Formel (14) für  $0 < \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log n \cdot \cos 2n\pi x}{n} = -\frac{1}{2} \Phi_1(x) - (E + \log 2\pi) \cdot \log(2 \sin \pi x). \quad (19)$$

Mithin wird, unter Berücksichtigung einer pg. 172 getroffenen Vereinbarung, falls  $\chi(-1) = -1$  ist [vgl. Formeln (5) und (14)]:

$$L'(1, \chi) = \frac{i}{G(1, \bar{\chi})} \left\{ \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^t -\bar{\chi}(k) \log \frac{\Gamma\left(\frac{k}{t}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{k}{t}\right)} + \frac{\pi}{t} (E + \log 2\pi) \sum_{k=1}^t -\bar{\chi}(k) \cdot k \right\};$$

und, falls  $\chi(-1) = +1$  ist [vgl. Formeln (6) und (19)]:

$$L'(1, \chi) = \frac{1}{G(1, \bar{\chi})} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{t}{2}} -\bar{\chi}(k) \Phi_1\left(\frac{k}{t}\right) + 2(E + \log 2\pi) \sum_{k=1}^{\frac{t}{2}} -\bar{\chi}(k) \cdot \log \sin \frac{\pi k}{t} \right\}.$$

Im folgenden werden wir nur die Quotienten brauchen:

$$\chi(-1) = -1: \quad \frac{L'(1, \chi)}{L(1, \chi)} = E + \log 2\pi + \frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^t -\bar{\chi}(k) \log \frac{\Gamma\left(\frac{k}{t}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{k}{t}\right)}}{\sum_{k=1}^t -\bar{\chi}(k) \frac{k}{t}}. \quad (20)$$

$$\chi(-1) = +1: \quad \frac{L'(1, \chi)}{L(1, \chi)} = E + \log 2\pi + \frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^{\frac{t}{2}} -\bar{\chi}(k) \Phi_1\left(\frac{k}{t}\right)}{\sum_{k=1}^{\frac{t}{2}} -\bar{\chi}(k) \log \sin \frac{\pi k}{t}}. \quad (21)$$

<sup>11)</sup> Für  $M=2$  findet sich diese evidente Funktionalgleichung, natürlich ohne den Ausdruck (15) schon bei E. Landau; Crelle, Bd. 125, pg. 181. Selbstverständlich geht man zu ihrer Ableitung von der Formel (19) aus. Die analoge Funktionalgleichung für  $\log \Gamma(x)$  findet sich in der eingangs dieses § erwähnten Note von E. E. Kummer.

Tafeln für  $\log \Gamma(X)$  für alle Werte von  $X$  von 1000stel zu 1000stel für  $X=1$  bis  $X=2$  finden sich in Legendre, traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes, t. II, Paris 1826, pg. 489 sqq. Für  $x = X-1$  ist ferner  $\log \Gamma(x) = \log \Gamma(X) - \log x$ .

Als alternierende Reihe ist  $\Phi_1(x)$  bis auf eine gewisse Genauigkeit leicht berechenbar. Ferner ist  $\Phi_1(x)$  in  $0 < \varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon$  gliedweise differentierbar.

## II. Kapitel. Die Zetafunktion, die Kronecker'sche Grenzformel und die Klassenzahl der Ausgangs-Kreiskörper

### § 5. Die Zetafunktion der Ausgangs-Kreiskörper

Es seien  $l_1, l_2, \dots, l_R$  im Ganzen  $R \geq 1$  von einander verschiedene ungerade Primzahlen. Wir betrachten den Körper  $K\left(e^{\frac{2\pi i}{\bar{m}}}\right)$  der  $\bar{m}$ -ten Einheitswurzel, wo  $\bar{m} = l_1^{h_1} \cdot l_2^{h_2} \dots l_R^{h_R}$ . Sein Grad ist

$$\varphi(\bar{m}) = \varphi(l_1^{h_1}) \cdot \varphi(l_2^{h_2}) \cdot \dots \cdot \varphi(l_R^{h_R}).$$

Er entsteht durch Kombination der  $R$  Körper der  $l_r^{h_r}$ -ten Einheitswurzeln.  $r$  bedeute immer eine der Zahlen  $1, 2, \dots, R$ . (Hilbert, § 97). Es sei

$$c_1 = a_1 \cdot l_1^{h_1-1}, \quad c_2 = a_2 \cdot l_2^{h_2-1}, \quad \dots \quad c_R = a_R \cdot l_R^{h_R-1},$$

ferner  $a_r$  ein Teiler von  $(l_r - 1)$  und  $a_r b_r = l_r - 1$ . Wir betrachten den Körper  $k$ , der durch Zusammensetzung der  $R$  Unterkörper vom Grade  $c_r$  der Körper der  $l_r^{h_r}$ -ten Einheitswurzel entsteht. Sein Grad  $\bar{G}$  ist, da die Diskriminanten dieser Unterkörper teilerfremd sind zueinander (Hilbert, Theorem 87):

$$\bar{G} = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_R = \frac{\varphi(\bar{m})}{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_R}.$$

Sind alle  $b_r = 1$ , so ist  $k$  identisch mit  $K\left(e^{\frac{2\pi i}{\bar{m}}}\right)$ . In jedem Falle erhält man auf diese Weise den allgemeinsten, nach diesem Prinzip zusammengesetzten Kreiskörper von ungerader Diskriminante. Wir nennen einen solchen Körper «Ausgangs»-Kreiskörper. Denn wäre der Grad eines Unterkörpers der  $l_r^{h_r}$ -ten Einheitswurzel von der Form

$$c_r = a_r \cdot l_r^{h_r - h_r^* - 1}, \text{ wo } 1 \leq h_r - h_r^* \leq h_r - 1,$$

so könnte man vom Körper der  $\overline{m}$ ten Einheitswurzel ausgehen, wo  $\overline{m} \cdot l_r^{h^*r} = \overline{m}$  ist.

Es sei  $Z_r = e^{\frac{2\pi i}{l_r^{h_r}}}$ , ferner  $g_r$  eine ein für allemal fest gewählte Primivwurzel mod.  $l_r^{h_r}$ , die überdies so gewählt sei, daß

$$g_r \equiv 1 \pmod{\frac{2m}{l_r^{h_r}}}$$

Es bedeute  $s_r$  die Substitution

$$s_r Z_r = Z_r^g.$$

## Endlich bedeute

$$s_r Z_k = Z_k, \text{ falls } r \neq k \text{ ist.}$$

Jede ganze Zahl  $A$  des Körpers der  $\overline{m}$  ten Einheitswurzel kann so dargestellt werden (Hilbert, § 94):

$$A = P (Z_1, Z_2, \dots Z_R),$$

wo  $P(x_1, x_2, \dots, x_R)$  hier und im folgenden generell ein Polynom mit ganzzahlig rationalen Koeffizienten der unabhängigen Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_R$  bedeutet.

Die zu  $A$  algebraisch konjugierten Zahlen sind dann die Zahlen:

$$s_1^{n_1} \cdot s_2^{n_2} \cdot \dots \cdot s_R^{n_R} A = P(s_1^{n_1} Z_1, s_2^{n_2} Z_2, \dots, s_R^{n_R} Z_R),$$

wo  $0 \leq n_r \leq l_r^{h_r-1} (l_r - 1) - 1$ .

Alle Zahlen des Körpers der  $\overline{m}$  ten Einheitswurzel, die invariant sind unter den Substitutionen:

$$\left. \begin{array}{l} s_1^{c_1}, s_1^{2c_1}, \dots s_1^{(l_1-1) l_1} h_1^{-1} \\ s_2^{c_2}, s_2^{2c_2}, \dots s_2^{(l_2-1) l_2} h_2^{-1} \\ . . . . . \\ s_R^{c_R}, s_R^{2c_R}, \dots s_R^{(l_R-1) l_R} h_R^{-1} \end{array} \right\} \quad (22)$$

bilden dann den Unterkörper  $k$ .

Ist  $\alpha$  eine ganze Zahl von  $k$ , so ist dann immer noch

$$\alpha = P(Z_1, Z_2, \dots, Z_R), \quad (23)$$

und die zu  $\alpha$  in bezug auf  $k$  algebraisch conjugierten Zahlen sind dann die Zahlen

$$s_1^{n_1} s_2^{n_2} \dots s_R^{n_R} \alpha; \quad 0 \leq n_r \leq c_r - 1, \quad r = 1, 2, \dots, R.$$

Wir untersuchen jetzt die Zerlegung der zu  $\overline{m}$  teilerfremden Primzahlen  $p$  im Körper  $k$ . Es ist für ein beliebiges ganzes rationales und positives  $F$  nach dem Modul  $p$ , wegen des Fermat'schen Satzes:

$$\begin{aligned} \alpha p^F &\equiv P(Z_1 p^F, Z_2 p^F, \dots, Z_R p^F) \\ &\equiv P(s_1^{F \text{ind}_1 p} Z_1, s_2^{F \text{ind}_2 p} Z_2, \dots, s_R^{F \text{ind}_R p} Z_R) \\ &\equiv s_1^{F \text{ind}_1 p} s_2^{F \text{ind}_2 p} \dots s_R^{F \text{ind}_R p} P(Z_1, Z_2, \dots, Z_R) \\ &\equiv s_1^{F \text{ind}_1 p} s_2^{F \text{ind}_2 p} \dots s_R^{F \text{ind}_R p} \alpha \pmod{p}. \end{aligned} \quad (24)$$

Hiebei hat  $P$  natürlich die gleiche Bedeutung wie in (23).

Ist  $f$  die kleinste positive ganze rationale Zahl, für welche alle  $R$  simultanen Kongruenzen

$$f \cdot \text{ind}_r p \equiv 0 \pmod{c_r}, \quad r = 1, 2, \dots, R$$

erfüllt sind, so ist, weil  $\alpha$  zu  $k$  gehört:

$$\alpha p^f \equiv \alpha \pmod{p},$$

und folglich für jedes Primideal  $\mathfrak{p}$ , welches  $p$  teilt

$$\alpha p^f \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}}. \quad (25)$$

Ist  $f'$  der Grad von  $p$ :

$$n(\mathfrak{p}) = p^{f'}$$

so ist für jede ganze Zahl  $\alpha$  von  $k$  nach dem Fermat'schen Satze:

$$\alpha p^{f'} \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}}. \quad (26)$$

Es ist mithin  $f' \leq f$ , weil die Kongruenz (25) von jeder der  $p^{f'}$  Restklassen von  $p$  erfüllt ist.

Wir behaupten  $f' = f$ . Denn sei zum indirekten Beweise  $f' < f$ , so wäre gemäß (24) a fortiori mod.  $p$  und nach (26) für jede ganze Zahl  $\alpha$  von  $k$ :

$$\alpha p^{f'} \equiv s_1 f' \text{ ind}_1 p \ s_2 f' \text{ ind}_2 p \ \dots \ s_R f' \text{ ind}_R p \ \alpha \equiv \alpha \pmod{p}. \quad (27)$$

Die Substitution

$$s_1 f' \text{ ind}_1 p \ s_2 f' \text{ ind}_2 p \ \dots \ s_R f' \text{ ind}_R p$$

gehört aber gewiß zur Galois'schen Gruppe des Körpers  $k$  und ist von der Identität verschieden. Denn es widerspräche der Definition von  $f$ , falls für  $r = 1, 2, 3, \dots R$

$$f' \text{ ind}_r p \equiv 0 \pmod{c_r}$$

gelten würde für ein  $f' < f$ . Da (27) für *jede* ganze Zahl  $\alpha = \alpha_i$  von  $k$  gilt, so wäre das Element:

$$\left( (\alpha_1 - s_1 f' \text{ ind}_1 p \ s_2 f' \text{ ind}_2 p \ \dots \ s_R f' \text{ ind}_R p \ \alpha_1), \right. \\ \left. (\alpha_2 - s_1 f' \text{ ind}_1 p \ s_2 f' \text{ ind}_2 p \ \dots \ s_R f' \text{ ind}_R p \ \alpha_2), \ \dots \right)$$

durch  $p$  teilbar. Dann wäre auch die Körperdifferente von  $k$ , also auch die von  $K\left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)$ , und folglich auch die Körperdiskriminante von  $K\left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)$  durch  $p$  teilbar. Das ist aber ein Widerspruch (Hilbert, Theoreme 85 und 121).

Es gilt mithin der Satz: Ist  $f$  die kleinste positive ganze rationale Zahl, für welche alle  $R$  simultanen Kongruenzen

$$f \cdot \text{ind}_r p \equiv 0 \pmod{c_r}; \quad r = 1, 2, \dots R; \quad (28)$$

befriedigt sind, ferner  $e = \frac{\overline{G}}{f}$ , so zerfällt eine zu  $\overline{m}$  teilerfremde Primzahl  $p$  in  $e$  voneinander verschiedene Primideale  $f$  ten Grades <sup>12)</sup>.

<sup>12)</sup> Einen anderen Beweis zu diesem Satze im Falle des vollen Kreiskörpers siehe in Hilbert, Beweis zu Theorem 125.

Denn da  $p$  zur Körperdiskriminante teilerfremd ist, so kann kein  $p$  in höherer als erster Potenz in  $p$  aufgehen.

Daraus folgt

$$\prod_{p|p} (1 - n(p)^{-s})^{-1} = \prod_{\chi} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}, \quad (29)$$

wo auf der linken Seite  $p$  alle voneinander verschiedenen Primteiler  $p$  in  $k$  von  $p$  durchläuft, und  $\chi$  auf der rechten Seite alle eigentlichen Charaktere, welche den  $\bar{G}$  Charakteren

$$X_1^{n_1} b_1 \cdot X_2^{n_2} b_2 \cdot \dots \cdot X_R^{n_R} b_R; \quad 0 \leq n_r \leq c_r - 1; \quad (30)$$

zugeordnet sind. Hier bedeutet ( $r = 1, 2, \dots, R$ ):

$$X_r(g_r) = \chi_r(g_r) = e^{\frac{2\pi i}{\varphi(l_r^{h_r})}}$$

einen bestimmten erzeugenden Charakter mod.  $l_r^{h_r}$ .

Da  $p$  zu  $\bar{m}$  teilerfremd ist, haben die den Charakteren (30) zugeordneten *eigentlichen* Charaktere für das Argument  $p$  den gleichen Wert wie die uneigentlichen Charaktere. Jeder Charakter

$$X_1^{n_1} b_1(p) \cdot X_2^{n_2} b_2(p) \cdot \dots \cdot X_R^{n_R} b_R(p); \quad 0 \leq n_r \leq c_r - 1; \quad (31)$$

ist eine  $f$ te Einheitswurzel, denn

$$e^{f \cdot 2\pi i \left\{ \frac{n_1 \text{ind}_1 p}{c_1} + \frac{n_2 \text{ind}_2 p}{c_2} + \dots + \frac{n_R \text{ind}_R p}{c_R} \right\}} = 1,$$

wegen der Kongruenzen (28). Es gibt auch keine kleinere positive Zahl  $f'' < f$ , sodaß *alle* Charaktere (31)  $f''$ te Einheitswurzeln sind. Denn dann wäre für alle Wertesysteme der  $n_r$ :

$$e^{f'' \cdot 2\pi i \left\{ \frac{n_1 \text{ind}_1 p}{c_1} + \frac{n_2 \text{ind}_2 p}{c_2} + \dots + \frac{n_R \text{ind}_R p}{c_R} \right\}} = 1.$$

Für jedes  $r = 1, 2, \dots, R$  würde für:  $n_r = 1; n_1 = n_2 = \dots = n_{r-1} = n_{r+1} = \dots = n_R = 0$

$$f'' \text{ind}_r p \equiv 0 \pmod{c_r}$$

folgen. Das ist aber ein Widerspruch gegen die Definition von  $f$ . Da aber die Charaktere (30) eine Gruppe (vom Grade  $\overline{G}$ ) bilden, so kommt jede  $f$  te Einheitswurzel gleich oft vor (Hecke, Satz 32, pg. 35). Mithin ist die rechte Seite von (29) gleich

$$(1 - p^{-sf})^{-\frac{\overline{G}}{f}} = (1 - p^{-sf})^{-e}.$$

Den gleichen Wert hat aber auf Grund des Satzes pg. 182 auch die linke Seite von (29).

Wir untersuchen jetzt die Zerlegung des in  $\overline{m}$  aufgehenden Primteilers  $l_R = l$ . Im Unterkörper  $k^*$  von  $k$ , welcher aus allen  $R - 1$  Unterkörpern der Grade  $c_1, c_2, \dots, c_{R-1}$  zusammengesetzt ist, ist die Zerlegung von  $l$  auf Grund unserer bisherigen Ausführungen bekannt: Ist  $f^*$  die kleinste positive ganze rationale Zahl, für welche simultan alle  $(R - 1)$  Kongruenzen

$$f^* \text{ ind}_r l \equiv 0 \pmod{c_r}, \text{ wo } r = 1, 2, \dots, \underline{R - 1},$$

erfüllt sind, ferner  $e^* = \frac{\overline{G}}{c_R f^*}$ , so zerfällt  $l$  in  $e^*$  voneinander verschiedene Primideale  $f^*$  ten Grades:

$$l = l_1^* \cdot l_2^* \cdot \dots \cdot l_{e^*}^*.$$

Im Unterkörper  $\overline{k}$  vom Grade  $c_R$  des Körpers der  $l^h$  ten Einheitswurzel ist  $l$  die  $c_R$  te Potenz eines Primideales  $\overline{l}$ :

$$l = \overline{l}^{c_R}.$$

Denn es gibt im Körper  $\overline{K} = K\left(e^{\frac{2\pi i}{l^h}}\right)$  nur *ein* Primideal, und zwar ersten Grades  $\overline{\mathfrak{L}}$ , welches in  $l$  aufgeht, und also in der  $(l - 1) l^{h-1}$  ten Potenz

$$l = \overline{\mathfrak{L}}^{(l-1) l^{h-1}},$$

(Hilbert, Theorem 120). Folglich gibt es in  $\overline{k}$  auch nur ein Primideal  $\overline{l}$ , das in  $l$  aufgeht, und zwar in der  $c_R$  ten Potenz. Denn wenn diese Potenz vom Körpergrad von  $\overline{k}$  verschieden wäre, so müßte für einen



gewissen Relativkörper ein Primideal  $\bar{\bar{\mathfrak{L}}}$  des Oberkörpers (der seinerseits Unterkörper von  $\bar{K}$  ist), in höherer Potenz in einem Primideal  $\bar{\mathfrak{I}}$  des Unterkörpers aufgehen, als der Relativgrad beträgt.

Aus der Darstellung

$$\mathfrak{l}_1^* \cdot \mathfrak{l}_2^* \cdot \dots \cdot \mathfrak{l}_{e^*}^* = \bar{\mathfrak{I}}^{c_R} = \mathfrak{l}$$

folgt, daß die Ideale  $\mathfrak{l}_i^*$  nicht teilerfremd sind zu  $\bar{\mathfrak{I}}$ . Man muß sich nur daran erinnern, daß ein Ideal die Vielfachen einer bestimmten ganzen *Zahl* repräsentiert, welche Zahl allerdings in einem Oberkörper liegt, falls ein Ideal nicht Hauptideal ist. Es sei

$$\mathfrak{l}_i = (\mathfrak{l}_i^*, \bar{\mathfrak{I}}); \text{ (für } i = 1, 2, \dots, e^*),$$

der größte gemeinschaftliche Teiler von  $\mathfrak{l}_i^*$  und  $\bar{\mathfrak{I}}$ , aufgefaßt als Ideal in  $k$ . Das Ideal  $\mathfrak{l}_i$  ist vom Einheitsideale in  $k$  verschieden. Jedes dieser Ideale geht in  $\mathfrak{l}$  in genau  $c_R$  ter Potenz auf, mithin ist

$$\mathfrak{l} = \left\{ \mathfrak{l}_1 \cdot \mathfrak{l}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{l}_{e^*} \right\}^{c_R}.$$

Es kann auf der rechten Seite dieser Gleichung kein weiterer vom Einheitsideal verschiedener Idealfaktor auftreten, und die  $\mathfrak{l}_i$ , wo  $i = 1, 2, \dots, e^*$ , sind *Primideale*.

*Beweis:* Es sei in Primideal-Darstellung in  $k$ :

$$\mathfrak{l}_1 \cdot \mathfrak{l}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{l}_{e^*} = \mathfrak{l}_{(1)}^{A_1} \cdot \mathfrak{l}_{(2)}^{A_2} \cdot \dots \cdot \mathfrak{l}_{(E)}^{A_E}, \text{ wo } E \geq e^*, A_i \geq 1, \text{ für } i = 1, 2, \dots, E.$$

Es sei ebenso in Primidealdarstellung in  $k$ :

$$\mathfrak{l} = \left\{ \mathfrak{l}_{(1)}^{A_1} \cdot \mathfrak{l}_{(2)}^{A_2} \cdot \dots \cdot \mathfrak{l}_{(E)}^{A_E} \right\}^{c_R} \cdot \mathfrak{l}_{(1)}^{B_1} \cdot \mathfrak{l}_{(2)}^{B_2} \cdot \dots \cdot \mathfrak{l}_{(E)}^{B_E} \cdot \mathfrak{l}_{(E+1)}^{B_{E+1}} \cdot \dots \cdot \mathfrak{l}_{(H)}^{B_H},$$

wo  $H \geq E$  und  $B_j \geq 0$ , falls  $j = 1, 2, \dots, E$ ;

$$B_j \geq 1, \text{ falls } j = E+1, E+2, \dots, H.$$

Der Grad des Ideals  $\mathfrak{l}_i^*$  in  $k^*$ , wo  $i = 1, 2, \dots, e^*$ , ist gleich  $f^*$ , und der Grad jedes in  $k$  liegenden Idealteilers ein Vielfaches  $V_i$  von  $f^*$ . Normenbildung in  $k$  ergibt mithin

$$\begin{aligned} \mathfrak{l} \bar{G} = \mathfrak{l} f^* c_R (V_1 A_1 + V_2 A_2 + \dots + V_E A_E) + f^* (V_1 B_1 + V_2 B_2 + \dots + V_E B_E) + \\ + V_{E+1} B_{E+1} + \dots + V_H B_H. \end{aligned}$$

Nun ist  $\bar{G} = f^* \cdot e^* \cdot c_R$ . Folglich müssen, da alle Summanden des Exponenten der rechten Seite nicht negativ sind, alle  $V$  gleich 1 sein und  $H = E = e^*$ , ferner  $A_1 = A_2 = \dots = A_{e^*} = 1$ , endlich  $B_1 = B_2 = \dots = B_{e^*} = 0$ . Q. E. D.

Es ist auch

$$\prod_{1 \mid l} (1 - n(l)^{-s})^{-1} = \prod_{\chi} (1 - \chi(l) l^{-s})^{-1}, \quad (32)$$

wo  $l$  auf der linken Seite alle voneinander verschiedenen Primideale  $l$  von  $k$  durchläuft, die  $l$  teilen und  $\chi$  auf der rechten Seite alle eigentlichen Charaktere, die den Charakteren (30) zugeordnet sind. Denn  $\chi(l)$  ist immer gleich Null, außer wenn  $n_R = 0$  ist. Die Charaktere

$$X_1^{n_1} b_1 X_2^{n_2} b_2 \dots X_{R-1}^{n_{R-1}} b_{R-1} \quad (33)$$

bilden aber eine Untergruppe der Charaktere (30). Für das Argument  $l = l_R$  fällt der Wert der Charaktere (33) je mit dem Wert des zugeordneten eigentlichen Charakters zusammen, und daher ist wie oben (vgl. das Ende von § 1):

$$\prod_{\chi} (1 - \chi(l) l^{-s})^{-1} = (1 - l^{-f^* s})^{-\frac{\bar{G}}{c_R f^*}} = (1 - l^{-f^* s})^{-e^*}.$$

Den gleichen Wert hat aber auch die linke Seite von (32).

Damit ist bewiesen

$$\zeta_k(s) = \prod_{\chi} L(s, \chi), \quad (34)$$

wo  $\chi$  über die zur Galois'schen Gruppe von  $k$  isomorphe Gruppe aller eigentlichen Charaktere zu erstrecken ist. Oder

$$\zeta_k(s) = \zeta(s) \prod_{\chi} L(s, \chi), \quad (35)$$

wo  $\chi$  über alle eigentlichen Nebencharaktere zu erstrecken ist, die den Nebencharakteren

$$X_1^{n_1} b_1 X_2^{n_2} b_2 \dots X_R^{n_R} b_R ; \quad \begin{array}{l} 0 \leq n_r \leq c_r - 1, r = 1, 2, \dots, R, \\ \text{au\ss}er b_1 = b_2 = \dots = b_R = 0; \end{array}$$

zugeordnet sind.

Die Formeln (34) und (35) bleiben mutatis mutandis auch g\u00fcltig, falls die Diskriminante eines Kreisk\u00f6rpers gerade ist. Wir erhalten die noch fehlenden Ausgangs-Kreisk\u00f6rper, falls wir dem betrachteten K\u00f6rper  $k$  oder auch nur dem rationalen Zahlk\u00f6rper den cyklischen reellen Unterk\u00f6rper  $II_{h_0-2}$  vom  $2^{h_0-2}$  ten Grade adjungieren (also  $h_0 \geq 3$ ), oder dann den vollen K\u00f6rper der  $2^{h_0}$  ten Einheitswurzel, wo  $h_0 \geq 2$  (Vgl. hierzu Hilbert, § 99 und § 100). In jedem Falle hat man dann Unterk\u00f6rper des K\u00f6rpers der  $m$  ten Einheitswurzel, wo  $m = 2^{h_0} \cdot \overline{m}$  ist.

Eine den K\u00f6rper bestimmende ganze Zahl von  $II_{h_0-2}$  ist

$$Z_* = Z_0 + Z_0^{-1}, \text{ wo } Z_0 = e^{\frac{2\pi i}{2^{h_0}}}.$$

Die zu  $Z_*$  in bezug auf  $II_{h_0-2}$  algebraisch conjugierten Zahlen sind die Zahlen

$$s_*^{n_*} Z_*, \text{ wo } 0 \leq n_* \leq 2^{h_0-2} - 1, \text{ und wo } s_* Z_0 = Z_0^5.$$

Ferner sei  $s_* Z_i = Z_i$ , falls  $i \neq 0$  ist.

Jede ganze Zahl  $\alpha$  des K\u00f6rpers  $K(k, Z_*)$ , dessen Grad gleich  $2^{h_0-2} \cdot \overline{G}$  ist, ist dann von der Form

$$\alpha = P(Z_*, Z_1, Z_2, \dots, Z_R).$$

Die zu  $\alpha$  in bezug auf  $K(k, Z_*)$  algebraisch conjugierten Zahlen sind dann die Zahlen:

$$s_*^{n_*} s_1^{n_1} s_2^{n_2} \dots s_R^{n_R} \alpha, \text{ wo } \begin{cases} 0 \leq n_r \leq c_r - 1; r = 1, 2, \dots, R. \\ 0 \leq n_* \leq 2^{h_0-2} - 1. \end{cases}$$

Das Tableau der Substitutionen (22) \u00e4ndert sich nicht.

F\u00fcr ungerades  $a$  sei dann  $\text{ind}_* a$  die mod.  $2^{h_0-2}$  eindeutig bestimmte Zahl, f\u00fcr welche

$$a \equiv \pm 5^{\text{ind}_* a} \pmod{2^{h_0}} \quad (36)$$

ist.

Sei jetzt  $p$  eine zu  $m$  teilerfremde rationale Primzahl und  $F_*$  die kleinste positive ganze rationale Zahl, für welche alle  $R + 1$  simultanen Kongruenzen

$$\begin{aligned} F_* \operatorname{ind}_r p &\equiv 0 \pmod{c_r}, \quad r = 1, 2, \dots, R \text{ und} \\ F_* \operatorname{ind}_* p &\equiv 0 \pmod{2^{h_0-2}} \end{aligned}$$

befriedigt sind. Dann ergibt sich wie oben, daß falls  $E_* = \frac{2^{h_0-2} \cdot \bar{G}}{F_*}$  ist, jede zu  $m$  teilerfremde Primzahl  $p$  in  $E_*$  voneinander verschiedene Primideale  $F_*$  ten Grades zerfällt in  $K(k, Z_*)$ .

Ebenso wie oben ergibt sich die Formel:

$$\prod_{\mathfrak{p}|p} (1 - n(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} = \prod_{\chi} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}, \quad (37)$$

wo auf der linken Seite  $\mathfrak{p}$  alle voneinander verschiedenen Primteiler  $\mathfrak{p}$  in  $K(k, Z_*)$  von  $p$  durchläuft, und rechts  $\chi$  alle eigentlichen Charaktere, welche der Gruppe der  $2^{h_0-2} \cdot \bar{G}$  Charakteren

$$X_*^{n_*} X_1^{n_1} b_1 \dots X_R^{n_R} b_R \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq n_r \leq c_r - 1, \quad r = 1, 2, \dots, R \\ 0 \leq n_* \leq 2^{h_0-2} - 1 \end{array} \right.$$

zugeordnet sind. Hier ist

$$X_*(\pm 5) = \chi_*(\pm 5) = e^{\frac{2\pi i}{2^{h_0-2}}}$$

ein Charakter mod.  $2^{h_0}$ . Die Gleichung (37) gilt endlich auch für alle rationalen Primteiler von  $m$ , wie man auf gleiche Weise einsieht wie oben. Es ist für den analogen Beweisgang noch anzumerken, daß im vollen Körper der  $2^{h_0}$  ten Einheitswurzel ( $h_0 \geq 2$ ) die Primidealdarstellung

$$2 = \mathfrak{f}^{2^{h_0-1}}$$

gilt. Mithin muß im reellen Unterkörper vom Grade  $2^{h_0-2}$  ( $h_0 \geq 3$ ) in Primidealdarstellung

$$2 = \mathfrak{l}^{2^{h_0-2}}$$

sein. (Vgl. den analogen Schluß, pg. 184).

Eine den Körper bestimmende ganze Zahl des vollen Körpers der  $2^{h_0}$  ten Einheitswurzel ist  $Z_0 = e^{\frac{2\pi i}{2^{h_0}}}$ . Sei  $s_0 Z_0 = Z_0^{-1}$  eine Substitution der Periode 2, also  $s_0 Z_* = Z_*$  und  $s_0 Z_r = Z_r$  für  $r = 1, 2, \dots, R$ .

Jede ganze Zahl  $\alpha$  des Körpers  $K(k, Z_0)$ , dessen Grad gleich  $2^{h_0-1} \cdot \overline{G}$  ist, ist dann von der Form

$$\alpha = P(Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_R).$$

Die zu  $\alpha$  in bezug auf  $K(k, Z_0)$  algebraisch konjugierten Zahlen sind dann die Zahlen:

$$s_0^{n_0} s_*^{n_*} s_1^{n_1} s_2^{n_2} \dots s_R^{n_R} \alpha, \text{ wo } \begin{cases} 0 \leq n_0 \leq 1 \\ 0 \leq n_* \leq 2^{h_0-2} - 1 \\ 0 \leq n_r \leq c_r - 1; r = 1, 2, \dots, R. \end{cases}$$

Das Tableau der Substitutionen (22) ist auch hier dasselbe.

Für ungerades  $\alpha$  sei dann  $\text{ind}_0 \alpha$  die mod. 2 eindeutig bestimmte Zahl:

$$\alpha \equiv (-1)^{\text{ind}_0 \alpha} \pmod{4}. \quad (38)$$

Wir wollen zur Deutlichkeit noch bemerken, daß (36) und (38) zusammen die Kongruenz:

$$\alpha \equiv (-1)^{\text{ind}_0 \alpha} \cdot 5^{\text{ind}_* \alpha} \pmod{2^{h_0}}$$

ergeben, falls  $h_0 \geq 3$ . Es sei  $F$  die kleinste positive ganze rationale Zahl, für welche alle  $R+2$  simultanen Kongruenzen

$$\begin{aligned} F \text{ ind}_r p &\equiv 0 \pmod{c_r}, \quad r = 1, 2, \dots, R \\ F \text{ ind}_* p &\equiv 0 \pmod{2^{h_0-2}} \\ F \text{ ind}_0 p &\equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

befriedigt werden. Dann ergibt sich wie im Falle einer ungeraden Körperdiskriminante, daß, falls  $E = \frac{2^{h_0-1} \cdot \overline{G}}{F}$  ist, jede zu  $m$  teilerfremde Primzahl  $p$  in  $E$  voneinander verschiedene Primideale  $F$  ten Grades zerfällt in  $K(k, Z_0)$ .

Die Formel

$$\prod_{\mathfrak{p} | p} (1 - n(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} = \prod_{\chi} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}, \quad (39)$$

wo auf der linken Seite  $\mathfrak{P}$  alle voneinander verschiedenen Primteiler  $\mathfrak{P}$  in  $K(k, Z_0)$  von  $p$  durchläuft, und rechts  $\chi$  alle eigentlichen Charaktere, welche der Gruppe der  $2^{h_0-1} \cdot \bar{G}$  Charaktere

$$X_0^{n_0} X_*^{n_*} X_1^{n_1} b_1 X_2^{n_2} b_2 \dots X_R^{n_R} b_R \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq n_0 \leq 1 \\ 0 \leq n_* \leq 2^{h_0-2} - 1 \\ 0 \leq n_r \leq c_r - 1; r = 1, 2, \dots, R \end{array} \right.$$

zugeordnet sind, bleibt richtig. Hier ist für jede ungerade Zahl  $a$

$$X_0(a) = (-1)^{\frac{a-1}{2}} \text{ ein Charakter (mod. 4).}$$

Die Formel (39) gilt aber auch für die rationalen Primteiler, die in  $m$  aufgehen, wie man auf genau gleiche Weise einsieht, wie oben.

Die Funktion  $\zeta_K(s)$  hat mithin in allen Fällen die Gestalt

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) \cdot \prod_{\chi} L(s, \chi), \quad (40)$$

wo das Produkt über alle *eigentlichen Nebencharaktere* zu erstrecken ist.

## § 6. Die Umformung des Ausdruckes für die Zetafunktion.

Aus den Gleichungen (40), (2), (9), (12), (13), (20) und (21) folgt, daß die Funktion  $\zeta_K(s)$  in allen Fällen der Kreis-Ausgangskörper die Gestalt hat:

$$\begin{aligned} \zeta_K(s) = & \prod_{\chi(-1)=-1} \left\{ \frac{i\pi}{G(1, \chi)} \sum_{k=1}^{\frac{t_\chi}{2}} \chi(k) \frac{k}{t_\chi} \right\} \cdot \prod_{\chi(-1)=+1} \left\{ \frac{2}{G(1, \chi)} \sum_{k=1}^{\frac{t_\chi}{2}} \chi(k) \cdot \log \sin \frac{\pi k}{t_\chi} \right\} \times \\ & \times \left[ \frac{1}{s-1} + GE + (G-1) \log 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{\chi(-1)=-1} \left| \frac{\sum_{k=1}^{\frac{t_\chi}{2}} \chi(k) \log \frac{\Gamma\left(\frac{k}{t_\chi}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{k}{t_\chi}\right)}}{\sum_{k=1}^{\frac{t_\chi}{2}} \chi(k) \frac{k}{t_\chi}} \right| + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{\chi(-1)=+1} \left| \frac{\sum_{k=1}^{\frac{t_\chi}{2}} \chi(k) \phi_1\left(\frac{k}{t_\chi}\right)}{\sum_{k=1}^{\frac{t_\chi}{2}} \chi(k) \log \sin \frac{\pi k}{t_\chi}} \right| \right] + \\ & + \text{höhere Potenzen in } (s-1). \end{aligned} \quad (41)$$

Hier bedeutet  $G$  den Grad des Körpers  $K$ :

Falls  $m = \overline{m}$  ungerade, d. h.  $K = k$  ist, so ist  $G = \overline{G} = c_1 \cdot c_2 \dots \cdot c_R$ ; falls  $m = 2^{h_0} \overline{m}$ ,  $h_0 \geq 3$ , und nur der reelle Unterkörper vom Grade  $2^{h_0-2}$  zu  $k$  hinzutritt, d. h.  $K = K(k, Z_*)$  ist, so ist  $G = 2^{h_0-2} \overline{G} = 2^{h_0-2} \cdot c_1 \cdot c_2 \dots \cdot c_R$ ; falls  $m = 2^{h_0} \overline{m}$ ,  $h_0 \geq 2$  und der volle Körper der  $2^{h_0}$  ten Einheitswurzel zu  $k$  hinzutritt, d. h.  $K = K(k, Z_0)$  ist, so ist  $G = 2^{h_0-1} \overline{G} = 2^{h_0-1} \cdot c_1 \cdot c_2 \dots \cdot c_R$ . Die Summen und Produkte sind zu erstrecken bezw. über diejenigen der  $G-1$  eigentlichen Nebencharaktere, welche den weiter oben in jedem Falle erwähnten Nebencharakteren zugeordnet sind, für welche  $\chi(-1) = -1$ , bezw.  $\chi(-1) = +1$  ist. Hierbei ist für  $\Pi$  der Wert 1, für  $\Sigma$  der Wert 0 zu setzen, falls *kein* Charakter von  $\chi^{(-1)=-1}$  der Art  $\chi(-1) = -1$  existiert.  $t_x$  ist derjenige Teiler von  $m$ , für welchen der betr. Charakter  $\chi$  eigentlich wird. Es ist dazu noch folgendes zu bemerken:

Der Körper  $K$  ist als Galois'scher Körper entweder total reell oder total imaginär. Der erste Fall tritt nur ein, wenn *alle*  $b_r$ , wo  $r = 1, 2, \dots R$  *gerade* sind, und höchstens  $\Pi_{h_0-2}$  zu  $k$  tritt. Die Substitution  $s_r^{\frac{1}{2}b_r c_r}$  ist die einzige Substitution des Körpers der  $l_r^{h_r}$  ten Einheitswurzel, die genau die Periode 2 hat, denn die Gruppe ist ja zyklisch vom Grade  $b_r \cdot c_r = (l_r - 1) l_r^{h_r-1}$ . Andererseits ist  $Z_r^{-1}$  algebraisch konjugiert zu  $Z_r$  im Körper der  $l_r^{h_r}$  ten Einheitswurzel, und folglich verwandelt, da der Uebergang zur konjugiert komplexen Zahl eine Operation der Periode 2 ist,  $s_r^{\frac{1}{2}b_r c_r}$  jede Zahl des Körpers der  $l_r^{h_r}$  ten Einheitswurzel in ihre konjugiert komplexe Zahl.

Ist  $b_r$  *gerade*, so kommt unter den Substitutionen, welche die Zahlen des Unterkörpers vom Grade  $c_r$  des Körpers der  $l_r^{h_r}$  ten Einheitswurzel invariant lassen [vgl. das Tableau (22)], auch die Substitution

$$s_r^{\left(\frac{b_r}{2}\right) c_r}$$

vor und folglich sind die Zahlen des Unterkörpers vom Grade  $c_r$  alle reell.

Ist  $b_r$  *ungerade*, so ist  $c_r$  gerade und  $b_r \left(\frac{c_r}{2}\right)$  nach dem Modul  $c_r$  kongruent einem der Werte 1, 2, 3 ...  $(c_r - 1)$ . Die Substitution

$$s_r^{b_r \cdot \left(\frac{c_r}{2}\right)}$$

führt also eine den Körper vom Grade  $c_r$  bestimmende ganze Zahl  $\alpha$  in eine zu ihr algebraisch konjugierte

$$s_r^{b_r \cdot \left(\frac{c_r}{2}\right)} \alpha = \bar{\alpha}$$

über. Die Zahl

$$\alpha - \bar{\alpha}$$

gehört dann auch dem Körper vom Grade  $c_r$  an, denn der Körper vom Grade  $c_r$  ist Galois'sch.  $\alpha - \bar{\alpha}$  ist aber rein imaginär und von Null verschieden wegen der Irreduzibilität der Gleichung mit rationalen Zahlkoeffizienten vom Grade  $c_r$ , der  $\alpha$  und seine algebraisch konjugierten Zahlen genügen.

Bedeutet  $r_1$  die Anzahl der reellen,  $2r_2$  die Anzahl der imaginären unter den  $r_1 + 2r_2$  zueinander algebraisch konjugierten Körpern eines algebraischen Zahlkörpers vom  $(r_1 + 2r_2)$  ten Grade, so ist  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = \frac{G}{2}$ , falls  $K$  imaginär ist, dagegen  $r_1 = G$ ,  $r_2 = 0$ , falls  $K$  reell ist. Im Falle eines reellen  $K$  gibt es keine Charaktere, für welche  $\chi(-1) = -1$  ist. Denn für den erzeugenden Charakter ist

$$X_r(-1) = X_r\left(g_r^{\frac{1}{2} b_r c_r}\right) = e^{\frac{2\pi i}{b_r c_r} \left(\frac{1}{2} b_r c_r\right)} = -1,$$

also  $X_r^{b_r}(-1) = +1$ , bzw.

$$X_*(-1) = X_*\left(-5^{2^{h_0-2}}\right) = e^{\frac{2\pi i}{2^{h_0-2}} \cdot 2^{h_0-2}} = +1.$$

Falls  $K$  imaginär ist, sind je  $\frac{G}{2}$  Charaktere von der Art  $\chi(-1) = -1$  und  $\chi(-1) = +1$ , denn das Produkt zweier Charaktere von verschiedener Art ergibt einen Charakter von der Art  $\chi(-1) = -1$ ;  $\left(\frac{G}{2} - 1\right)$  Nebencharaktere sind also von der Art  $\chi(-1) = +1$ .

Wir gehen über zur Vereinfachung der rechten Seite von (41). Unter Berücksichtigung des Corollares, pg. 172 erhalten wir für die beiden Produkte der rechten Seite der Formel (41):

$$\left(\frac{\pi}{m}\right)^{r_2} \cdot 2^{r_1 + r_2 - 1} \prod_{\chi(-1) = -1} \frac{i}{G(1, \chi)} \prod_{\chi(-1) = +1} \frac{1}{G(1, \chi)} \times \quad (42)$$

$$\prod_{\chi(-1) = -1} \left\{ \sum_{k=1}^m \chi(k) \cdot k \right\} \prod_{\chi(-1) = +1} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \chi(k) \cdot \log \sin \frac{\pi k}{m} \right\}.$$



Für die praktische Berechnung ist allerdings die ursprüngliche Summations-Vorschrift bis zu  $t_x$ , bezw.  $\frac{t_x}{2}$  vorteilhafter.

Wir berechnen die beiden ersten Produkte des Ausdruckes (42). Wir nehmen zuerst die  $\chi$ , die für einen Teiler der ungeraden Primzahlpotenz  $l_r^{h_r} = l^h$ , unter Weglassung des Index  $r$ , eigentlich sind.

Die zugehörigen Charaktere sind:

$$X^{nb}, \text{ wo } 0 \leq n \leq c-1 \text{ und } X(g) = \chi(g) = e^{\frac{2\pi i}{\varphi(l^h)}}.$$

Durch Schluß von  $h-1$  auf  $h$  sieht man unmittelbar:

Es gibt einen Charakter, für den  $(n, l^h) = l^h$  ist. Er wird für  $t_x = 1$  eigentlich <sup>13)</sup>.

Es gibt  $\frac{\varphi(l)}{b} - 1$  Charaktere, für die  $(n, l^h) = l^{h-1}$  ist. Sie werden für  $t_x = l$  eigentlich.

Es gibt  $\frac{\varphi(l^2) - \varphi(l)}{b}$  Charaktere, für die  $(n, l^h) = l^{h-2}$  ist. Sie werden für  $t_x = l^2$  eigentlich.

Es gibt  $\frac{\varphi(l^3) - \varphi(l^2)}{b}$  Charaktere, für die  $(n, l^h) = l^{h-3}$ . Sie werden für  $t_x = l^3$  eigentlich.

.....

Es gibt  $\frac{\varphi(l^{h-1}) - \varphi(l^{h-2})}{b}$  Charaktere, für die  $(n, l^h) = l$ . Sie werden für  $t_x = l^{h-1}$  eigentlich.

Es gibt  $\frac{\varphi(l^h) - \varphi(l^{h-1})}{b}$  Charaktere, für die  $(n, l^h) = 1$ . Sie sind schon eigentlich:  $t_x = l^h$ .

Zu jedem nicht reellen Charakter existiert auch der konjugiert komplexe Charakter, da ja die Charaktere, die zu berücksichtigen sind, zusammen mit dem Hauptcharakter eine Gruppe bilden. Bei beliebigem  $t_x$  ist für zwei konjugiert komplexe Charaktere, vgl. den Anfang von § 2, Formeln (3) und (4), falls  $\chi(-1) = \bar{\chi}(-1) = -1$  ist:

$$\frac{i}{G(1, \chi)} \cdot \frac{i}{G(1, \bar{\chi})} = \frac{-1}{\chi(-1) \cdot t_x} = \frac{1}{t_x} = \left| t_x^{-\frac{1}{2}} \right|^2,$$

<sup>13)</sup> Der Hauptcharakter ist in (41) und (42) nicht zu berücksichtigen.

und, falls  $\chi(-1) = \bar{\chi}(-1) = +1$  ist:

$$\frac{1}{G(1, \chi)} \cdot \frac{1}{G(1, \bar{\chi})} = \frac{1}{\chi(-1) \cdot t_x} = \frac{1}{t_x} = \left| t_x^{-\frac{1}{2}} \right|^2.$$

Nur der Nebencharakter, für welchen  $n \cdot b = \frac{1}{2} \varphi(l^h)$  ist, ist reell, alle andern sind je zu zweien konjugiert komplex. (Die Gruppe dieser Charaktere ist ja zyklisch!) Für den erzeugenden Charakter ist

$$X^{\frac{1}{2} \varphi(l^h)}(-1) = (-1)^{\frac{\varphi(l^h)}{2}}.$$

Je nachdem  $\frac{\varphi(l^h)}{2}$ , oder also auch  $\frac{l-1}{2}$  ungerade oder gerade ist, ist für den reellen Charakter  $\chi(-1) = -1$  oder  $\chi(-1) = +1$ . Im ersten Falle ist  $-l \equiv 1 \pmod{4}$  und

$$\frac{i}{G(1, \chi)} = \frac{1}{|\sqrt{l}|} = \left| t_x^{-\frac{1}{2}} \right|;$$

im zweiten Falle ist  $l \equiv 1 \pmod{4}$  und

$$\frac{1}{G(1, \chi)} = \frac{1}{|\sqrt{l}|} = \left| t_x^{-\frac{1}{2}} \right|,$$

nach den bekannten Formeln über die Gauß'schen Summen<sup>14)</sup>. Die beiden ersten Produkte von (42), erstreckt über alle eigentlichen Nebencharaktere, für welche  $t_x$  ein Teiler von  $l^h$  ist, ergeben mithin

$$\begin{aligned} & \left| l^{-\frac{1}{2}} \right| \frac{h l^h - h l^{h-1} - l^{h-1} - (b-1)}{b} \\ &= \left| l^{-\frac{1}{2}} \right| \left\{ h - \frac{l^{h-1} + (b-1)}{l^{h-1}(l-1)} \right\} \cdot \frac{\varphi(l^h)}{b}. \end{aligned}$$

<sup>14)</sup> Einen direkten Beweis für die Vorzeichenbestimmung dieser Gauss'schen Summen liefert z. B. die Funktionalgleichung der Zetafunktion des betr. quadratischen Körpers in Verbindung mit der Funktionalgleichung der gewöhnlichen Riemann'schen Zetafunktion, für  $s=0$ , bzw.  $s=1$ . Vgl. z. B.: Gut, M., Ueber die Klassenzahl der quadratischen Körper, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 72. Jahrgang (1927), pg. 197. Man beachte übrigens wohl, dass man auf diese Vorzeichenbestimmung verzichten und sich mit den absoluten Beträgen, also mit Formel (4), begnügen kann, falls man nur die *Klassenzahlbestimmung* (vgl. § 7) des Körpers beabsichtigt.

Die Potenz, in der  $\left| l_r^{-\frac{1}{2}} \right|$  mithin überhaupt in diesen beiden Produkten auftritt, ist

$$\left| l_r^{-\frac{1}{2}} \right| \left\{ h_r - \frac{l_r^{h_r-1} + (b_r - 1)}{l_r^{h_r-1} (l_r - 1)} \right\} \cdot G. \quad (43)$$

Denn jeder Charakter mod.  $l_r^{h_r}$  tritt mit jedem der  $G: \frac{\varphi(l_r^{h_r})}{b_r}$  Charaktere mod.  $\frac{m}{l_r^{h_r}}$  multipliziert auf. Die Charaktere sind auch in der gesamten Gruppe der  $G$  Charaktere je zu zweien konjugiert komplex, außer es handle sich um die reellen Charaktere. Abgesehen vom Hauptcharakter gehören die reellen Charaktere zu den Teilern  $l_1, l_2, \dots, l_R$ , 4 oder 8, (siehe pg. 164), oder Produkten dieser Größen (jede höchstens in erster Potenz!), wobei natürlich nur 4 oder 8 auftritt in einem solchen Produkte. Für alle diese reellen Charaktere ist ebenso nach den bekannten Formeln über die Gauß'schen Summen:

$$\frac{i}{G(1, \chi)} = \left| t_x^{-\frac{1}{2}} \right|, \text{ falls } \chi(-1) = -1; (\chi \text{ reell}), \text{ resp.}$$

$$\frac{1}{G(1, \chi)} = \left| t_x^{-\frac{1}{2}} \right|, \text{ falls } \chi(-1) = +1; (\chi \text{ reell}).$$

Endlich ist noch die Primzahl 2 ins Auge zu fassen. Die nicht schon erwähnten Nebencharaktere sind je zu zweien konjugiert komplex (vgl. pg. 165).

Tritt der volle Körper der  $2^{h_0}$  ten Einheitswurzel in  $K$  auf, so liefern die beiden Produkte von (42), nur über die Teiler  $t_x$  von  $2^{h_0}$  erstreckt

$$\left| 2^{-\frac{1}{2}} \right|^{h_0 \cdot 2^{h_0-1} - 2^{h_0-1}} = \left| 2^{-\frac{1}{2}} \right|^{\{h_0-1\} \cdot \varphi(2^{h_0})}.$$

Mithin ergeben beide Produkte als Faktor, der *alle* Potenzen von 2 enthält:

$$\left| 2^{-\frac{1}{2}} \right|^{\{h_0-1\} \cdot G}. \quad (44)$$

Tritt nur der reelle Unterkörper vom Grade  $2^{h_0-2}$ , wo  $h_0 \geq 3$ , in  $K$  auf, so liefern die beiden Produkte von (42), nur über die Teiler  $t_x$  von  $2^{h_0}$  erstreckt, den Faktor:

$$\left| 2^{-\frac{1}{2}} \right|^{h_0 \cdot 2^{h_0-2} - 2^{h_0-2} - 1} = \left| 2^{-\frac{1}{2}} \right|^{\left\{ h_0 - \frac{2^{h_0-2} + (2-1)}{2^{h_0-2}} \right\} \frac{\varphi(2^{h_0})}{2}}.$$

Mithin ergeben beide Produkte von (42), als Faktor, der alle Potenzen von 2 umfaßt:

$$\left| 2^{-\frac{1}{2}} \right|^{\left\{ h_0 - \frac{2^{h_0-2} + (2-1)}{2^{h_0-2}} \right\} G}. \quad (45)$$

Wir haben damit in jedem Falle die beiden Produkte von (42) bestimmt; wir wollen aber diese Größe noch durch die Diskriminante von  $K$  ausdrücken.

Wir bestimmen zunächst die Diskriminante  $\bar{d}$  des Unterkörpers  $\bar{k}$  der  $l^h$ ten Einheitswurzel, wo  $l$  ungerade ist, der den Grad  $c = al^{h-1} = \frac{\varphi(l^h)}{b}$  hat.

Ist  $b = 1$ , mithin  $a = l - 1$ , und  $c = (l - 1)l^{h-1}$ , so tritt der volle Körper  $\bar{K}$  der  $l^h$ ten Einheitswurzel in  $K$  auf, dessen Diskriminante  $\bar{D}$  (Hilbert, § 96) gleich

$$\pm \bar{D} = l^{hl^h - hl^{h-1} - l^{h-1}} \quad (46)$$

ist. Es sei mithin  $b > 1$ . Die Elemente, welche Teiler der Relativ-differenten von  $\bar{K}$  zu  $\bar{k}$  (vgl. Hilbert, §§ 14 und 15) sind, sind alle gleich

dem Ideal  $\bar{\mathfrak{L}} = (1 - Z)$  von  $\bar{K}$ . Hier ist  $Z = Z_r = e^{\frac{2\pi i}{l^h r}}$ . Denn sie sind gleich

$$\mathfrak{L}_B = (1 - Z^{g^{Bc}} - 1), \quad B = 1, 2, \dots, b-1,$$

und die Kongruenz

$$g^{B a l^{h-1}} - 1 \equiv 0 \pmod{l}, \quad B = 1, 2, 3, \dots, b-1,$$

ist nicht möglich. Denn  $g$  ist a fortiori Primitivwurzel mod.  $l$ , und es müßte  $Ba l^{h-1} \equiv 0 \pmod{(l-1)}$ , d. h.  $Ba \equiv 0 \pmod{(l-1)}$  sein. Das ist aber nicht möglich<sup>15)</sup>. Die Relativdifferente von  $\bar{K}$  zu  $\bar{k}$  ist mithin gleich  $\bar{\mathfrak{L}}^{(b-1)}$ ; die Relativediskriminante von  $\bar{K}$  in bezug auf  $\bar{k}$  mithin  $\bar{\mathfrak{L}}^{b(b-1)} = \bar{\mathfrak{I}}^{(b-1)}$ , wo  $\bar{\mathfrak{I}}$  die gleiche Bedeutung hat wie auf pg. 184. Nach dem Fundamentalsatz über die Körperdiskriminanten (Hilbert, Satz 39) ist die gesuchte Diskriminante  $\bar{d}$ , da  $\bar{\mathfrak{I}}$  ein Primideal 1. Grades in  $\bar{k}$  ist:

$$\begin{aligned} \pm \bar{d} &= \sqrt[b]{\frac{|\bar{D}|}{l^{b-1}}} = l^{\frac{h l^h - h l^{h-1} - l^{h-1} - (b-1)}{b}} \\ &= l^{\left\{ h - \frac{l^{h-1} + (b-1)}{l^{h-1}(l-1)} \right\} \frac{\varphi(l^h)}{b}}. \end{aligned} \quad (47)$$

Da für  $b=1$  die Formel (47) in die Formel (46) übergeht, gilt die Formel (47) allgemein. Im Ganzen tritt diese Diskriminante (Hilbert, Theorem 88) in der  $G: \frac{\varphi(l^h)}{b}$  ten Potenz in der Körperdiskriminante  $D$  von  $K$  auf. Der Faktor von  $D$ , der alle und nur die Potenzen von  $l_r$  enthält, ist mithin:

$$l_r^{\left\{ h_r - \frac{l_r^{h_r-1} + (b_r-1)}{l_r^{h_r-1}(l_r-1)} \right\} G}. \quad (48)$$

Tritt der volle Körper  $\bar{\bar{K}}$  der  $2^{h_0}$  ten Einheitswurzel in  $K$  auf, so lautet der Faktor von  $D$ , der alle und nur die Potenzen von 2 enthält, analog:

$$2^{\{h_0-1\}G}. \quad (49)$$

Tritt schließlich nur der reelle Unterkörper  $\bar{k}$  vom Grade  $2^{h_0-2}$  in  $K$  auf, so beachte man, daß die Relativdifferente dieses Körpers  $\bar{k}$  zu  $\bar{K}$  gleich dem Element

<sup>15)</sup> Man hüte sich vor dem Trugschlusse, dass alle Elemente von  $\bar{K}$  gleich  $\bar{\mathfrak{L}}$  seien. Es gibt auch Elemente, welche höhere Potenzen von  $\bar{\mathfrak{L}}$  sind. Dieser Punkt wird nicht genauer untersucht bei Beeger, ist aber wesentlich. (Vgl. Beeger, l. c., pg. 460/461),

$$\overline{D} = (Z_0 - Z_0^{-1}), \quad Z_0 = e^{\frac{2\pi i}{2^{h_0}}}, \text{ wie oben,}$$

ist. Die Relativdiskriminante ist mithin das Ideal in  $\overline{k}$ :

$$(Z_0 - Z_0^{-1})^2 = (Z_0^2 - 1) (Z_0^{-2} - 1).$$

Die Norm dieses Ideales in  $\overline{k}$  in bezug auf den rationalen Zahlkörper

ist, falls  $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{2^{h_0-1}}}$  bedeutet:

$$\begin{aligned} & \left[ (\zeta - 1) (\zeta^3 - 1) (\zeta^5 - 1) \dots (\zeta^{2^{h_0-1}-1} - 1) \right]^2 \\ &= \lim_{x=1} \left\{ \frac{x^{2^{h_0-1}} - 1}{x^{2^{h_0-2}} - 1} \right\}^2 = \lim_{x=1} \left\{ x^{2^{h_0-2}} + 1 \right\}^2 = 4. \end{aligned}$$

Mithin ist, falls  $\overline{d}$  die Diskriminante von  $\overline{k}$  bedeutet, unter Berücksichtigung des Wertes  $\pm \overline{D} = 2^{(h_0-1)2^{h_0-1}}$  der Diskriminanten von  $\overline{K}$ :

$$\pm \overline{d} = \sqrt[2]{\frac{2^{(h_0-1)2^{h_0-1}}}{4}} = 2 \left\{ h_0 - \frac{2^{h_0-2} + (2-1)}{2^{h_0-2}} \right\} \cdot \frac{\varphi(2^{h_0})}{2}.$$

Der Faktor der Diskriminanten  $D$  von  $K$ , welcher alle und nur die Potenzen von 2 enthält in *diesem* Falle, ist mithin:

$$2 \left\{ h_0 - \frac{2^{h_0-2} + (2-1)}{2^{h_0-2}} \right\} \cdot G \quad (50)$$

Hält man jetzt die Ausdrücke (43) mit (48), bzw. (44) mit (49), bzw. (45) mit (50) zusammen, so ergibt sich jetzt für (42) der Ausdruck:

$$\left( \frac{\pi}{m} \right)^{r_2} 2^r \cdot \frac{1}{|\sqrt{D}|} \prod_{x^{(-1)}=-1} \left\{ \sum_{k=1}^m -\chi(k) \cdot k \right\} \prod_{x^{(-1)}=+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} -\chi(k) \cdot \log \sin \frac{\pi k}{m} \right\} \quad (51)$$

Hier bedeutet  $r = r_1 + r_2 - 1$ , wie üblich. Führen wir (51) statt (42) in (41) ein, so erhalten wir die *Schlussformel*:

$$\begin{aligned} \xi_K(s) = & \left(\frac{\pi}{m}\right)^{r_2} \cdot \frac{2^r}{|\sqrt{D}|} \cdot \prod_{\chi(-1)=-1} \left\{ \sum_{k=1}^m \chi(k) \cdot k \right\}_{\chi(-1)=+1} \cdot \prod_{\chi(-1)=+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \chi(k) \cdot \log \sin \frac{\pi k}{m} \right\} \times \\ & \times \left[ \frac{1}{s-1} + GE + (G-1) \log 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{\chi(-1)=-1} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^{\frac{t_x}{2}} \chi(k) \log \frac{\Gamma\left(\frac{k}{t_x}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{k}{t_x}\right)} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{\chi(-1)=+1} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^{\frac{t_x}{2}} \chi(k) \Phi_1\left(\frac{k}{t_x}\right)}{\sum_{k=1}^{\frac{t_x}{2}} \chi(k) \log \sin \frac{\pi k}{t_x}} \right\} \right] + \\ & + \text{höhere Potenzen in } (s-1). \end{aligned} \quad (52)$$

Die Produkte und Summen gehen über alle  $G-1$  eigentlichen Nebencharaktere der Gruppe der  $G$  Charaktere, die isomorph ist mit der Galois'schen Gruppe des Körpers  $K$ , natürlich je nur über die eigentlichen Nebencharaktere von der verlangten Art. Gibt es darunter keine Charaktere mit  $\chi(-1) = -1$ , so ist für das betreffende Produkt der Wert 1, für die betreffende Summe der Wert 0 zu setzen.

## § 7. Die Klassenzahl der Ausgangs-Kreiskörper

Die Klassenzahl  $h$  des Körpers  $K$  erhält man aus der bekannten Formel:

$$\lim_{s=1} \xi_K(s) \cdot (s-1) = h \cdot \kappa, \text{ wo } \kappa = \frac{2^{r_1+r_2} \cdot \pi^{r_2} \cdot R^*}{w |\sqrt{D}|} = \frac{2^G \cdot \pi^{r_2} \cdot R}{w |\sqrt{D}| 2^\rho}, \quad (53)$$

$$\text{und wo } \begin{cases} \rho = 0, & \text{falls } r_2 = 0 \\ \rho = 1, & \text{falls } r_2 > 0. \end{cases}$$

$G$  ist der Grad des Körpers  $K$ ,  $w$  die Anzahl der in ihm auftretenden Einheitswurzeln,  $D$  die Körperdiskriminante,  $R$  der Regulator. Für den Regulator sind zwei Definitionen in der Literatur gebräuchlich, die sich, falls  $r_2 > 0$  ist, um den Faktor  $2^{r_2-1}$  unterscheiden:  $R^* = 2^{r_2-1} \cdot R$ , und sonst sich decken. Die Verschiedenheit der Definitionen rührt davon her, daß die Autoren, die  $R^*$  verwenden, in  $R^*$  die Logarithmen der Normen der komplexen Grundeinheiten der konjugiert algebraischen Zahlkörper nehmen, die Autoren, die  $R$  verwenden, die Logarithmen der absoluten Beträge der komplexen Grundeinheiten der konjugiert algebraischen Zahlkörper <sup>16)</sup>.

Wir nehmen zuerst den Fall des total reellen Körpers  $K$ :  $b_1, b_2, \dots, b_R$  sind gerade, ferner ist höchstens der reelle Unterkörper vom Grade  $2^{k_0-2}$  in  $K$ . Die linke Seite von (53) ergibt dann, da  $r_1 = G$ ,  $r_2 = 0$ ,  $w = 2$  [vgl. den Anfang von § 6]; vermöge (52)

$$\frac{2^{G-1}}{|\sqrt{D}|} \prod_x \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} -\chi(k) \cdot \log \sin \frac{\pi k}{m} \right\}$$

und die rechte Seite von (53)

$$h \cdot \frac{2^G \cdot R}{2 |\sqrt{D}|},$$

folglich ist

$$h = \frac{\prod_x \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} -\chi(k) \log \sin \frac{\pi k}{m} \right\}}{R},$$

wo das Produkt über alle  $G - 1$  eigentlichen Nebencharaktere zu erstrecken ist.

---

<sup>16)</sup> Die Verwendung von  $R^*$  siehe z. B. bei Hecke, die Verwendung von  $R$  in E. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale; Leipzig und Berlin 1918. Der Hilbert'sche Zahlbericht ist inkonsequent: Im VII. Kapitel ist der Logarithmus der Norm der komplexen Grundeinheiten genommen ( $R^*$ ), im XXVI. Kapitel für allgemeines  $m$  der Logarithmus des absoluten Betrages der Grundeinheiten ( $R$ ). Hierauf hat Beeger 1919 l. c. pg. 414 und später, 1923, Mitchell aufmerksam gemacht im ersten der in der Einleitung erwähnten Bulletins of the National Research Council (cfr. dort, pg. 17).



Für den Fall des total imaginären Körpers [wenigstens *ein*  $b_r$  ungerade, oder, falls alle  $b_r$  gerade:  $K(Z_0)$  liegt in  $K$ ] ist  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = \frac{G}{2}$ . Die Anzahl  $w$  der Einheitswurzeln ist:

Falls  $m$  ungerade ist:

$$w = 2 \prod l_r^{h_r}, \text{ wo das Produkt über alle } r \text{ zu erstrecken ist, für welche } b_r = 1 \text{ ist;}$$

Falls  $m$  gerade ist, mithin  $\equiv 0 \pmod{4}$ :

$$w = 2^{h_0} \prod l_r^{h_r}, \text{ wo das Produkt über alle } r \text{ zu erstrecken ist, für welche } b_r = 1 \text{ ist.}$$

Ist kein  $b_r = 1$ , so bedeutet in beiden Fällen das Produkt  $\prod$  die Zahl 1.

Die linke Seite von (53) ergibt jetzt, gemäß (52):

$$\left(\frac{\pi}{m}\right)^{\frac{G}{2}} \cdot 2^{\frac{\frac{G}{2}-1}{2}} \prod_{\chi(-1)=-1} \left\{ \sum_{k=1}^m \chi(k) \cdot k \right\} \cdot \prod_{\chi(-1)=+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \chi(k) \cdot \log \sin \frac{\pi k}{m} \right\},$$

die rechte Seite von (53) ist:

$$h \cdot \frac{2^{G-1} \pi^{\frac{G}{2}} \cdot R}{w |\sqrt{D}|}.$$

Folglich ist:

$$h = w \cdot \frac{\prod_{\chi(-1)=-1} \left\{ \sum_{k=1}^m \chi(k) \cdot k \right\}}{(2m)^{\frac{G}{2}}} \cdot \frac{\prod_{\chi(-1)=+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \chi(k) \log \sin \frac{\pi k}{m} \right\}}{R},$$

wo das erste Produkt über alle  $\frac{G}{2}$  eigentlichen Nebencharaktere zu erstrecken ist, für welche  $\chi(-1) = -1$  ist, während das zweite Produkt über alle  $\frac{G}{2} - 1$  eigentlichen Nebencharaktere zu erstrecken ist, für welche  $\chi(-1) = +1$  ist.

Im Hilbert'schen Zahlbericht ist die letzte Formel, falls  $m \equiv 0 \pmod{4}$  ist, und es sich um den vollen Kreiskörper der  $m$  ten Einheitswurzel

handelt, falsch angegeben. Vergleiche die in der Einleitung erwähnte Arbeit von E. E. Kummer.  $w$  ist dann nämlich nur gleich  $m$ . Vergleiche außerdem Anmerkung 16) betr. den Regulator.

Falls die Gruppe der Charaktere, für welche  $\chi(-1) = +1$  ist, zyklisch ist, kann man das Produkt

$$\prod_{\chi(-1)=+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \chi(k) \cdot \log \sin \frac{\pi k}{m} \right\}$$

in Determinantenform schreiben, wie dies schon von Kummer [vgl. Crelle, Bd. 40, pg. 93; Journal de mathématiques t. 16, pg. 377 (1850)] ausgeführt wurde in den von ihm betrachteten Kreiskörpern. Wir wollen darauf nicht eintreten. Vergleiche auch Beeger l. c., pg. 768/770.

### III. Kapitel. Die Zetafunktion, die Kronecker'sche Grenzformel und die Klassenzahl des allgemeinsten Kreiskörpers

#### § 8. Die Zetafunktion des allgemeinsten Kreiskörpers

Es handelt sich jetzt darum, noch sämtliche Unterkörper  $U$  eines gegebenen Ausgangs-Kreiskörpers  $K$  ins Auge zu fassen, die nicht schon Unterkörper eines «niedrigeren» Ausgangskörpers sind, d. h. eines Ausgangskörpers, welcher wirklicher Unterkörper von  $K$  wäre.

Sei zunächst wieder  $m = \bar{m}$  ungerade. Die Zahlen von  $K$  sind invariant unter  $s_1^{c_1}, s_2^{c_2}, \dots, s_R^{c_R}$ . Diese Substitutionen und ihre Potenzen sind in diesem Kapitel im wesentlichen von gleicher Bedeutung wie die Einheits-Substitution. Die Galois'sche Gruppe  $\mathfrak{G}$  von  $K$  ist gegeben durch

$$s_1^{n_1} s_2^{n_2} \dots s_R^{n_R}; 0 \leq n_r \leq c_r - 1; r = 1, 2, \dots, R.$$

Wenn man nun verlangt, daß die Zahlen des Unterkörpers  $U$  invariant seien unter

$$s_r^x, \text{ mithin auch unter } s_r^{2x}, s_r^{3x}, \dots, s_r^{(Mx+Nc_r)}; M, N \text{ ganz rational}$$

so muß der Modul  $(x, c_r)$  mit  $(c_r)$  identisch sein, denn sonst wäre  $U$  Unterkörper eines niedrigeren Ausgangskörpers. Daher kann man nur

fordern, daß die Zahlen von  $U$  invariant seien unter Substitutionen vom Typus

$$s_1^{x_1} \cdot s_2^{x_2} \dots s_R^{x_R},$$

wo für mindestens zwei verschiedene Indices  $r$  der Exponent  $x_r \not\equiv 0 \pmod{c_r}$  ist. Sind die  $c_r$  je zu zweien zueinander teilerfremd, so wären die Zahlen von  $U$  auch invariant unter

$$(s_1^{x_1} s_2^{x_2} \dots s_R^{x_R}) \frac{c_1 c_2 \dots c_R}{c_r} \text{ äquivalent } s_r \frac{x_r c_1 c_2 \dots c_R}{c_r},$$

also müßte, wie oben,  $x_r \equiv 0 \pmod{c_r}$  sein für  $r = 1, 2, \dots, R$ . Wir müssen daher annehmen, daß die  $c_r$  gemeinschaftliche Teiler haben. Nur dann gibt es Unterkörper  $U$ .

Hat  $U$  den Relativgrad  $\gamma$ , so gibt es eine Gruppe  $\mathfrak{J}$  von  $\gamma$  Substitutionen:

[illegible]

unter denen alle Zahlen von  $U$  invariant sind. Es gibt ferner  $g = \frac{G}{\gamma}$  Substitutionen, so daß die symbolische Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} = & \mathfrak{J} \cdot s_1^{y_{11}} s_2^{y_{21}} \dots s_R^{y_{R1}} + \mathfrak{J} \cdot s_1^{y_{12}} s_2^{y_{22}} \dots s_R^{y_{R2}} + \mathfrak{J} \cdot s_1^{y_{1g}} s_2^{y_{2g}} \dots s_R^{y_{Rg}}, \\ & s_1^{y_{11}} s_2^{y_{21}} \dots s_R^{y_{R1}} = I = \text{Identit\"at}. \end{aligned} \quad (55)$$

Wir wollen jetzt der Substitution  $s_1^{n_1} s_2^{n_2} \dots s_R^{n_R}$  der Galois'schen Gruppe  $\mathfrak{G}$  von  $K$  den Charakter (vgl. Anfang von § 5):

$$\begin{aligned} X_{n_1, n_2, \dots, n_R} (g_1^{B_1} g_2^{B_2} \dots g_R^{B_R}) &\equiv \\ &\equiv X_1^{n_1 b_1} (g_1^{B_1} g_2^{B_2} \dots g_R^{B_R}) \cdot X_2^{n_2 b_2} (g_1^{B_1} g_2^{B_2} \dots g_R^{B_R}) \dots X_R^{n_R b_R} (g_1^{B_1} g_2^{B_2} g_R^{B_R}) \\ &= X_1^{n_1 b_1} (g_1^{B_1}) \cdot X_2^{n_2 b_2} (g_2^{B_2}) \dots X_R^{n_R b_R} (g_R^{B_R}) = \\ &= e^{2\pi i \left\{ \frac{n_1 B_1}{c_1} + \frac{n_2 B_2}{c_2} + \dots + \frac{n_R B_R}{c_R} \right\}} \end{aligned} \quad (56)$$

zuordnen. Dadurch sind die beiden zueinander holoedrisch isomorphen Gruppen der  $G$  Substitutionen und der  $G$  Charaktere ein-eindeutig, d. h. von inneren Isomorphismen frei, aufeinander bezogen.

Setzt man jetzt sämtliche Charaktere gleich 1, welche den  $\gamma$  Substitutionen der Gruppe  $\mathfrak{J}$  entsprechen, so wird dadurch eine Gruppe von genau  $g = \frac{G}{\gamma}$  Argumenten

$$g_1^{b_{1j}} g_2^{b_{2j}} \dots g_R^{b_{Rj}}; 0 \leq b_{rj} \leq c_r - 1; j = 1, 2, \dots g, r = 1, 2, \dots R;$$

festgelegt (Hecke, pg. 36/38), die also *alle*  $\gamma$  Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} e \quad 2 \pi i \left\{ \frac{x_{11}}{c_1} b_{1j} + \frac{x_{21}}{c_2} b_{2j} + \frac{x_{31}}{c_3} b_{3j} + \dots + \frac{x_{R1}}{c_R} b_{Rj} \right\} \\ e \quad 2 \pi i \left\{ \frac{x_{12}}{c_1} b_{1j} + \frac{x_{22}}{c_2} b_{2j} + \frac{x_{32}}{c_3} b_{3j} + \dots + \frac{x_{R2}}{c_R} b_{Rj} \right\} \\ e \quad 2 \pi i \left\{ \frac{x_{13}}{c_1} b_{1j} + \frac{x_{23}}{c_2} b_{2j} + \frac{x_{33}}{c_3} b_{3j} + \dots + \frac{x_{R3}}{c_R} b_{Rj} \right\} \\ \dots \dots \dots \\ e \quad 2 \pi i \left\{ \frac{x_{1\gamma}}{c_1} b_{1j} + \frac{x_{2\gamma}}{c_2} b_{2j} + \frac{x_{3\gamma}}{c_3} b_{3j} + \dots + \frac{x_{R\gamma}}{c_R} b_{Rj} \right\} \end{array} \right\} = 1 \quad j = 1, 2, \dots g \quad (57)$$

befriedigen.

Die übrigens zu  $\mathfrak{G}/\mathfrak{J}$  isomorphe Untergruppe von Charakteren ist mithin folgende

$$X_1^{b_1 b_{1j}}(a) X_2^{b_2 b_{2j}}(a) \dots X_R^{b_R b_{Rj}}(a); j = 1, 2, \dots g; \quad (58)$$

wo die Charaktere dieselbe Bedeutung haben wie eben und im § 5.

Es ist für später wichtig, noch zu bemerken, daß man diese Gruppe von Charakteren als die zur Gruppe der  $\mathfrak{J}$  zugeordneten Charaktere *reziproke* Gruppe nennt. Denn es geht aus einer aufmerksamen Betrachtung der Kette der Gleichungen (56) unmittelbar hervor, daß die reziproke Charakteren-Gruppe der reziproken Charakteren-Gruppe die ursprüngliche Charakteren-Gruppe selbst ist. Oder anders ausgedrückt: Nur die  $\gamma$  Systeme von Zahlen

$$\begin{aligned}
& (x_{11}, x_{21}, x_{31}, \dots x_{R1}) \\
& (x_{12}, x_{22}, x_{32}, \dots x_{R2}) \\
& (x_{13}, x_{23}, x_{33}, \dots x_{R3}) \\
& \dots\dots\dots \\
& (x_{1\gamma}, x_{2\gamma}, x_{3\gamma}, \dots x_{R\gamma})
\end{aligned}$$

befriedigen *alle*  $g$  Gleichungen:  $j = 1, 2, \dots g$ :

$$e \quad 2\pi i \left\{ \frac{x_1}{c_1} b_{1j} + \frac{x_2}{c_2} b_{2j} + \frac{x_3}{c_3} b_{3j} + \dots + \frac{x_R}{c_R} b_{Rj} \right\} = 1.$$

Die Tatsache, daß  $U$  nicht Unterkörper eines niedrigeren Ausgangs-Kreiskörpers ist, drückt sich so aus, daß alle Moduln

$$(c_r; b_{r1}, b_{r2}, b_{r3}, \dots b_{rg}) = 1, \quad r = 1, 2, \dots R \quad (59)$$

sind. Denn wäre dies nicht der Fall und etwa:

$$(c_r; b_{r1}, b_{r2}, b_{r3}, \dots b_{rg}) = (b'_r), \quad b'_r > 1,$$

so ist klar, daß bei festgehaltenem  $x_{1t}, x_{2t}, \dots x_{r-1,t}, x_{r+1,t}, \dots x_{Rt}$  mit  $x_{rt}$  auch  $x_{rt} + \frac{c_r}{b'_r}, x_{rt} + \frac{2c_r}{b'_r}, \dots x_{rt} + \frac{(b'_r - 1)c_r}{b'_r}$  unter den Exponenten-Systemen der Substitutionen von  $\mathfrak{J}$  auftreten würde, und

folglich wäre die Substitution  $s_r^{\frac{c_r}{b'_r}}$  in  $\mathfrak{J}$ . Das ist aber gegen die Voraussetzung falls  $b'_r > 1$ .

Es sei jetzt  $p$  eine zu  $\bar{m}$  teilerfremde Primzahl,  $p$  darf hier also auch gleich 2 sein. Die Primitivwurzeln mod.  $l_r^{h_r}$  und daher auch die Indices seien die gleichen wie in § 5.

Wir betrachten jetzt die  $\gamma$  simultanen Kongruenzen [vgl. (54)]:

$$\left. \begin{aligned}
f_t \cdot \text{ind}_1 p &\equiv x_{1t} \pmod{c_1} \\
f_t \cdot \text{ind}_2 p &\equiv x_{2t} \pmod{c_2} \\
f_t \cdot \text{ind}_3 p &\equiv x_{3t} \pmod{c_3} \\
\dots\dots\dots \\
f_t \cdot \text{ind}_R p &\equiv x_{Rt} \pmod{c_R}
\end{aligned} \right\} t = 1, 2, \dots \gamma. \quad (60)$$

Falls eine solche simultane Kongruenz (bei festem  $t$ ) überhaupt eine Lösung  $f_t$  zuläßt, nehme man das kleinste positive  $f_t$ , welches alle  $R$

simultanen Kongruenzen befriedigt. Wenn für ein festes  $t$  *keine* Lösung  $f_t$  existiert, so ist  $f_t$  gar nicht definiert. Die Zahlen  $f_t$ , welche so existieren, bilden einen Modul, weil die zugehörigen Substitutionen von  $\mathfrak{J}$ , wie man ohne weiteres einsieht, eine Untergruppe von  $\mathfrak{J}$  bilden. Im ungünstigsten Falle ist nur *ein* Wert  $f_t$  erklärt, der der Einheits-Substitution von  $\mathfrak{J}$  entspricht und gleich unserem früheren  $f$  (vgl. § 5) ist. Es sei dann  $f$  der größte gemeinschaftliche Teiler aller  $f_t$ , dann ist jedes  $f_t$  ein Vielfaches von  $f$ , also auch unser früheres  $f$ . Endlich gibt es sicher mindestens einen Index  $T$ , für welchen

$$\left. \begin{aligned} f \cdot \text{ind}_1 p &\equiv x_{1T} \pmod{c_1} \\ f \cdot \text{ind}_2 p &\equiv x_{2T} \pmod{c_2} \\ f \cdot \text{ind}_3 p &\equiv x_{3T} \pmod{c_3} \\ &\dots\dots\dots \\ f \cdot \text{ind}_R p &\equiv x_{RT} \pmod{c_R} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

ist; dies wieder, weil die Substitutionen von  $\mathfrak{J}$ , denen ein  $f_t$  entspricht, eine Untergruppe von  $\mathfrak{J}$  bilden. Man sieht übrigens, daß es zu jedem  $f_t$  nur *eine* Substitution geben kann, sodaß die Kongruenzen (60) gelten, denn die linke Seite jeder Kongruenz legt doch die rechte Seite nach dem Modul  $c_r$  eindeutig fest. Mithin bilden die Substitutionen, denen ein  $f_t$  entspricht, eine zyklische Gruppe vom Grade  $\frac{f}{f}$ .

Jede ganze Zahl  $\alpha$  von  $U$  läßt sich so darstellen:

$$\alpha = P(Z_1, Z_2, \dots Z_R).$$

Es sei jetzt  $F$  eine beliebige positive ganze rationale Zahl. Dann ist wie in § 5, vgl. die Kongruenz (24):

$$\alpha p^F \equiv s_1^{F \text{ ind}_1 p} s_2^{F \text{ ind}_2 p} \dots s_R^{F \text{ ind}_R p} \alpha \pmod{p} \quad (62)$$

Insbesondere ist für das in (61) erklärte  $f$ , weil  $\alpha$  nach Voraussetzung invariant ist unter  $\mathfrak{J}$ :

$$\alpha p^f \equiv s_1^{f \text{ ind}_1 p} s_2^{f \text{ ind}_2 p} \dots s_R^{f \text{ ind}_R p} \alpha \equiv s_1^{x_{1T}} s_2^{x_{2T}} \dots s_R^{x_{RT}} \alpha \equiv \alpha \pmod{p}$$

Also ist a fortiori für jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $U$ , welches  $p$  teilt

$$\alpha p^f \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Ist  $f'$  der Grad von  $p$  in  $U$ :

$$n(p) = p^{f'},$$

so ist für jede Restklasse mod.  $p$

$$\alpha p^{f'} \equiv \alpha \pmod{p}, \quad (63)$$

und es gibt auch kein kleineres  $f'' < f'$  mit dieser Eigenschaft. Folglich ist  $f' \leq f$ . Wir behaupten:  $f' = f$ . Denn wäre  $f' < f$ , so wäre für jede ganze Zahl  $\alpha$  von  $U$  gemäß (62) und (63):

$$\alpha p^{f'} \equiv s_1^{f' \text{ ind}_1 p} s_2^{f' \text{ ind}_2 p} \dots s_R^{f' \text{ ind}_R p} \alpha \equiv \alpha \pmod{p}.$$

Die Substitution

$$s_1^{f' \text{ ind}_1 p} s_2^{f' \text{ ind}_2 p} \dots s_R^{f' \text{ ind}_R p}$$

gehört aber gewiß zur Galois'schen Gruppe von  $U$  und ist von der Identität verschieden. Denn es widerspräche der Definition von  $f$ , falls für  $f' < f$  ein festes  $t$  existieren würde, sodaß die  $R$  simultanen Kongruenzen (60) erfüllt wären für  $f_t = f'$ . Analog wie in § 5 folgt jetzt, daß das Element von  $U$ :

$$\left( (\alpha_1 - s_1^{f' \text{ ind}_1 p} s_2^{f' \text{ ind}_2 p} \dots s_R^{f' \text{ ind}_R p} \alpha_1), \right. \\ \left. (\alpha_2 - s_1^{f' \text{ ind}_1 p} s_2^{f' \text{ ind}_2 p} \dots s_R^{f' \text{ ind}_R p} \alpha_2), \dots \right)$$

durch  $p$  teilbar wäre. Das ist aber ein Widerspruch und  $f' = f$ . Mithin haben alle Primideale  $p$  von  $U$ , welche  $p$  teilen, den durch die Kongruenzen (61) erklärten Grad  $f$  und es gibt  $e = \frac{g}{f}$  voneinander verschiedene. Denn  $p$  ist ja zur Körperdiskriminante teilerfremd.

Es gilt immer noch die Gleichung

$$\prod_{p/p} (1 - n(p)^{-s})^{-1} = \prod_x (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}, \quad (64)$$

wo links  $p$  über alle voneinander verschiedenen Primteiler  $p$  in  $U$  von  $p$  zu erstrecken ist, und rechts  $\chi$  über alle den Charakteren in (58) zugeordneten eigentlichen Charaktere. Da  $p$  zu  $\bar{m}$  teilerfremd ist, kann

man summieren über die uneigentlichen Charaktere. Jeder Charakter ist eine  $f$ te Einheitswurzel, denn es ist für  $j = 1, 2, \dots, g$  nach (61) und (57):

$$\begin{aligned} e^{2\pi i \cdot f \left\{ \frac{b_{1j} \text{ind}_1 p}{c_1} + \frac{b_{2j} \text{ind}_2 p}{c_2} + \dots + \frac{b_{Rj} \text{ind}_R p}{c_R} \right\}} &= \\ &= e^{2\pi i \left\{ \frac{b_{1j} x_{1T}}{c_1} + \frac{b_{2j} x_{2T}}{c_2} + \dots + \frac{b_{Rj} x_{RT}}{c_R} \right\}} = 1. \end{aligned}$$

Es gibt auch mindestens einen Charakter, der eine  $f$ te und keine niedrigere Einheitswurzel, eine  $f''$ te mit  $f'' < f$ , ist. Denn wäre dies der Fall, so wäre für jedes  $j = 1, 2, \dots, g$ :

$$e^{2\pi i \cdot f'' \left\{ \frac{b_{1j} \text{ind}_1 p}{c_1} + \frac{b_{2j} \text{ind}_2 p}{c_2} + \dots + \frac{b_{Rj} \text{ind}_R p}{c_R} \right\}} = 1.$$

Nach einer auf pg. 204 gemachten Bemerkung würde aber daraus folgen, daß für einen wohlbestimmten Index  $t$  der Reihe  $t = 1, 2, \dots, \gamma$  die  $R$  simultanen Kongruenzen bestehen würden:

$$\begin{aligned} f'' \cdot \text{ind}_1 p &\equiv x_{1t} \pmod{c_1} \\ f'' \cdot \text{ind}_2 p &\equiv x_{2t} \pmod{c_2} \\ f'' \cdot \text{ind}_3 p &\equiv x_{3t} \pmod{c_3} \\ &\dots\dots\dots \\ f'' \cdot \text{ind}_R p &\equiv x_{Rt} \pmod{c_R} \end{aligned}$$

Das ist aber ein Widerspruch gegen die Definition von  $f$ .

Bei festgehaltenem Argument kommt aber in einer Charakterengruppe, wie also

$$X_1^{b_1 b_{1j}}(p) X_2^{b_2 b_{2j}}(p) \dots X_R^{b_R b_{Rj}}(p); j = 1, 2, \dots, g,$$

jede  $f$ te Einheitswurzel gleich oft vor (Hecke, Satz 32, pg. 35), mithin  $\frac{g}{f} = e$  mal. Damit ist aber die Gleichung (64) bewiesen, denn die linke Seite ergibt ebenso

$$(1 - p^{-sf})^{-e}.$$



Es sei jetzt  $l = l_R$  ein Primteiler von  $\bar{m}$ .

Die  $\gamma$  Substitutionen:

$$\begin{aligned} & s_1^{x_{11}} s_2^{x_{21}} s_3^{x_{31}} \dots s_{R-1}^{x_{R-1,1}} \\ & s_1^{x_{12}} s_2^{x_{22}} s_3^{x_{32}} \dots s_{R-1}^{x_{R-1,2}} \\ & \dots \dots \dots \\ & s_1^{x_{1\gamma}} s_2^{x_{2\gamma}} s_3^{x_{3\gamma}} \dots s_{R-1}^{x_{R-1,\gamma}}, \end{aligned}$$

die aus den Substitutionen der Gruppe  $\mathfrak{J}$  durch Unterdrückung des letzten Faktors entstehen, sind dann alle von einander verschieden und bilden eine Gruppe  $\mathfrak{J}'$ . In der Tat können nicht zwei von ihnen einander gleich sein, weil sonst die Substitution  $s_R^{x_R}$  mit einem gewissen  $x_R$ , für welches  $0 < x_R < c_R$  wäre, in der Gruppe  $\mathfrak{J}$  vorkommen würde.

Wir betrachten die  $R-1$  simultanen Kongruenzen:

$$\left. \begin{aligned} f_t \cdot \text{ind}_1 l &\equiv x_{1t} \pmod{c_1} \\ f_t \cdot \text{ind}_2 l &\equiv x_{2t} \pmod{c_2} \\ &\dots \dots \dots \\ f_t \cdot \text{ind}_{R-1} l &\equiv x_{R-1,t} \pmod{c_{R-1}} \end{aligned} \right\} t = 1, 2, \dots \gamma.$$

Wie oben (pg. 206) schließt man, daß es ein kleinstes positives  $f$  und einen Index  $T$  derart gibt, daß die  $R-1$  simultanen Kongruenzen

$$\begin{aligned} f \cdot \text{ind}_1 l &\equiv x_{1T} \pmod{c_1} \\ f \cdot \text{ind}_2 l &\equiv x_{2T} \pmod{c_2} \\ &\dots \dots \dots \\ f \cdot \text{ind}_{R-1} l &\equiv x_{R-1,T} \pmod{c_{R-1}} \end{aligned}$$

erfüllt sind, und jedes  $f_t$ , welches überhaupt existiert, ebenso unser früheres  $f^*$ , ein Vielfaches dieses  $f$  ist.

Wir behaupten, daß  $f$  der Grad jedes Primideales  $\mathfrak{l}$  von  $U$  ist, welches  $l = l_R$  teilt. Wir bezeichnen die Ideale in  $U$  mit Minuskeln (ohne Stern und unüberstrichen), die Ideale in  $K$  mit Majuskeln.

1. Im Unterkörper  $\bar{k}$  von  $K$  vom Grade  $c_R$  ist (vgl. pg. 184):

$$l = \bar{\mathfrak{l}}^{c_R}.$$

Die Zerlegungsgruppe ist die volle Galois'sche Gruppe, denn

$$\begin{aligned}s_R \bar{I} &= \bar{I} \\ s_R^2 \bar{I} &= \bar{I} \\ &\dots\dots\dots \\ s_R^{c_R} \bar{I} &= \bar{I}.\end{aligned}$$

Auch die Trägheitsgruppe ist die volle Galois'sche Gruppe, denn

$$s_R \bar{\alpha} - \bar{\alpha} \equiv 0 \pmod{\bar{\mathfrak{L}}},$$

wo  $\bar{\mathfrak{L}}$  das Primideal im Körper der  $l_R^{h_R}$ ten Einheitswurzel ist, welches  $\bar{I}$  teilt, und  $\bar{\alpha}$  eine beliebige ganze Zahl von  $\bar{k}$ . Mithin gilt diese Kongruenz auch  $\pmod{\bar{I}}$ .

2. Im Unterkörper  $k^*$  vom Grade  $c_1 c_2 \dots c_{R-1}$  ist

$$l = l_1^* \cdot l_2^* \dots l_{e^*}^*, \quad (65)$$

wo  $e^* f^* = c_1 c_2 \dots c_{R-1}$  und  $f^*$  die kleinste positive Zahl ist, für welche alle  $R-1$  simultanen Kongruenzen:

$$f^* \cdot \text{ind}_r l \equiv 0 \pmod{c_r}, \quad r = 1, 2, \dots (R-1),$$

erfüllt sind. Es sei  $\pi^*$  eine Primitivwurzel mod.  $I^*$ , wo  $I^*$  irgend eines der Ideale  $I_1^*, I_2^*, \dots I_{e^*}^*$  ist. Ferner liege  $\pi^*$  in jedem dieser Ideale außer natürlich in  $I^*$ . Die Zahl  $\pi^*$  genügt dann einer irreduzibeln Kongruenz  $f^*$ ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten:

$$F(x) \equiv 0 \pmod{I^*}.$$

Diese Kongruenz hat, wie man auf Grund des Fermat'schen Satzes einsieht, die Wurzeln:

$$\pi^{*l}, \pi^{*l^2}, \dots \pi^{*l^{f^*}} \equiv \pi^*.$$

Diese Wurzeln kann man, da sie ja nur mod.  $I^*$  festgelegt sind, auch so ausdrücken:

$$(s^{\text{ind } l})^n \pi^*, \quad n = 1, 2, \dots f^*$$

wo zur Abkürzung  $s^{\text{ind } l}$  für:  $s_1^{\text{ind}_1 l} s_2^{\text{ind}_2 l} \dots s_{R-1}^{\text{ind}_{R-1} l}$  steht. Die zyklische Gruppe  $f^*$  ten Grades dieser Substitutionen bildet die Zerlegungsgruppe von  $l^*$ . Denn die Annahme, daß eine dieser Substitutionen nicht zur Zerlegungsgruppe gehöre, führt zu einem Widerspruch. Es würde dann nämlich für mindestens ein  $n \neq f^*$  gelten:

$$\pi^* \equiv 0 \pmod{s^{-n \text{ind } l} l^*}, \text{ also } (s^{\text{ind } l})^n \pi^* \equiv 0 \pmod{l^*},$$

$$\text{oder } \pi^* l^n \equiv 0 \pmod{l^*}.$$

Das ist aber nicht möglich.

Aus der Darstellung (65) geht ferner hervor, daß die Trägheitsgruppe aus der Einheitsoperation allein besteht:

$$s_1^{c_1} s_2^{c_2} \dots s_{R-1}^{c_{R-1}} \alpha^* - \alpha^* \equiv 0 \pmod{l^*}.$$

3. Im Körper  $K$  ist in Primideal-Darstellung

$$l = \left\{ \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \dots \mathfrak{L}_{e^*} \right\}^{c_R}, \quad e^* f^* c_R = G, \quad (66)$$

wo  $\mathfrak{L}_i = (l_i^*, \bar{l})$ , siehe pg. 185.

Es sei  $A_i$  irgend eine ganze Zahl von  $\mathfrak{L}_i$  in  $K$ . Alle Zahlen  $\lambda_i^*$  von  $k^*$ , welche durch  $A_i$  teilbar sind, liegen dann im Ideal  $l_i^*$ , und alle Zahlen  $\bar{\lambda}$  von  $\bar{k}$ , welche durch  $A_i$  teilbar sind, liegen im Ideal  $\bar{l}$ . Die Zahl  $s_R A_i$  ist dann irgend eine Zahl vom Ideal  $s_R \mathfrak{L}_i$  in  $K$ . Alle Zahlen von  $k^*$ , welche durch  $s_R A_i$  teilbar sind, liegen dann im Ideal  $s_R l_i^* = l_i^*$ , und alle Zahlen von  $\bar{k}$ , welche durch  $s_R A_i$  teilbar sind, liegen im Ideal  $s_R \bar{l} = \bar{l}$ . Mithin ist  $s_R \mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}_i$ .

$s^{\text{ind } l} A_i$  ist dann ferner irgend eine Zahl vom Ideal  $s^{\text{ind } l} \mathfrak{L}_i$  in  $K$ . Alle Zahlen von  $k^*$ , welche durch  $s^{\text{ind } l} A_i$  teilbar sind, liegen dann im Ideal  $s^{\text{ind } l} l_i^* = l_i^*$ , und alle Zahlen von  $\bar{k}$ , welche durch  $s^{\text{ind } l} A_i$  teilbar sind, liegen im Ideal  $s^{\text{ind } l} \bar{l} = \bar{l}$ . Mithin ist  $s^{\text{ind } l} \mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}_i$ .

Zur Zerlegungsgruppe  $\mathfrak{Z}$  von  $\mathfrak{L}_i$  in  $K$  gehören demnach die  $c_R f^*$  Substitutionen

$$(s^{\text{ind } l})^n s_R^{n_R} = (s_1^{\text{ind}_1 l} s_2^{\text{ind}_2 l} \dots s_{R-1}^{\text{ind}_{R-1} l})^n s_R^{n_R}, \quad \begin{cases} 0 \leq n \leq f^* - 1 \\ 0 \leq n_R \leq c_R - 1 \end{cases}$$

und aus der Darstellung (66) folgt, daß dies auch *alle* Substitutionen der Zerlegungsgruppe  $\mathfrak{Z}$  von  $\mathfrak{L}_i$  in  $K$  sind.

Die Ideale  $\mathfrak{L}_i$  haben den Grad  $f^*$  und folglich besteht ihre Trägheitsgruppe  $\mathfrak{T}$  aus  $c_R$  Substitutionen. Man sieht unmittelbar, daß es die Substitutionen

$$s_R^{n_R}, \text{ wo } 0 \leq n_R \leq c_R - 1$$

sind.

Damit kennen wir die Zerlegungsgruppe  $\mathfrak{J}$  und die Trägheitsgruppe  $\mathfrak{T}$  jedes Primideales  $\mathfrak{L}_i$  in  $K$ .

4. Wir betrachten jetzt die Zerfällung von  $l$  in Primideale  $l_i$  in  $U$ :

$$l = \{ l_1 l_2 \dots l_e \}^c. \quad (67)$$

Die Substitutionen  $s_R^{n_R}$ , wo  $n_R = 1, 2, \dots, c_R - 1$ ,  $c_R$  ist, gehören gewiß zur Trägheitsgruppe  $t$  irgend eines Ideales  $l_i$  in  $U$ . Denn es ist für jedes Ideal  $\mathfrak{L}_j$  in  $K$  und jede ganze Zahl  $A$  von  $K$

$$s_R A - A \equiv 0 \pmod{\mathfrak{L}_j},$$

also a fortiori für jede ganze Zahl  $\alpha$  von  $U$  und jedes Ideal  $l_i$  von  $U$

$$s_R \alpha - \alpha \equiv 0 \pmod{l_i}.$$

Die Substitutionen  $s_R, s_R^2, \dots, s_R^{c_R}$  sind aber, abgesehen von der Identität  $(s_R^{c_R})$ , alle verschieden von den  $\gamma$  Substitutionen der Gruppe  $\mathfrak{J}$ . Daher besteht die Trägheitsgruppe jedes Ideals  $l_i$  von  $U$  mindestens aus den Substitutionen:

$$\mathfrak{J} \cdot s_R^0 + \mathfrak{J} \cdot s_R^1 + \mathfrak{J} \cdot s_R^2 + \dots + \mathfrak{J} \cdot s_R^{c_R-1},$$

und folglich ist der Grad der Trägheitsgruppe jedes Ideals  $l_i$  mindestens gleich  $c_R$ :

$$c \geq c_R.$$

Aber die Ungleichung kann nicht bestehen, denn es geht aus den (in jedem Galois'schen Körper geltenden) Darstellungen (66) und (67) hervor, daß  $c \leq c_R$  ist. Mithin ist

$$c = c_R.$$

Die Trägheitsgruppe  $t$  umfasst mithin die Substitutionen, die wir auch so schreiben können:

$$t = \mathfrak{J}' \cdot s_R^0 + \mathfrak{J}' \cdot s_R^1 + \mathfrak{J}' \cdot s_R^2 + \dots + \mathfrak{J}' \cdot s_R^{c_R-1}.$$

Die Substitutionen, die sowohl  $\mathfrak{J}'$ , als auch der zyklischen Gruppe

$$(s^{\text{ind } l})^n, 0 \leq n \leq f^* - 1$$

angehören, bilden eine zyklische Untergruppe dieser zyklischen Gruppe. Ihr Grad ist  $\frac{f^*}{f}$ . Bildet man die Gruppe  $\bar{\mathfrak{J}}$  aller Substitutionen, die so entstehen, daß man eine beliebige Substitution aus  $\mathfrak{J}$  mit einer beliebigen Substitution aus  $\mathfrak{J}'$  multipliziert, so entstehen genau

$$f^* c_R \gamma : \frac{f^*}{f} = f c_R \gamma$$

voneinander verschiedene Substitutionen von  $\mathfrak{G}$ . Alle gehören zur Zerlegungsgruppe  $\mathfrak{z}$  von  $I_i$  in  $U$  und mithin ist der Grad von  $I_i$  in  $U$  mindestens gleich  $f$ . Der Grad von  $I_i$  kann aber nicht größer sein als  $f$ . Denn sonst müßte es in  $\mathfrak{z}$  eine Substitution  $s$  geben, die nicht in  $\bar{\mathfrak{J}}$  liegt, und für welche

$$s I_i = I_i$$

wäre.

Die Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{J}$  hat den Grad  $e^*$  und es ist

$$l = \left\{ s_{(1)} \mathfrak{L} \cdot s_{(2)} \mathfrak{L} \dots s_{(e^*)} \mathfrak{L} \right\}^{c_R}; s_{(1)} = \text{Identität}, s_{(i)} \mathfrak{L} \neq s_{(k)} \mathfrak{L}, i \neq k,$$

falls die Substitutionen je einer der  $e^*$  voneinander verschiedenen Nebengruppen von  $\mathfrak{J}$  unter  $\mathfrak{G}$  entnommen werden. Es gibt dann genau  $\gamma : \frac{f^*}{f} = \frac{\gamma f}{f^*}$  unter diesen Nebengruppen von  $\mathfrak{J}$  unter  $\mathfrak{G}$ , die eine auch in  $\mathfrak{J}'$  liegende Substitution enthalten, so daß bei geeigneter Wahl der Bezeichnung

$$s_{(1)} \mathfrak{L} \cdot s_{(2)} \mathfrak{L} \dots s_{\left(\frac{\gamma f}{f^*}\right)} \mathfrak{L}, \quad s_{(1)} = I$$

in  $U$  liegt; und da kein Primideal von  $K$  in höherer als erster Potenz in einem Primideal von  $U$  aufgeht ( $c = c_R$ ), so ist bei geeigneter Wahl von  $\mathfrak{L}$

$$I_i = s_{(1)} \mathfrak{L} \cdot s_{(2)} \mathfrak{L} \dots s_{\left(\frac{\gamma f}{f^*}\right)} \mathfrak{L}.$$

Die Substitution  $s$  müßte nun der Reihe  $s_{\left(\frac{\gamma f}{f^*} + 1\right)}, s_{\left(\frac{\gamma f}{f^*} + 2\right)}, \dots s_{(e^*)}$  angehören, da sie nicht zu  $\bar{\mathfrak{z}}$  gehört. Es wäre dann

$$s I_i = s s_{(1)} \mathfrak{L} \cdot s s_{(2)} \mathfrak{L} \dots s s_{\left(\frac{\gamma f}{f^*}\right)} \mathfrak{L} = I_i = s_{(1)} \mathfrak{L} \cdot s_{(2)} \mathfrak{L} \dots s_{\left(\frac{\gamma f}{f^*}\right)} \mathfrak{L}.$$

Folglich müßte  $s s_{(1)} = s = s_{(k)}$ ;  $k = 1, 2, \dots \frac{\gamma f}{f^*}$  sein, d. h.  $s$  müßte zu  $\bar{\mathfrak{z}}$  gehören. Das ist ein Widerspruch. Damit ist bewiesen, daß der Grad von  $I$  in  $U$  gleich  $f$  ist.

Analog wie oben beweist man jetzt die Gleichung

$$\prod_{l|l} (1 - n(l)^{-s})^{-1} = \prod_{\chi} (1 - \chi(l) l^{-s})^{-1},$$

wo links  $I$  über alle voneinander verschiedenen Primteiler  $I_i$  von  $U$  zu erstrecken ist, welche  $l$  teilen, und rechts  $\chi$  über alle, den Charakteren in (58) zugeordneten eigentlichen Charaktere.

Zunächst ist nämlich der Charakter auf der rechten Seite nur von Null verschieden, wenn  $b_{Rj} \equiv 0 \pmod{c_R}$  ist (Vgl. § 1). Dann aber ist der  $X_R^{b_R} b_{Rj}(l)$  zugeordnete eigentliche Charakter gleich 1 und der zugeordnete eigentliche Charakter hat den Wert (vgl. immer den § 1):

$$\chi(l) = X_1^{b_1} b_{1j}(l) X_2^{b_2} b_{2j}(l) \dots X_{R-1}^{b_{R-1}} b_{R-1,j}(l),$$

weil  $l$  zu den andern Primteilern vom  $\bar{m}$  teilerfremd ist. Der weitere Beweis ist der gleiche wie oben. [Vgl. Bemerkung zu Formel (72)].

Mithin gilt auch in  $U$  die Formel

$$\zeta_U(s) = \prod_{\chi} L(s, \chi),$$

wo  $\chi$  über alle den Charakteren (58) zugeordneten eigentlichen Charaktere zu erstrecken ist.

Dieses Resultat ist auch gültig, mutatis mutandis, wenn es sich um Unterkörper  $U$  handelt, die nicht Unterkörper eines niedrigeren Ausgangskörpers sind, und der Ausgangskörper dabei den reellen Körper

vom Grade  $2^{h_0-2}$ , wo  $h_0 \geq 3$ , oder den vollen Körper der  $2^{h_0}$ ten Einheitswurzel ( $h_0 \geq 2$ ) noch enthält.

Im ersten Falle möge  $U$  wieder den Relativgrad  $\gamma$  haben, dann sind die Substitutionen der Gruppe  $\mathfrak{J}$  von der Form (vgl. das Ende von § 5):

$$s_*^{x_{*t}} s_1^{x_{1t}} s_2^{x_{2t}} \dots s_R^{x_{Rt}}; t = 1, 2, \dots \gamma; \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_{*t} \leq 2^{h_0-2} - 1 \\ 0 \leq x_{rt} \leq c_r - 1, r = 1, 2, \dots R. \end{array} \right.$$

Das System der Gleichungen (57) wird ersetzt durch das folgende:

$$\left. \begin{array}{l} e \quad 2\pi i \left\{ \frac{x_{*1}}{2^{h_0-2}} b_{*j} + \frac{x_{11}}{c_1} b_{1j} + \frac{x_{21}}{c_2} b_{2j} + \dots + \frac{x_{R1}}{c_R} b_{Rj} \right\} \\ e \quad 2\pi i \left\{ \frac{x_{*2}}{2^{h_0-2}} b_{*j} + \frac{x_{12}}{c_1} b_{1j} + \frac{x_{22}}{c_2} b_{2j} + \dots + \frac{x_{R2}}{c_R} b_{Rj} \right\} \\ e \quad 2\pi i \left\{ \frac{x_{*3}}{2^{h_0-2}} b_{*j} + \frac{x_{13}}{c_1} b_{1j} + \frac{x_{23}}{c_2} b_{2j} + \dots + \frac{x_{R3}}{c_R} b_{Rj} \right\} \\ \dots \dots \dots \\ e \quad 2\pi i \left\{ \frac{x_{*\gamma}}{2^{h_0-2}} b_{*j} + \frac{x_{1\gamma}}{c_1} b_{1j} + \frac{x_{2\gamma}}{c_2} b_{2j} + \dots + \frac{x_{R\gamma}}{c_R} b_{Rj} \right\} \end{array} \right\} j = 1, 2, \dots g = \frac{G}{\gamma} \quad (68)$$

Es ist dann, vgl. (59):

$$\begin{aligned} (b_{*1}, b_{*2}, b_{*3}, \dots b_{*g}, 2^{h_0-2}) &= 1, \\ (b_{r1}, b_{r2}, b_{r3}, \dots b_{rg}, c_r) &= 1; r = 1, 2, \dots R. \end{aligned}$$

Die zu  $\mathfrak{G}/\mathfrak{J}$  isomorphe Untergruppe von Charakteren ist die folgende:

$$X_*^{b_{*j}}(a) X_1^{b_{1j}}(a) X_2^{b_{2j}}(a) \dots X_R^{b_{Rj}}(a); j = 1, 2, \dots g = \frac{G}{\gamma}.$$

$X_*(a)$  ist der am Ende von § 5 erklärte Charakter.

Im zweiten Fall möge  $U$  auch wieder den Relativgrad  $\gamma$  haben, dann ist die Gruppe  $\mathfrak{J}$  von der Form (vgl. Ende von § 5):

$$s_0^{x_{0t}} s_*^{x_{*t}} s_1^{x_{1t}} s_2^{x_{2t}} \dots s_R^{x_{Rt}}; t = 1, 2, \dots \gamma. \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_{0t} \leq 1 \\ 0 \leq x_{*t} \leq 2^{h_0-2} - 1 \\ 0 \leq x_{rt} \leq c_r - 1, r = 1, 2, \dots R. \end{array} \right.$$

Das System der Gleichungen (57) wird ersetzt durch das folgende:

$$\left. \begin{array}{l}
 e \quad 2 \pi i \left\{ \frac{x_{01}}{2} b_{0j} + \frac{x_{*1}}{2^{\hbar_0-2}} b_{*j} + \frac{x_{11}}{c_1} b_{1j} + \frac{x_{21}}{c_2} b_{2j} + \dots + \frac{x_{R1}}{c_R} b_{Rj} \right\} \\
 e \quad 2 \pi i \left\{ \frac{x_{02}}{2} b_{0j} + \frac{x_{*2}}{2^{\hbar_0-2}} b_{*j} + \frac{x_{12}}{c_1} b_{1j} + \frac{x_{22}}{c_2} b_{2j} + \dots + \frac{x_{R2}}{c_R} b_{Rj} \right\} \\
 e \quad 2 \pi i \left\{ \frac{x_{03}}{2} b_{0j} + \frac{x_{*3}}{2^{\hbar_0-2}} b_{*j} + \frac{x_{13}}{c_1} b_{1j} + \frac{x_{23}}{c_2} b_{2j} + \dots + \frac{x_{R3}}{c_R} b_{Rj} \right\} \\
 \dots \dots \dots \\
 e \quad 2 \pi i \left\{ \frac{x_{0\gamma}}{2} b_{0j} + \frac{x_{*\gamma}}{2^{\hbar_0-2}} b_{*j} + \frac{x_{1\gamma}}{c_1} b_{1j} + \frac{x_{2\gamma}}{c_2} b_{2j} + \dots + \frac{x_{R\gamma}}{c_R} b_{Rj} \right\} \\
 \dots \dots \dots \\
 e \quad 2 \pi i \left\{ \frac{x_{0\gamma}}{2} b_{0j} + \frac{x_{*\gamma}}{2^{\hbar_0-2}} b_{*j} + \frac{x_{1\gamma}}{c_1} b_{1j} + \frac{x_{2\gamma}}{c_2} b_{2j} + \dots + \frac{x_{R\gamma}}{c_R} b_{Rj} \right\}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l} = 1 \\ = 1 \\ = 1 \\ \dots \\ = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \\ \dots g = \frac{G}{\gamma}. \end{array} \quad (69)$$

Es ist dann, vgl. (59):

$$\begin{aligned}
 (b_{01}, b_{02}, b_{03}, \dots, b_{0g}, 2) &= 1 \\
 (b_{*1}, b_{*2}, b_{*3}, \dots, b_{*g}, 2^{\hbar_0-2}) &= 1 \\
 (b_{r1}, b_{r2}, b_{r3}, \dots, b_{rg}, c_r) &= 1; \quad r = 1, 2, \dots, R.
 \end{aligned}$$

Die zu  $\mathfrak{G}/\mathfrak{J}$  isomorphe Untergruppe von Charakteren ist die folgende:

$$X_0^{b_{0j}}(a) X_*^{b_{*j}}(a) X_1^{b_{1j}}(a) X_2^{b_{2j}}(a) \dots X_R^{b_{Rj}}(a); \quad j = 1, 2, \dots, g.$$

$X_0(a)$  ist der am Ende von § 5 erklärte Charakter.

## § 9. Die Umformung des Ausdruckes für die Zetafunktion von $\mathcal{U}$

Die Funktion  $\xi_U(s)$  hat in allen Fällen die Gestalt:

$$\xi_U(s) = \xi(s) \cdot \prod_x L(s, \chi),$$

oder, vergleiche Formel (41):



$$\begin{aligned}
\zeta_U(s) = & \prod_{\chi(-1)=-1} \left\{ \frac{i\pi}{G(1, \chi)} \sum_{k=1}^{\frac{t_\chi}{2}} \chi(k) \frac{k}{t_\chi} \right\} \cdot \prod_{\chi(-1)=+1} \left\{ \frac{2}{G(1, \chi)} \sum_{k=1}^{\frac{t_\chi}{2}} \chi(k) \cdot \log \sin \frac{\pi k}{t_\chi} \right\} \times \\
& \times \left[ \frac{1}{s-1} + gE + (g-1) \log 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{\chi(-1)=-1} \left( \frac{\sum_{k=1}^{\frac{t_\chi}{2}} \chi(k) \log \frac{\Gamma\left(\frac{k}{t_\chi}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{k}{t_\chi}\right)}}{\sum_{k=1}^{\frac{t_\chi}{2}} \chi(k) \frac{k}{t_\chi}} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \sum_{\chi(-1)=+1} \left( \frac{\sum_{k=1}^{\frac{t_\chi}{2}} \chi(k) \phi_1\left(\frac{k}{t_\chi}\right)}{\sum_{k=1}^{\frac{t_\chi}{2}} \chi(k) \log \sin \frac{\pi k}{t_\chi}} \right) \right] + \\
& + \text{höhere Potenzen in } (s-1).
\end{aligned} \tag{70}$$

Die Summen und Produkte sind zu erstrecken bzw. über diejenigen der  $g-1$  *eigentlichen* Nebencharaktere, welche den weiter oben in jedem Falle erwähnten Nebencharakteren zugeordnet sind, für welche  $\chi(-1) = -1$ , bzw.  $\chi(-1) = +1$  ist. Hierbei ist für  $\prod$  der Wert 1, für  $\sum$  der Wert Null zu setzen, falls kein Charakter von der Art  $\chi(-1) = -1$  existiert.  $t_\chi$  ist wie oben der Teiler von  $m$ , für welchen der betr. Charakter eigentlich wird.

Der Körper  $U$  ist wieder als Galois'scher Körper entweder total reell oder total imaginär. Der erste Fall tritt offensichtlich dann und nur dann ein, wenn die Zahlen von  $U$  unter der Substitution

$$\frac{b_1 c_1}{s_1^2} \quad \frac{b_2 c_2}{s_2^2} \quad \dots \quad \frac{b_R c_R}{s_R^2},$$

bzw. im Falle, in welchem  $U$  „direkter“ Unterkörper eines Ausgangskörpers ist, welchem auch der volle Körper der  $2^{h_0}$  ten Einheitswurzel angehört ( $h_0 \geq 2$ ), unter der Substitution

$$\frac{b_1 c_1}{s_0 s_1^2} \quad \frac{b_2 c_2}{s_2^2} \quad \dots \quad \frac{b_R c_R}{s_R^2}$$

invariant sind.

Man kann dies auch so ausdrücken, daß man sagt, daß alle Charaktere von der Art  $\chi(-1) = +1$  sein müssen. Denn für einen erzeugenden Charakter mod.  $l^n$ , wo  $l$  eine ungerade Primzahl ist, gilt, wie schon in § 6 benutzt:

$$\chi(-1) = -1,$$

mithin

$$\begin{aligned} X_1^{b_1 b_{1j}}(-1) \cdot X_2^{b_2 b_{2j}}(-1) \dots X_R^{b_R b_{Rj}}(-1) \\ = (-1)^{b_1 b_{1j} + b_2 b_{2j} + \dots + b_R b_{Rj}} \end{aligned}$$

Der Charakter gehört folglich zu den Charakteren mit  $\chi(-1) = -1$ ,

falls  $b_1 b_{1j} + b_2 b_{2j} + \dots + b_R b_{Rj}$  ungerade ist,

und zu den Charakteren mit  $\chi(-1) = +1$ ,

falls  $b_1 b_{1j} + b_2 b_{2j} + \dots + b_R b_{Rj}$  gerade ist.

Im zweiten Fall ist  $X_0(-1) = -1$  und  $X_*(-1) = +1$ , daher:

$$\begin{aligned} X_0^{b_{0j}}(-1) X_*^{b_{*j}}(-1) X_1^{b_1 b_{1j}}(-1) X_2^{b_2 b_{2j}}(-1) \dots X_R^{b_R b_{Rj}}(-1) = \\ X_0^{b_{0j}}(-1) X_1^{b_1 b_{1j}}(-1) X_2^{b_2 b_{2j}}(-1) \dots X_R^{b_R b_{Rj}}(-1) \\ = (-1)^{b_{0j} + b_1 b_{1j} + b_2 b_{2j} + \dots + b_R b_{Rj}}. \end{aligned}$$

Der Charakter gehört daher zu den Charakteren mit  $\chi(-1) = -1$ ,

falls  $b_{0j} + b_1 b_{1j} + b_2 b_{2j} + \dots + b_R b_{Rj}$  ungerade ist,

und zu den Charakteren mit  $\chi(-1) = +1$ ,

falls  $b_{0j} + b_1 b_{1j} + b_2 b_{2j} + \dots + b_R b_{Rj}$  gerade ist.

In der Tat ist dann und nur dann, wenn alle  $\chi(-1) = +1$  sind, für alle Werte  $j = 1, 2, \dots, g$

$$\begin{aligned} e^{2\pi i \left\{ \frac{b_1 c_1}{2} \frac{b_{1j}}{c_1} + \frac{b_2 c_2}{2} \frac{b_{2j}}{c_2} + \dots + \frac{b_R c_R}{2} \frac{b_{Rj}}{c_R} \right\}} \\ = (-1)^{b_1 b_{1j} + b_2 b_{2j} + \dots + b_R b_{Rj}} = +1, \end{aligned}$$

vergleiche die Formeln (57), bzw.

$$2 \pi i \left\{ 1 \cdot \frac{b_{0j}}{2} + 0 \cdot \frac{b_{*j}}{2^{h_0-2}} + \frac{b_1 c_1}{2} \frac{b_{1j}}{c_1} + \frac{b_2 c_2}{2} \frac{b_{2j}}{c_2} + \dots + \frac{b_R c_R}{2} \frac{b_{Rj}}{c_R} \right\} \\ = (-1)^{b_{0j} + b_1 b_{1j} + b_2 b_{2j} + \dots + b_R b_{Rj}} = \pm 1,$$

vergleiche die Formeln (68), bzw. (69), so daß die erwähnten Substitutionen zu  $\mathfrak{J}$  gehören. In jedem andern Falle sind die Gleichungen (57), bzw. (68), bzw. (69) *nicht* für alle Werte  $j = 1, 2, \dots, g$  erfüllbar und die erwähnte Substitution gehört *nicht* zu  $\mathfrak{J}$ . Uebrigens gibt es dann natürlich gleich viel Charaktere von der Art  $\chi(-1) = -1$ , wie von der Art  $\chi(-1) = +1$ .

Wenn  $U$  total reell ist, so ist  $r_1 = g$ ,  $r_2 = 0$ ,  $r = r_1 + r_2 - 1 = g - 1$ .

Wenn  $U$  total imaginär ist, so ist  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = \frac{g}{2}$ ,  $r = \frac{g}{2} - 1$ . Unter Berücksichtigung des Corollars, pg. 172 erhalten wir für die beiden Produkte der rechten Seite der Formel (70) wieder, vgl. die Formel (42):

$$\left( \frac{\pi}{m} \right)^{r_2} \cdot 2^{r_1 + r_2 - 1} \prod_{\chi(-1) = -1} \frac{i}{G(1, \chi)} \prod_{\chi(-1) = +1} \frac{1}{G(1, \chi)} \times \\ \prod_{\chi(-1) = -1} \left\{ \sum_{k=1}^m \chi(k) \cdot k \right\} \prod_{\chi(-1) = +1} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \chi(k) \cdot \log \sin \frac{\pi k}{m} \right\}. \quad (71)$$

Wir berechnen die beiden ersten Produkte dieses Ausdruckes. Sei zunächst  $m = \overline{m}$  wieder *ungerade*. Dann ist für die Primitivwurzel  $\overline{g_r}$  mod.  $l_r^{h_r}$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ , die, wie am Anfang von § 5,  $\equiv 1 \pmod{\frac{2m}{l_r^{h_r}}}$  gewählt werden soll:

$$X_1^{b_1} b_{1j} (g_r) X_2^{b_2} b_{2j} (g_r) \dots X_R^{b_R} b_{Rj} (g_r) = X_r^{b_r} b_{rj} (g_r) \quad (72)$$

eine  $c_r$ te Einheitswurzel. Weil der Modul

$$(b_{r1}, b_{r2}, b_{r3}, \dots, b_{rg}, c_r) = 1$$

ist, so gibt es auch Werte  $b_{rj}$ , für welche der Charakter (72) *genau* eine  $c_r$ te Einheitswurzel und keine kleinere ist. Da die  $g$  Charaktere eine

Gruppe bilden<sup>17)</sup>, kommt jede  $c_r$  te Einheitswurzel gleich oft, und mithin jeder Wert 0, 1, 2, ...  $c_r - 1$  unter den  $g$  Werten  $b_{rj}$  ( $j = 1, 2, \dots g$ ) gleich oft vor (Hecke, Satz 32, pg. 35). Mithin kommt jeder Wert 0, 1, 2, ...  $c_r - 1$  genau  $\frac{g}{c_r}$  oft vor<sup>18)</sup>. Die Potenz, in der  $\left| l_r - \frac{1}{2} \right|$  mithin überhaupt in diesen beiden Produkten auftritt, ist folglich (vgl. pg. 195):

$$\left| l_r - \frac{1}{2} \right| \left\{ h_r - \frac{l_r^{h_r-1} + (b_r - 1)}{l_r^{h_r-1} (l_r - 1)} \right\} g.$$

Mithin ist der Wert der beiden ersten Produkte des Ausdruckes (71):

$$\prod_{x^{(-1)}=-1} \frac{i}{G(1, \chi)} \prod_{x^{(-1)}=+1} \frac{1}{G(1, \chi)} = \prod_{r=1}^R \left| l_r - \frac{1}{2} \right| \left\{ h_r - \frac{l_r^{h_r-1} + (b_r - 1)}{l_r^{h_r-1} (l_r - 1)} \right\} g.$$

Wir wollen diese GröÙe wieder durch die Diskriminante  $d$  des Körpers  $U$  ausdrücken. Sei  $D$  die Diskriminante des zugehörigen Ausgangskreiskörpers  $K$ :

$$\pm D = \prod_{r=1}^R |l_r| \left\{ h_r - \frac{l_r^{h_r-1} + (b_r - 1)}{l_r^{h_r-1} (l_r - 1)} \right\} G.$$

Nun können in der Relativdiskriminanten von  $K$  zu  $U$  nur Teiler von  $m$  aufgehen wie in der Diskriminanten von  $K$  selbst. In der Relativedifferenten von  $K$  zu  $U$  können nur solche Primideale von  $K$  aufgehen, welche in höherer als erster Potenz in einem Primideal von  $U$  aufgehen<sup>19)</sup>. Solche Primideale gibt es aber, wie wir gesehen haben (siehe pg. 212) *keine*, und folglich ist die Relativedifferente und daher auch die Relativediskriminante gleich 1.

Also ist

<sup>17)</sup> Wie man sich leicht überlegt, macht es nichts aus, wenn wir für den Moment den Hauptcharakter auch mitnehmen.

<sup>18)</sup> Die Zahlen  $\frac{c_1 c_2 \dots c_{r-1} c_{r+1} \dots c_R}{\gamma}$  sind also ganz, was man mit den einleitenden Betrachtungen dieses Kapitels (pg. 203) vergleichen möge.

<sup>19)</sup> Dieser Satz ist ja gerade im Falle eines relativ-Galois'schen Körpers sehr leicht zu beweisen, vgl. z. R. Hecke, Satz 115, pg. 147.

$$|d| = \sqrt[r]{|D|} = \prod_{r=1}^R |l_r| \left\{ h_r - \frac{l_r^{h_r-1} + (b_r - 1)}{l_r^{h_r-1} (l_r - 1)} \right\}^g$$

und

$$\prod_{x^{(-1)}=-1} \frac{i}{G(1, \chi)} \prod_{x^{(-1)}=+1} \frac{1}{G(1, \chi)} = \frac{1}{\sqrt{|d|}}.$$

Die gleiche Ueberlegung gilt natürlich auch in jedem der beiden Fälle, wo  $m$  durch 4 teilbar ist. Es ist dann statt  $g_r$  nur ein Argument ins Auge zu fassen, welches  $\equiv 1 \pmod{l_r^{h_r}}$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ , aber  $\equiv 5$ , bzw.  $\equiv -5 \pmod{2^{h_0}}$  ist.

Folglich bleibt die *Schlussformel* (52) erhalten:

$$\begin{aligned} \xi_U(s) = & \left(\frac{\pi}{m}\right)^{r_2} \cdot \frac{2^r}{|\sqrt{d}|} \cdot \prod_{x^{(-1)}=-1} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} -\chi(k) \cdot k \right\} \cdot \prod_{x^{(-1)}=+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} -\chi(k) \cdot \log \sin \frac{\pi k}{m} \right\} \times \\ & \times \left[ \frac{1}{s-1} + g E + (g-1) \log 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{x^{(-1)}=-1} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^{\frac{t_x}{2}} -\chi(k) \log \frac{\Gamma\left(\frac{k}{t_x}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{k}{t_x}\right)} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{x^{(-1)}=+1} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^{\frac{t_x}{2}} -\chi(k) \phi_1\left(\frac{k}{t_x}\right)}{\sum_{k=1}^{\frac{t_x}{2}} -\chi(k) \log \sin \frac{\pi k}{t_x}} \right\} \right] + \\ & + \text{höhere Potenzen in } (s-1). \end{aligned} \quad (73)$$

Die Produkte und Summen gehen über alle  $g-1$  eigentlichen Nebencharaktere der Gruppe der  $g$  Charaktere, die isomorph ist mit der Galois'schen Gruppe des Körpers  $U$ , natürlich je nur über die eigentlichen Nebencharaktere von der verlangten Art. Gibt es darunter keine Charaktere mit  $\chi(-1) = -1$ , so ist, wie immer, für das betreffende Produkt der Wert 1, für die betreffende Summe der Wert Null zu setzen.

## § 10. Die Klassenzahl des allgemeinsten Kreiskörpers

Die Anzahl  $w$  der Einheitswurzeln ist im Falle eines reellen Körpers  $U$  gleich 2.

Im Falle eines imaginären Körpers  $U$  sei  $m$  zunächst ungerade. Dann kann eine primitive  $l_r^{h_r'}$  te Einheitswurzel ( $h_r' \leq h_r$ ) höchstens in  $K$  und folglich höchstens in  $U$  auftreten, wenn  $b_r = 1$  ist, d. h. wenn  $c_r = (l_r - 1) l_r^{h_r - 1}$ . Dies vorausgesetzt, sei [vgl. die Substitutionen von § im Tableau (54)]:

$$(x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{r\gamma}, (l_r - 1) l_r^{h_r - 1}) = (a_r' l_r^{h_r' - 1}),$$

wo  $(a_r', l_r) = 1$  ist,  $r = 1, 2, \dots, R$ . Eine primitive  $l_r^{h_r'}$  te Einheitswurzel und auch keine  $l_r^{h_r''}$  te Einheitswurzel, wo  $h_r'' > h_r'$  ist, wird, wie man durch Betrachtung der Wirkung der Substitutionen  $s_r^{x_{rt}}$  auf  $Z_r$ , bzw.  $(Z_r)^{l_r}$ , bzw.  $(Z_r)^{l_r^2}$ , ... etc. sofort einsieht, dann und nur dann in  $U$  auftreten, wenn  $a_r' = l_r - 1$  ist. Mithin ist

$$w = \prod_r l_r^{h_r'},$$

wo der Index  $r$  nur diejenigen Werte durchläuft, für welche  $b_r = 1$  und  $a_r' = l_r - 1$  ist <sup>20)</sup>.

Die gleiche Formel gilt, wenn der Ausgangs-Kreiskörper nur den reellen Unterkörper vom Grade  $2^{h_0 - 2}$ , wo  $h_0 \geq 3$ , enthält.

Ist endlich im Ausgangskörper der volle Körper der  $2^{h_0}$  ten Einheitswurzel enthalten, wo  $h_0 \geq 2$  ist, so gilt immer noch dieselbe Formel, falls

$$(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \dots, x_{0\gamma}, 2) = 1$$

ist. Es bleibt nur noch der Fall, wo

$$(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \dots, x_{0\gamma}, 2) = 2$$

ist. Ist dann

$$(x_{*1}, x_{*2}, x_{*3}, \dots, x_{*\gamma}, 2^{h_0 - 2}) = (2^{h_0' - 2}),$$

so ist

$$w = 2^{h_0'} \cdot \prod_r l_r^{h_r'}.$$

<sup>20)</sup> Vgl. die analogen Ausführungen bei Beeger, l. c. 408.

Genau wie in § 7 ergeben sich dann die Formeln für die Klassenzahl  $h$ . Im Falle eines reellen Körpers  $U$  ist:

$$h = \frac{\prod_x \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} -\chi(k) \log \sin \frac{\pi k}{m} \right\}}{R};$$

im Falle eines imaginären Körpers  $U$ :

$$h = w \cdot \frac{\prod_{\chi(-1)=-1} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} -\chi(k) \cdot k \right\}}{\frac{g}{(2m)^2}} \cdot \frac{\prod_{\chi(-1)=+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} -\chi(k) \log \sin \frac{\pi k}{m} \right\}}{R},$$

wo in beiden Formeln die Produkte und Summen über alle  $g-1$  *eigentlichen* Nebencharaktere, je von der verlangten Art, zu erstrecken sind.

Auch hier kann man das Produkt über alle eigentlichen Nebencharaktere von der Art  $\chi(-1) = +1$  in eine Determinante verwandeln, falls die Gruppe dieser Charaktere zyklisch ist. Natürlich wird man für die praktische Berechnung in allen Fällen, in denen  $t_x \neq m$ , bzw.  $\frac{t}{2} \neq \frac{m}{2}$  ist, das Corollar am Ende von § 3 in umgekehrten Sinne verwenden.

Man sieht, daß die Klassenzahlformel, abgesehen von dem von den Einheitswurzeln herrührenden Faktor  $w$ , genau die gleiche Form hat wie für den vollen Körper der  $m$ ten Einheitswurzel, einen «ersten» und einen «zweiten» Klassenzahlfaktor (nach Kummer'scher Bezeichnungsweise) bei den imaginären Körpern, und nur einen «zweiten» Klassenzahlfaktor (wenn man so will; ohne Einheitswurzelfaktor!) bei den reellen Körpern. (Vgl. die Beeger'schen Arbeiten).

## IV. Kapitel. Eine weitere Methode zur Berechnung der Klassenzahl eines beliebigen Kreiskörpers

### § 11. Die Klassenzahl eines beliebigen Kreiskörpers

Eine andere Art, die Klassenzahl zu berechnen, ergibt sich ganz im Gegensatz zu dem oben gegebenen, mit den einfachsten Mitteln ope-

rierenden Beweisgang durch stärkere Herbeiziehung analytischer, ihrerseits sehr tiefliegenden Beziehungen, nämlich der Hecke'schen Funktionalgleichung und der Funktionalgleichungen der  $L$ -Reihen<sup>21)</sup>. Dagegen braucht man dann die Diskriminante des Körpers, und das Produkt der  $G(1, \chi)$  *nicht* zu berechnen. Man geht aus von den beiden Formeln

$$\zeta_k(s) = \zeta(s) \prod_x L(s, \chi), \quad (74)$$

das Produkt erstreckt über alle eigentlichen Nebencharaktere, und, vgl. auch (53)

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\zeta_k(s)}{\zeta(s)} = h \cdot \frac{2^{r_1 + r_2} \cdot \pi^{r_2} \cdot R^*}{w \sqrt{d}} \quad (75)$$

Hiebei ist  $k$  ein *beliebiger* Kreiskörper vom Grade  $n = r_1 + 2r_2$ .

Die Hecke'sche Funktionalgleichung lautet<sup>22)</sup>

$$\zeta_k(s) = \left( \frac{2^{r_2} \pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{d}} \right)^{2s-1} \left\{ \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} \right\}^{r_2} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \right\}^{r_1} \zeta_k(1-s); \quad (76)$$

die Funktionalgleichung der gewöhnlichen Zetafunktion<sup>23)</sup>:

$$\zeta(s) = \pi^{\frac{2s-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \zeta(1-s); \quad (77)$$

die Funktionalgleichung der  $L$ -Reihen mit *eigentlichem* Charakter, für welchen  $\chi(-1) = -1$ <sup>24)</sup>:

$$L(s, \bar{\chi}) = \left( \frac{\pi}{t_x} \right)^s \left\{ \frac{-i G(1, \bar{\chi})}{\sqrt{\pi}} \right\} \frac{\Gamma(1 - \frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s+1}{2})} L(1-s, \chi); \quad (78)$$

die Funktionalgleichung der  $L$ -Reihen mit *eigentlichem* Charakter, für welchen  $\chi(-1) = +1$ :

<sup>21)</sup> Man vergleiche die in der Anmerkung 14) erwähnte Note.

<sup>22)</sup> E. Hecke, Ueber die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper, Göttinger Nachrichten, Jahrgang 1917, pg. 77—89.

<sup>23)</sup> B. Riemann, Werke, pg. 146.

<sup>24)</sup> Vgl. die in der Anmerkung 9) erwähnte Arbeit von H. Kinkelin, oder E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig und Berlin 1909, 1. Bd., pg. 497.



$$L(s, \bar{\chi}) = \left(\frac{\pi}{t_x}\right)^s \left\{ \frac{G(1, \bar{\chi})}{\sqrt{\pi}} \right\} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} L(1-s, \chi). \quad (79)$$

Führt man (76) und (77) in (75) ein, so wird

$$h = \frac{w}{2^{r_1} R^*} \lim_{s=1} \left\{ \Gamma(1-s)^{r_2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^{r_1-1} \frac{\zeta_k(1-s)}{\zeta(1-s)} \right\},$$

oder unter Berücksichtigung von (74)

$$h = \frac{w}{2^{r_1} R^*} \lim_{s=0} \left\{ \Gamma(s)^{r_2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1-1} \prod_x L(s, \bar{\chi}) \right\}. \quad (80)$$

Ist  $k$  total reell,  $r_1 = n$ ,  $r_2 = 0$ ,  $w = 2$ ; alle  $\chi(-1) = +1$ , so wird durch Einführung von (79), vgl. auch (53)

$$h = \frac{1}{2^{n-1} R} \prod_x \left\{ G(1, \bar{\chi}) \cdot L(1, \chi) \right\}$$

also nach Formel (13) und unter Anwendung des auf jene Formel folgenden Corollars:

$$h = \frac{\prod_x \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} -\chi(k) \log \sin \frac{\pi k}{m} \right\}}{R} \quad \text{Q. E. D.}$$

Ist  $k$  total imaginär,  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = \frac{n}{2}$ , so folgt aus (80) unter Einführung von (78) und (79), vgl. auch (53)

$$h = \frac{w}{2^{\frac{n}{2}} R} \prod_{x(-1)=-1} \left\{ \frac{G(1, \bar{\chi})}{i\pi} L(1, \chi) \right\} \prod_{x(-1)=+1} \left\{ \frac{G(1, \bar{\chi})}{2} L(1, \chi) \right\}.$$

also nach den Formeln (12) und (13) und unter Anwendung des auf jene Formel folgenden Corollars:

$$h = w \cdot \frac{\prod_{x^{(-1)}=-1} \left\{ \sum_{k=1}^m -\chi(k) \cdot k \right\}}{(2m)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{\prod_{x^{(-1)}=+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} -\chi(k) \log \sin \frac{\pi k}{m} \right\}}{R},$$

Q. E. D.

(Eingegangen den 20. März 1929)