

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 1 (1929)

Artikel: Sur la géométrie des imaginaires. I.
Autor: Gonseth, F.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1141>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur la géométrie des imaginaires I

Par F. GONSETH, Berne

1. On sait le profit que Laguerre¹⁾ a su tirer de la représentation réelle des imaginaires.

Voici, en quelques mots, en quoi consiste la représentation dont il s'est servi.

A tout point imaginaire c on fait correspondre le cercle réel γ qui se trouve sur le cône isotrope Γ de sommet c . Ce cercle est d'ailleurs aussi sur le cône isotrope $\bar{\Gamma}$, du point \bar{c} , imaginaire conjugué de c . Pour distinguer si γ doit représenter c ou \bar{c} on lui confère une orientation ou l'orientation opposée.

Cette représentation permet d'établir un lien assez curieux entre les sections circulaires des quadriques d'un système homofocal. Laguerre donne — sans démonstration d'ailleurs — les énoncés suivants:²⁾

Tout cercle réel situé sur un ellipsoïde représente un point imaginaire de l'hyperbole focale de cet ellipsoïde.

Tout cercle réel situé sur un hyperbololoïde à deux nappes représente un point imaginaire de l'ellipse focale de cet hyperbololoïde.

Ces deux énoncés en évoquent naturellement un troisième. Le tout s'exprime le plus aisément en considérant un système de quadriques homofocales et ses trois focales dont l'une γ_1 est une ellipse, la seconde γ_2 une hyperbole et la troisième γ_3 une ellipse imaginaire.³⁾ On obtient alors la propriété que voici :

Les cercles réels situés sur les ellipsoïdes, les hyperbololoïdes à une nappe ou à deux nappes d'un système homofocal représentent des points imaginaires situés respectivement sur l'hyperbole γ_2 , l'ellipse imaginaire γ_3 ou l'ellipse réelle γ_1 .

Un énoncé absolument semblable vaut d'ailleurs aussi pour les paraboloides homofocaux.

Nous allons tout d'abord donner une généralisation des énoncés qui précédent.

¹⁾ Laguerre. Oeuvres II. Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie p. 98—108. Sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie dans l'espace p. 109—123 et 238—262. Sur quelques propriétés des coniques homofocales 569—577.

²⁾ Laguerre. Oeuvres II, p. 248.

³⁾ E. Kocher. Ueber eine imaginäre Spiegelung. Diss. Bern. Jahrbuch der phil. Fak. II. Bd. 5.

2. La représentation du point imaginaire n'est qu'un cas particulier d'une représentation possible d'un *cercle imaginaire* γ par *deux cercles réels orientés*, γ_1 et γ_2 . On peut en effet faire passer par γ deux cônes isotropes Γ_1 et Γ_2 , de sommets c_1 et c_2 . Les cercles orientés, images de c_1 et c_2 , et situés l'un sur Γ_1 , l'autre sur Γ_2 représentent γ de façon parfaitement univoque.

Il y a d'ailleurs quatre façons possibles d'orienter les deux cercles γ_1 et γ_2 . Désignons-en une, celle par exemple qui correspond justement à notre cercle imaginaire γ , par $\gamma_1^+ \gamma_2^+$. L'orientation qu'on obtient en renversant le sens sur γ_1 et sur γ_2 correspond aux deux points imaginaires \bar{c}_1 et \bar{c}_2 , conjugués imaginaires de c_1 et c_2 , et par conséquent au cercle $\bar{\gamma}$, conjugué imaginaire de γ . Les deux autres orientations $\gamma_1^+ \gamma_2^-$ et $\gamma_1^- \gamma_2^+$ correspondent aux paires $c_1 \bar{c}_2$ et $\bar{c}_1 c_2$, donc à deux cercles imaginaires (et conjugués l'un de l'autre) en position minimale⁴⁾ à la fois avec γ et $\bar{\gamma}$.

Quant aux combinaisons restantes $\gamma_1^+ \gamma_1^-$ et $\gamma_2^+ \gamma_2^-$, elles correspondent aux paires $c_1 \bar{c}_1$ et $c_2 \bar{c}_2$, c.-à-d. respectivement aux cercles réels γ_1 et γ_2 orientés dans les deux sens.

Donc: *Les deux cercles, représentants d'un cercle réel, se confondent avec ce cercle et portent des orientations opposées.*

Considérons maintenant un cercle imaginaire γ situé sur une quadrique \mathcal{Q} . Faisons passer par γ les deux cônes isotropes Γ_1 et Γ_2 : ces derniers sont bitangents à \mathcal{Q} , et leurs sommets c_1 et c_2 sont par conséquent situés quelque part sur une focale de \mathcal{Q} . En même temps qu'à \mathcal{Q} chacun de ces cônes est aussi bitangent à toute les quadriques homofocales à \mathcal{Q} (puisqu'elles forment un faisceau tangentiel). Leur intersection avec chacune de celles-ci se compose donc aussi de deux cercles.

Pour plus de clarté, il convient ici de revenir sur la distribution des cercles sur les quadriques d'un système homofocal. Si φ est l'intersection de \mathcal{Q} avec le plan de l'infini, et ω l'ombilicale, $a_1 a_2 a_3$ et a_4 enfin leurs points d'intersection, les 6 droites $a_i a_k$ sont — on le sait bien — les axes des 6 faisceaux de plans qui coupent \mathcal{Q} suivant un cercle. Ces 6 axes forment 3 paires, se croisant aux sommets $j_1 j_2$ et j_3 du triangle conjugué à la fois à φ et à ω . Si \mathcal{Q} est réelle, — ou si elle a une équation réelle — deux de ces paires sont formées de deux axes imaginaires conjugués, et la troisième de deux axes réels. Si \mathcal{Q} varie et, par exemple, décrit le système

⁴⁾ Deux cercles sont en position minimale s'il sont sur un même cône isotrope.

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

le triangle $j_1 j_2 j_3$ reste invariable: (il est formé des points à l'infini des trois axes OX , OY et OZ .)

Les sections circulaires de tout le système forment donc trois classes, selon l'axe des coordonnées auquel elles sont parallèles. Quant aux sections circulaires réelles, dans l'hypothèse $a > b > c$, elles sont parallèles à OY si elles se trouvent sur un ellipsoïde, parallèles à OX si elles se trouvent sur un hyperboloïde à une nappe et enfin parallèles à OZ si elles sont sur un hyperboloïde à deux nappes.

Si l'on compare ces faits avec les énoncés de Laguerre, on est amené à supposer que:

Tout cône isotrope passant par une section circulaire réelle ou imaginaire, et parallèle à OX (resp. OY ou OZ) a son sommet sur la focale imaginaire (resp. hyperbolique ou elliptique) située dans les plans des yz (resp. des zx ou des xy).

La chose est facile à vérifier.

La focale imaginaire, par exemple, a pour équation

$$(2) \quad \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} + 1 = 0.$$

L'équation des 2 plans π_1 et π_2 à section circulaire par l'axe des x est donnée par:

$$\frac{y^2}{b^2 + \lambda} (a^2 - b^2) + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} (a^2 - c^2) = 0.$$

La surface formée de deux plans parallèles à π_1 et π_2 est alors comprise dans le faisceau formé d'une homofocale et d'un cône isotrope de sommet $x_0 y_0 z_0$. Donc:

$$\begin{aligned} & \left\{ y \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \lambda}} + iz \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2 + \lambda}} + D' \right\} \quad \left\{ y \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \lambda}} - iz \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2 + \lambda}} + D'' \right\} = \\ & = \left\{ x^2 + y^2 \frac{a^2 + \lambda}{b^2 + \lambda} + z^2 \frac{a^2 + \lambda}{c^2 + \lambda} - (a^2 + \lambda) \right\} - \left\{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right\} \end{aligned}$$

En identifiant on obtient,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ (D' + D'') \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + \lambda}} = {}^2 y_0 \\ i(D' - D'') \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2 + \lambda}} = {}^2 z_0 \\ D' D'' = -(a^2 + \lambda + x_0^2 + y_0^2) \end{array} \right.$$

En éliminant D' et D'' on trouve bien l'équation (2).

D'ailleurs, si l'on donne une section arbitrairement, ce qui revient à choisir à volonté ou D' ou D'' on a, par exemple en éliminant D'' , et en posant

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{y_0}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad Z = \frac{z_0}{\sqrt{a^2 - c^2}} \\ \frac{o = 1 + Y^2 + Z^2}{D' = \sqrt{b^2 + \lambda} \quad Y + \sqrt{c^2 + \lambda} \quad Z} \end{array} \right.$$

Ces deux dernières équations montrent enfin que l'on a bien deux solutions, et que les sommets des deux cônes isotropes qu'on obtient peuvent occuper sur la focale, par un choix convenable de D' et de λ une position absolument arbitraire.

Il en résulte naturellement la réciproque de notre énoncé de tout à l'heure, c.-à-d. :

Les cônes isotropes issus de deux points arbitraires de la focale imaginaire (resp. hyperbolique ou elliptique) ont comme intersection un cercle situé sur une certaine quadrique du faisceau homofocal, et dont le plan est perpendiculaire à celui de la focale.

La perpendicularité du plan de la focale et du plan du cercle est d'ailleurs une condition tout à fait évidente, car l'intersection de deux cônes isotropes de sommets c_1 et c_2 , est toujours perpendiculaire à la droite de jonction $c_1 c_2$ des sommets.

Il est maintenant aisé de voir que les énoncés de Laguerre peuvent être généralisés comme suit :

Les représentants d'un cercle imaginaire γ quelconque, situé sur une quadrique Φ réelle — ou dont l'équation est réelle — sont des cercles réels situés sur des homofocales à Φ .

Pour déterminer les représentants de γ il faut en effet mener par celui-ci les cônes isotropes Γ_1 et Γ_2 , dont les sommets c_1 et c_2 sont sur

une focale. Si \emptyset est réelle, la focale contient aussi les imaginaires conjugués \bar{c}_1 et \bar{c}_2 . Les cercles, intersections des cônes Γ_1 et $\bar{\Gamma}_1$, d'une part, de Γ_2 et $\bar{\Gamma}_2$ d'autre part, sont chacun, d'après ce que nous venons de démontrer, sur une homofocale à \emptyset . Ce sont d'ailleurs justement les représentants γ_1 et γ_2 de γ .

Ce qui précède permet de préciser encore davantage : les plans de γ , de γ_1 et de γ_2 sont tous trois perpendiculaires à la même focale ; par conséquent γ_1 et γ_2 sont ou bien sur deux ellipsoïdes, ou bien sur deux hyperboloïdes à une nappe ou bien sur deux hyperboloïdes à deux nappes. Et selon que le plan de γ est perpendiculaire au plan de l'une ou l'autre des trois focales, nous serions immédiatement en mesure de décider laquelle se présenterait des éventualités que nous venons d'énumérer.

3. Nous allons maintenant donner une réplique aux propriétés qui viennent de nous occuper.

Partons d'une droite *imaginaire quelconque* G , et définissons-en les deux représentantes réelles. Il suffit de faire passer par G les deux plans isotropes α_1 et α_2 : chacun de ceux-ci contient une droite réelle. Nommons ces droites G_1 et G_2 : ce seront les représentantes de G . Comme pour les cercles, il faut remarquer que par $\underline{G_1}$ et $\underline{G_2}$ il passe encore trois autres paires de plans isotropes, c.-à-d. $\bar{\alpha}_1 \alpha_2$, $\alpha_1 \bar{\alpha}_2$ et $\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2$, où $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_2$ sont les plans isotropes conjugués de α_1 et α_2 . L'intersection de $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_2$ est \bar{G} . Les deux autres paires se coupent aussi en des droites imaginaires conjuguées H et \bar{H} . Pour distinguer entre les 4 droites G , \bar{G} , H et \bar{H} il suffit ici aussi d'orienter convenablement G_1 et G_2 .

On le fera de telle façon que :

Les deux représentantes d'une droite réelle, qui coïncident avec cette dernière, portent des sens opposés.

La droite isotrope joue un rôle particulier. Elle n'est contenue que dans un plan isotrope, et n'a donc qu'une représentante réelle. En d'autres termes :

Les deux représentantes d'une droite isotrope sont confondues, et portent le même sens.

Remarquons encore qu'une droite isotrope n'est pas complètement déterminée par sa représentante.

La représentation des points et des cercles est invariante pour toute transformation conforme réelle. Celle des droites pour tout mouvement réel de l'espace.

Avant de passer aux énoncés semblables à ceux de Laguerre, nous allons examiner quelques faits très simples, se rapportant aux rapports des images entre elles.

Nous établirons tout d'abord les formules qui permettent de passer de G à G_1 et G_2 .

Soient p et q les deux vecteurs qui permettent de fixer la position de G . A partir des rayons vecteurs a et b de deux points quelconques de G , p et q sont déterminés par les formules

$$(5) \quad p = b - a \quad q = a \times b$$

avec la condition $p \cdot q = 0$.

Les six composantes de p et q forment 6 coordonnées homogènes de G .

On peut les normer par la condition :

$$(5') \quad p \cdot p = 1.$$

Si p et q sont complexes :

$$(6) \quad p = p' + i p'' \quad q = q' + i q''$$

les deux conditions (5) deviennent :

$$(7) \quad \begin{cases} p' p' - p'' p'' = 1 \\ p' p'' = 0 \end{cases}$$

$$(7') \quad \begin{cases} p' q' - p'' q'' = 0 \\ p' q'' + p'' q' = 0. \end{cases}$$

Lorsque G passe par l'origine, q est nul, et les conditions (7') disparaissent. Dans cette hypothèse, portons sur les images G_1 et G_2 deux vecteurs unités p_1 et p_2 . L'extrémité de p_1 par ex. est sur la même isotrope de la sphère unité que l'extrémité de p . On a donc

$$(p' + i p'' - p_1)^2 = 0$$

c.-à-d. en tenant compte des égalités $p \cdot p = 1$ et $p_1 \cdot p_1 = 1$:

$$p_1 (p' + i p'') = 1.$$

On a par conséquent pour déterminer le vecteur p_1 , les 3 relations :

$$(8) \quad \begin{cases} p_1 p' = 1 \\ p_1 p'' = 0 \\ p_1 p_1 = 1. \end{cases}$$

L'interprétation géométrique de ces conditions montre immédiatement qu'il y a toujours deux vecteurs réels qui les vérifient. Ce sont les rayons vecteurs, dans le plan perpendiculaire à \mathbf{p}'' , des deux points d'intersection du cercle unité et du cercle décrit sur \mathbf{p}' comme diamètre.

Posons donc : $\mathbf{p}_1 = \alpha \cdot \mathbf{p}' + \beta \cdot \mathbf{p}' \times \mathbf{p}''$.

Par multiplication scalaire avec \mathbf{p}' , et en faisant usage de la première des relations (8) on obtient :

$$\alpha = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}'}.$$

En formant ensuite le carré scalaire des deux membres, on obtient

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1 = \alpha^2 \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}' + \beta^2 (\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'')^2.$$

Mais, parce que \mathbf{p}' est perpendiculaire à \mathbf{p}'' , on a $(\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'')^2 = (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}') (\mathbf{p}'' \cdot \mathbf{p}'')$.

Il reste finalement $\beta = \pm \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}'}.$

Voici donc les deux vecteurs réels, \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 représentant le vecteur imaginaire \mathbf{p} :

$$(9) \quad \begin{cases} \mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}'} (\mathbf{p}' + \mathbf{p}' \times \mathbf{p}'') \\ \mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}'} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}' \times \mathbf{p}'') \end{cases}$$

avec $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{I} + \mathbf{p}'' \cdot \mathbf{p}''$ et $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}'' = \mathbf{0}$.

Nous les nommerons aussi l'*image de droite* G_1 et l'*image de gauche* G_2 du vecteur complexe \mathbf{p} .

Passons au cas où G est quelconque. Il suffira d'écrire que G_1 et G_2 sont concourantes, et que la normale au plan qu'elles déterminent est isotrope.

On a donc en nommant encore \mathbf{p}_1 et \mathbf{q}_1 les deux vecteurs coordonnées de la droite G_1 pour la condition d'incidence :

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}_1 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$$

c.-à-d.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' \cdot \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}' \cdot \mathbf{p}_1 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{p}'' \cdot \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{p}_1 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

et pour la condition de perpendicularité au plan $G_1 G$:

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{p}_1)^2 = 0.$$

Par la règle

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') = (\mathbf{a} \mathbf{a}') (\mathbf{b} \mathbf{b}') - (\mathbf{a} \mathbf{b}') (\mathbf{a}' \mathbf{b})$$

on obtient :

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{p}_1)^2 = (\mathbf{p} \mathbf{p}) (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1) - (\mathbf{p} \mathbf{p}_1)^2 = 1 - (\mathbf{p} \mathbf{p}_1)^2$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}' \mathbf{p}_1)^2 - (\mathbf{p}'' \mathbf{p}_1)^2 &= 1 \\ (\mathbf{p}' \mathbf{p}_1) (\mathbf{p}'' \mathbf{p}_1) &= 0. \end{aligned}$$

Ces deux dernières conditions se réduisent d'ailleurs à celles que nous avions déjà dans le cas particulier précédent

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' \mathbf{p}_1 &= 1 \\ \text{et } \mathbf{p}'' \mathbf{p}_1 &= 0. \end{aligned}$$

On peut donc commencer par résoudre ces équations comme plus haut, (avec $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1 = 1$) et l'on obtient pour \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 les valeurs (9).

Il reste alors à résoudre les équations :

$$\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 = 0 \quad \mathbf{p}' \mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}' \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}'' \mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}'' \mathbf{p}_1.$$

Une considération géométrique bien facile montre quel est le vecteur \mathbf{q}_1 qui satisfait à ces conditions. Pour le calculer nous posons :

$$\mathbf{q}_1 = \alpha \mathbf{p}' + \beta \mathbf{p}'' + \gamma \mathbf{p}_1.$$

En multipliant cette équation scalairement par \mathbf{p}'' on trouve :

$$\mathbf{q}_1 \mathbf{p}'' = \alpha \mathbf{p}' \mathbf{p}'' + \beta \mathbf{p}'' \mathbf{p}'' + \gamma \mathbf{p}_1 \mathbf{p}''$$

c.-à-d. en tenant compte de (7) et (9)

$$\beta = -\frac{\mathbf{q}'' \mathbf{p}_1}{\mathbf{p}'' \mathbf{p}''}.$$

En multipliant scalairement la même équation par p_1 et p' on trouve encore

$$\alpha = -\gamma = -\frac{q' p_1}{p'' p''}.$$

On a donc finalement :

$$(10) \quad q_1 = \frac{I}{p'' p''} \left\{ (q' p_1) (p_1 - p') - (q'' p_1) \cdot p'' \right\}$$

p_1 étant la valeur écrite plus haut. q_2 s'obtient de même à l'aide de p_2 .

Avec ces formules (9) et (10) examinons comment se présente une translation — que nous supposerons d'abord réelle — de l'espace. Soit r le vecteur qui la détermine. Les coordonnées p et q d'une droite deviennent après la translation :

$$p^* = p \quad *q = q + r \times p$$

$$\begin{aligned} c.-\text{à}-d. \quad p'^* &= p' \quad p''^* = p'' \\ q'^* &= q' + r \times p' \\ q''^* &= q'' + r \times p''. \end{aligned}$$

Calculons l'accroissement de q_1 . On a par exemple en posant $A = p' p'$ et $B = p'' p''$, pour l'accroissement de $q' p_1$

$$(r p' p_1) = \frac{I}{A} (r p' p') + \frac{I}{A} (r \times p' \cdot p' p'').$$

Le premier terme est nul ; il reste :

$$\frac{I}{A} (r p') (p' p'') - \frac{I}{A} (r p'') (p' p') = -r p''.$$

On trouve, après d'autres réductions du même genre, finalement :

$$(11) \quad q_1^* = q_1 + r \times p_1.$$

Ceci est, comme il fallait naturellement s'y attendre, l'expression de la même translation r effectuée sur la droite-image G_1 .

Examinons maintenant une translation purement imaginaire de vecteur izr . Nous supposerons pour commencer que la droite à transporter G est réelle et passe par l'origine ; soient p' et o ses vecteurs coordonnées.

Ils sont devenus, après que G ait été transportée en G^* :

$$p' \text{ et } i \mathbf{r} \times p'.$$

On ne peut ici appliquer la formule (10), puisque $p'' = 0$.

Il faut reprendre le calcul de p_1 et q_1 . La condition d'incidence de la droite G avec sa première droite-image G_1 est ici:

$$i(p_1 \mathbf{r} p) + (q_1 p') = 0.$$

D'autre part, la direction de G^* est réelle (la même que celle de G), il en est alors de même pour G_1^* .

On a donc: $p_1^* = p'$.

Pour obtenir la normale au plan de G_1^* et G^* il nous faut un vecteur dans ce plan; par exemple $\delta - \delta_1$, où δ et δ_1 sont les rayons vecteurs abaissés de l'origine sur G_1^* et G^* .

$$\begin{aligned} \text{On a:} \quad \delta_1 &= p_1^* \times q_1^* = p' \times q_1^* \\ \delta &= i p' \times \{ \mathbf{r} \times p' \} = i \mathbf{r} - i p' \cdot (\mathbf{r} p'). \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \delta - \delta_1 = p' \times q_1^* - i \mathbf{r} + i p' \cdot (\mathbf{r} p').$$

La normale est maintenant

$$p' \times \{ p' \times q_1^* \} + i \mathbf{r} \times p' = q_1^* + i \cdot \mathbf{r} \times p'.$$

Cette normale doit être isotrope:

$$(q_1^* + i \cdot \mathbf{r} \times p')^2 = q_1^* q_1^* - (\mathbf{r} \times p')^2 + 2 i (q_1^* \mathbf{r} p') = 0.$$

En comparant maintenant les diverses conditions obtenues:

$$q_1^* p' = (q_1^* \mathbf{r} p') = 0 \quad \text{et} \quad q_1^* q_1^* = (\mathbf{r} \times p')^2,$$

on voit que q_1^* est dans le plan de \mathbf{r} et p' et d'ailleurs perpendiculaire à ce dernier vecteur.

Dès lors:

$$(12) \quad \begin{aligned} \delta_1 &= \mathbf{r} \times p' \\ q_1^* &= \delta_1 \times p_1^* = p' \times \{ p' \times \mathbf{r} \} = - \mathbf{r} + p' \cdot (\mathbf{r} p'). \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'image de droite de la droite imaginaire G^* en faisant subir à G une translation (réelle, naturellement) de vecteur $\mathbf{p}' \times \mathbf{r}$. On obtient la seconde image par la translation opposée $-\mathbf{p}' \times \mathbf{r}$.

Passons à une droite imaginaire quelconque ; les accroissements de ses coordonnées-vecteurs sont :

$$\mathbf{q}'^* - \mathbf{q}' = -\mathbf{r} \times \mathbf{p}'' \quad \text{et} \quad \mathbf{q}''^* - \mathbf{q}'' = \mathbf{r} \times \mathbf{p}'.$$

Il suffit donc de remanier légèrement les calculs que nous avons fait pour la translation réelle, et l'on obtient pour l'accroissement de \mathbf{q}_1 :

$$B(\mathbf{q}_1^* - \mathbf{q}^*) = (\mathbf{r} \mathbf{p}'' \mathbf{p}_1) (\mathbf{p}' - \mathbf{p}_1) - (\mathbf{r} \mathbf{p}' \mathbf{p}_1) \mathbf{p}''.$$

Ceci peut encore se transformer.

On a d'abord

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \mathbf{p}'' \mathbf{p}_1) \mathbf{p}' - (\mathbf{r} \mathbf{p}' \mathbf{p}_1) \mathbf{p}'' &= (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{r}) \times (\mathbf{p}' \times \mathbf{p}'') \\ &= (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{r}) (A \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}') = A(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{r}) \times \mathbf{p}_1 - (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{r}) \times \mathbf{p}' \\ &= A(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{r}) \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1(\mathbf{r} \mathbf{p}') - \mathbf{r}. \end{aligned}$$

En modifiant un peu les calculs que nous avons faits dans le cas de la translation réelle, on trouve ensuite :

$$(\mathbf{r} \mathbf{p}'' \mathbf{p}_1) \mathbf{p}_1 = \frac{I}{A} (\mathbf{r} \mathbf{p}'' \mathbf{p}') + (\mathbf{r} \mathbf{p}') \mathbf{p}_1 \frac{B}{A}$$

et ces deux résultats combinés conduisent finalement à la formule :

$$(13) \quad \mathbf{q}_1^* = \mathbf{q}_1 + \mathbf{p}_1 \times (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{r}).$$

Ainsi l'image de droite est transformée exactement de la même façon que la droite réelle l'était (à droite également), tout à l'heure.

On trouverait encore pour la seconde droite-image

$$(13') \quad \mathbf{q}_2^* = \mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_2 \times (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{r}).$$

Nous pouvons en combinant les résultats partiels qui précèdent décrire maintenant l'effet d'une translation quelconque sur une droite complexe arbitraire.

Nous allons faire usage de ce résultat, pour déterminer la condition quant aux images réelles, pour qu'une droite imaginaire G passe par

le point complexe c . Le point milieu m entre c et \bar{c} est réel, et le vecteur \vec{mc} est purement imaginaire. Il suffira de transporter parallèlement en c toutes les droites réelles et imaginaires de m .

La condition pour qu'une droite imaginaire contienne le point réel m est bien évidemment que ses deux droites-images passent par m . Réciproquement deux droites dirigées quelconques par m représentent une droite imaginaire par ce point. Supposons que m soit à l'origine, c et \bar{c} sur l'axe des z . Pour une G réelle, le vecteur $\mathbf{p} \times \mathbf{r}$ de tout à l'heure est dans le plan des xy , et α la longueur $h \sin \varphi$, si φ désigne l'angle de G avec OZ , et ih la distance \vec{mc} . Les deux images G_1 et G_2 sont donc parallèles, à égale distance de part et d'autre de l'origine.

Si l'on fait tourner G autour de OZ , ses images engendrent l'hyperboloïde de révolution :

$$\frac{x^2 + y^2}{h^2 \sin^2 \varphi} - \frac{z^2}{h^2 \cos^2 \varphi} = 1.$$

Si φ varie, on obtient un système d'hyperboloïdes homofocaux, les cas extrêmes étant donnés par $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Dans le premier cas on obtient l'axe des z (les deux plans isotropes par cet axe) et dans le second cas le cercle focal $x^2 + y^2 = h^2$. Ce cercle est justement le cercle-image du point c .

Considérons maintenant aussi les droites imaginaires passant par l'origine : En opérant sur les images comme nous venons de le faire sur G , on obtient le critère que voici :

Une droite imaginaire G passe par un point imaginaire c si chacune de ses droites-images peut être placée sur un hyperboloïde de révolution dont le cercle-image π du point c est la focale, — mais en n'appartenant pas à deux systèmes de génératrices de même espèce.

(Les systèmes de génératrices de même espèce sont ceux qui se transforment l'un dans l'autre, lorsque φ varie.)

Ce même système d'hyperboloïdes homofocaux apparaît encore, si l'on cherche à représenter les tangentes réelles et imaginaires du cercle π de tout à l'heure.

Soit T une de ces tangentes : pour construire T_1 et T_2 , il faut mener par T les deux plans isotropes. Mais ces plans passent l'un par c , et l'autre par \bar{c} . Ils se déduisent d'ailleurs l'un de l'autre par une *symétrie réelle*, pour laquelle la représentation que nous employons est — comme pour les mouvements réels — invariante.

On voit donc qu'on obtient ici deux génératrices de l'un des hyperboloïdes de tout à l'heure, qui se coupent dans le plan du cercle. En d'autres termes :

Les droites-images d'une tangente à un cercle réel sont deux génératrices symétriques par rapport au plan du cercle d'un hyperboloïde de révolution dont le cercle est la focale.

3. Les résultats précédents conduisent naturellement à examiner l'ellipse sous le même point de vue. Soit donc ε une ellipse, que nous prendrons comme focale d'un système de quadriques homofocales. Soit T une de ses tangentes imaginaires; comme celle-ci se trouve dans un plan réel, elle contient un point réel t qui, la chose est essentielle, ne peut se trouver qu'à l'intérieur de la focale ε . Or, par un point à l'intérieur d' ε , il passe un hyperboloïde réglé du système homofocal: nommons H et G les deux génératrices réelles de cet hyperboloïde qui passent par t . Menons maintenant les deux plans isotropes par la tangente T : ils sont aussi tangents à l'hyperboloïde et contiennent par conséquent l'une ou l'autre des génératrices G et H . Nous obtenons donc le résultat suivant :

Les droites-images des tangentes à une ellipse sont les génératrices des hyperboloïdes réglés, dont l'ellipse est une focale.

Si l'on considère, au lieu de l'ellipse ε , une hyperbole ζ , les choses sont tout à fait semblables. Le point réel d'une tangente réelle se trouve dans la partie du plan limitée par l'hyperbole qui ne contient pas le centre, et c'est précisément aussi dans ce domaine que se trouvent les intersections du plan de la focale avec les hyperboloïdes réglés.

Si l'on considérait enfin une focale sans point réel (bien que d'équations réelles), c'est par tout point de son plan que passe un hyperboloïde réglé, de telle sorte que le raisonnement précédent peut subsister tel quel.

On peut enfin supposer que F soit une génératrice (imaginaire) quelconque d'une quadrique quelconque du système homofocal. Les plans isotropes par F touchent également les focales, de telle sorte que les images de la droite F sont aussi les images, (l'une de droite, l'autre de gauche) de deux tangentes à la focale. On voit donc qu'on a l'énoncé suivant :

Les images réelles des droites imaginaires situées sur une quadrique réelle (ellipsoïde, hyperboloïde à une ou deux nappes) ou d'équation réelle (ellipsoïde imaginaire) sont les génératrices réelles des hyperboloïdes à une nappe, homofocaux à Φ .

Si la génératrice imaginaire F de \emptyset contient un point réel (ce qui est le cas si \emptyset est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à deux nappes), ce point est également commun aux deux images F_1 et F_2 . Celles-ci sont sur un même hyperboloïde, et dans l'un et l'autre système de génératrices.

Par un point réel quelconque ρ de l'espace, il passe 4 plans isotropes tangents à toutes les quadriques du faisceau homofocal. Les 3 paires d'arêtes opposées de ce tétraèdre (dégénéré) sont les 3 paires de génératrices situées sur les 3 homofocales qui passent par ρ . Deux d'entre elles sont réelles, F_1 et F_2 sur l'hyperboloïde à une nappe. Les autres sont imaginaires conjuguées par paires: F et \bar{F} sur l'ellipsoïde par exemple et H et \bar{H} sur l'hyperboloïde à deux nappes. Par conséquent il nous faut avoir recours aux quatre orientations possibles de F_1 et F_2 pour représenter les 4 génératrices F , \bar{F} , H et \bar{H} , et c'est l'orientation seule qui permettra de déterminer si la génératrice représentée est sur un ellipsoïde ou un hyperboloïde à deux nappes du système. Si la génératrice F est sur un hyperboloïde à une nappe ou sur un ellipsoïde imaginaire, les choses se présentent moins simplement. F est dans le même système de génératrices que \bar{F} . On peut encore par F et \bar{F} mener les 4 plans isotropes, et des 6 arêtes du tétraèdre ainsi obtenu, il y en a encore deux de réelles: F_1 et F_2 . Il faut encore avoir recours à toutes les orientations de ces dernières pour représenter les quatre autres. Mais F_1 et F_2 ne sont plus sur un même hyperboloïde et il serait un peu long de faire voir dans quel rapport sont les deux hyperboloïdes qui les contiennent.

(Reçu le 31 janvier 1929)