

Zeitschrift:	Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	1 (1929)
Artikel:	Sur le polygone de Newton et les courbes algébriques planes.
Autor:	Dumas, Gustave
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-1140

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur le polygone de Newton et les courbes algébriques planes

Par GUSTAVE DUMAS, Lausanne

Introduction

En modifiant quelque peu la méthode fondée, pour les courbes planes, sur l'emploi du polygone de Newton et en lui donnant plus d'ampleur, on pourra, semble-t-il, par généralisation, arriver ensuite pour les surfaces, à de bons résultats¹⁾. Tenter de réaliser, pour les courbes, cette obligation est devenu, peu à peu, la raison du présent travail.

La marche suivie ne fait intervenir aucune hypothèse sur l'ordre infinitésimal des racines au voisinage d'un point singulier et ne fait usage que du théorème en vertu duquel un développement en puissances entières, positives et croissantes existe toujours pour un point simple.

Le terme de «courbe» se rencontrera constamment, mais, quand il s'agira d'un point sur une courbe, ce point pourra être aussi bien réel qu'imaginaire. Les variables et les quantités auxquelles on aura affaire appartiendront ainsi au domaine complexe.

Les variables x et y , dans l'équation initiale

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

joueront un rôle symétrique. Les représentations, à cause de cela, auront la forme paramétrique.

Ce qui, dans la suite, semble être essentiel, ce sont les substitutions S . Leur interprétation géométrique en facilite l'application et montrent pourquoi elles livrent, simultanément pour ainsi dire, aussi bien les développements relatifs à l'origine que ceux qui se rattachent à l'infini. Ces substitutions S ont été obtenues par la considération de l'espace. Elles conduisent à un procédé de réduction dans lequel on peut faire rentrer, d'une même manière, ceux de Puiseux et de Weierstrass.

A remarquer aussi le raisonnement final relatif à l'épuisement de la singularité. Ce raisonnement n'est pas celui que l'on fait d'habitude et dans lequel intervient le nombre de fois où y s'annule pour x égal

¹⁾ Voir à ce propos une Note qui doit paraître dans les Actes du Congrès de Bologne.

à zéro. Ce genre de démonstration ne pourrait sans autre se transmettre à l'espace.

Il y aurait eu intérêt, enfin, à étudier d'un peu près le cas où, dans (1), le premier membre devient une série entière. Cela n'a pas été fait pour ne point allonger.

Systèmes nodaux

1. Un système de deux axes, rectangulaires ou non, fig. 1, $\Omega\alpha$ et $\Omega\beta$, définit dans le plan un *système de points nodaux*.

Ces points nodaux sont constitués par l'ensemble des points du plan, dont les coordonnées, relativement aux axes $\Omega\alpha$ et $\Omega\beta$ sont, chacune, représentées par un nombre entier, positif, négatif ou nul.

Les *nodales* du système sont les droites du plan, qui passent par deux points nodaux, et qui, de ce fait, en contiennent une infinité.

Un *segment nodal* est un segment rectiligne dont les deux extrémités sont des *points nodaux*.

A tout segment nodal « appartient », par définition, le nombre de points nodaux situés sur ce segment, abstraction faite de l'une des extrémités. Un segment nodal est *primitif* s'il ne lui appartient qu'un point nodal.

Un *parallélogramme nodal* est un parallélogramme dont les sommets sont des points nodaux.

Le nombre des points nodaux qui „appartiennent“ à un parallélogramme nodal est égal à la valeur absolue du déterminant que l'on forme avec les nombres mesurant la projection sur les axes $\Omega\alpha$ et $\Omega\beta$ de deux côtés non parallèles.

La démonstration de ce théorème peut se tirer immédiatement du fait que le nombre, diminué d'une unité, des nodales parallèles à l'un des côtés et recouvrant, fig. 1, le parallélogramme est égal lorsque les côtés sont primitifs, au nombre des points nodaux qui appartiennent au parallélogramme.²⁾

²⁾ Une démonstration du théorème, susceptible d'être étendue avec facilité aux parallélépédres de l'espace à n dimensions se trouve, pour $n = 3$, chez Minkowski, *Diophantische Approximationen*, p. 88.

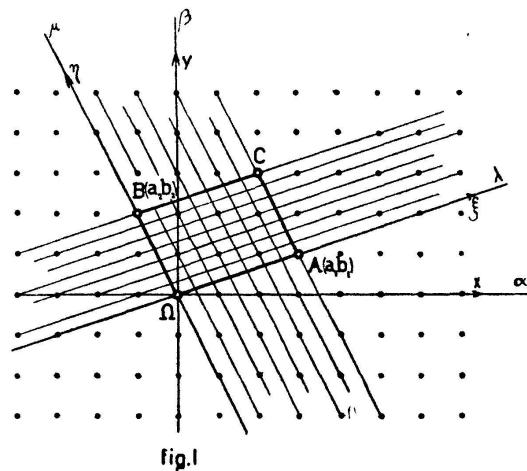


fig.1

Les nodales parallèles à l'un des côtés d'un parallélogramme construit sur deux segments primitifs et qui, lui « appartiennent » sont ainsi en même nombre que les points nodaux qui appartiennent au parallélogramme.

Un parallélogramme nodal est *primitif* si le nombre des points nodaux qui lui appartiennent se réduit à l'unité.

2. On peut, de bien des manières, superposer un système nodal à un autre système nodal.

La manière de procéder qui intéresse ici, consiste à mener dans le plan α, β , par l'origine Q , deux nodales distinctes qui deviendront les supports de deux nouveaux axes $Q\lambda, Q\mu$; puis, de mener ensuite, dans le plan α, β , l'ensemble des nodales respectivement parallèles aux deux premières. Les points d'intersection des deux familles de nodales ainsi constituées seront les points nodaux du nouveau système nodal (λ, μ) . Les points A et B , fig. 1, sont les premiers points nodaux que l'on rencontre respectivement à partir de Q sur les directions positives $Q\lambda$ et $Q\mu$. a_1 et b_1 , d'une part, a_2 et b_2 d'autre part, sont leurs coordonnées respectives dans le système (α, β) .

Les segments QA et QB sont des segments primitifs. Nous posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Le nombre entier Δ , pris en valeur absolue, donne, on l'a vu, le nombre des points nodaux qui appartiennent au parallélogramme nodal $QABC$.

Deux cas sont à distinguer, suivant que les directions positives des axes $Q\lambda$ et $Q\mu$ (donnés dans cet ordre) sont ou ne sont pas orientés de la même façon que les directions positives des axes $Q\alpha$ et $Q\beta$ (donnés dans cet ordre).

Si l'orientation est la même (cas de fig. 1), Δ est positif; si l'orientation est différente, Δ est négatif.

Introduisons, une fois pour toutes, le nombre ε égal à $+1$ pour Δ positif, à -1 pour Δ négatif.

Le nombre des points nodaux appartenant au parallélogramme $QABC$ est alors égal au nombre toujours positif $\varepsilon \Delta$.

Les coordonnées de A dans le système (λ, μ) sont alors, que les axes des deux systèmes soient orientés ou non de la même façon:

$$\lambda = \varepsilon A, \quad \mu = 0$$

celles de B :

$$\lambda = 0, \quad \mu = \varepsilon A.$$

3. Ceci conduit aux relations suivantes, dans lesquelles α et β , d'un côté, λ et μ , de l'autre, sont les coordonnées de n'importe quel point nodal commun aux deux systèmes superposés:

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\lambda a_1 + \mu a_2}{\varepsilon A} \\ \beta = \frac{\lambda b_1 + \mu b_2}{\varepsilon A} \end{cases}$$

avec inversement:

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda = \varepsilon(b_2 \alpha - a_2 \beta) \\ \mu = \varepsilon(-b_1 \alpha + a_1 \beta). \end{cases}$$

4. On remarquera à propos des équations (3) que leurs seconds membres, égalés à zéro, donnent précisément les équations relativement à λ et μ des nodales porteuses de A et B .

On a là un moyen immédiat d'obtenir ces égalités (3) et, partant, les égalités (2). La seule précaution à prendre dans l'établissement direct de ces équations, est de s'arranger de façon que leurs seconds membres, égalés respectivement à λ et à μ , donnent pour λ et μ des valeurs positives pour tout point situé à l'intérieur de l'angle $\lambda\mu$.

Pour la détermination effective d'un système particulier (λ, μ) , superposé au système (α, β) , il y aura, dans bien des cas, avantage à choisir, avant toute chose et de la manière convenable, les points A et B définissant les axes λ et μ .

5. Un cas particulier essentiel est celui où le parallélogramme $QABC$ est primitif. A est égal à ± 1 et les deux systèmes de points nodaux superposés (α, β) et (λ, μ) , sont alors identiques.

Les substitutions

6. À côté des formules (3) et (2), on peut mettre respectivement en parallèle, les transformations suivantes dont les substitutions *quadratiques* ne sont qu'un cas particulier:

$$(4) \quad \begin{cases} x = \xi^{\varepsilon b_2} \eta^{-\varepsilon b_1} \\ y = \xi^{-\varepsilon a_2} \eta^{\varepsilon a_1} \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \xi^{\varepsilon \Delta} = x^{a_1} y^{b_1} \\ \eta^{\varepsilon \Delta} = x^{a_2} y^{b_2} \end{cases}$$

et, dont les secondes (5) s'obtiennent aussi par résolution des premières (4) relativement à ξ et η .

Le déterminant des exposants dans les seconds membres de (4) et (5) est encore le déterminant Δ de tout à l'heure. Les substitutions (4) à cause de cela, se répartissent en deux catégories: les substitutions *positives*, pour lesquelles Δ est positif; les substitutions *négatives*, pour lesquelles Δ est négatif.

Dans le cas particulier de la figure 1, pour laquelle $\Delta = 7$, $\varepsilon = +1$, avec $a_1 = 3$, $b_1 = 1$, $a_2 = -1$, $b_2 = 2$, ces formules (4) et (5) deviennent:

$$(6) \quad \begin{cases} x = \xi^2 \eta^{-1} & \xi^7 = x^3 y \\ y = \xi \eta^3 & \eta^7 = x^{-1} y^2. \end{cases}$$

Ces substitutions (4) ou (5) établissent ainsi une *correspondance rationnelle* ($1, \varepsilon \Delta$) entre les points d'un plan x, y et ceux d'un plan ξ, η .

7. Soit un polynôme entier ou une série entière en x et y :

$$(7) \quad f(x, y) = \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta.$$

Effectuons sur cette expression la transformation (4), elle devient:

$$(8) \quad F(\xi, \eta) = \sum A_{\alpha\beta} \xi^\lambda \eta^\mu.$$

Par cette transformation le terme de coefficient $A_{\alpha\beta}$, au second membre de (8), est précisément le transformé du terme au second membre de (7) de même coefficient $A_{\alpha\beta}$.

Supposons, en outre, deux systèmes nodaux superposés (α, β) et (λ, μ) , les α, β étant liés aux λ, μ par les relations (2) et (3). Dans le système (α, β) , fixons, comme on le fait pour la construction du polygone de Newton, le point représentatif $M_{\alpha\beta}$, du terme $A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ et dans le système (λ, μ) le point représentatif $M_{\lambda\mu}$, du terme transformé $A_{\alpha\beta} \xi^\lambda \eta^\mu$.

Ces deux points représentatifs $M_{\alpha\beta}$ et $M_{\lambda\mu}$ sont confondus.

On peut donc affirmer que *les polygones de Newton* de $f(x, y)$ et de $F(\xi, \eta)$, rapportés le premier au système (α, β) , le second au système (λ, μ) , systèmes tous deux à la base de la transformation (4), sont identiques.

Ce fait a son importance. Il jouera implicitement son rôle dans les démonstrations.

8. On ordonne souvent les termes d'un polynôme entier ou d'une série entière $f(x, y)$ par ordre de polynômes homogènes en x et y de degrés croissants. Ceci revient à ordonner $f(x, y)$ suivant des groupes de termes dont les points représentatifs dans le système nodal (α, β) se trouvent répartis sur les nodales successives parallèles à la nodale $\alpha + \beta = 0$.

Plus brièvement, l'on peut dire qu'il s'agit là d'une ordonnance *parallèlement* à la nodale sus-dite.³⁾

Mais une ordonnance pareille peut se faire parallèlement à n'importe quelle nodale du plan α, β .

Et, si la nodale parallèlement à laquelle $f(x, y)$ aura été ordonné se trouvait être la nodale support de $\mathcal{Q}\mu$, $F(\xi, \eta)$ transformé de $f(x, y)$ par (4) se trouvera, par le fait même, ordonné suivant les puissances croissantes de ξ que multiplient des polynômes entiers en η .

Si, par exemple, on se rapporte à la fig. I, et qu'à propos de celle-ci on considère le polynôme

$$(9) \quad f(x, y) = 1 + y + y^2 + (xy + y^3) + xy^2 + (x^2y + xy^3)$$

lequel est ainsi ordonné parallèlement à $\mathcal{Q}\mu$ et qu'on effectue sur lui la substitution (6), on trouve

$$(10) \quad F(\xi, \eta) = 1 + \xi\eta^3 + \xi^2\eta^6 + \xi^3(\eta^2 + \eta^9) + \xi^4\eta^5 + \xi^5(\eta + \eta^8),$$

résultat qui, d'ailleurs, se déduit immédiatement, et par *simple lecture*, de la figure même.⁴⁾

Le calcul à faire se trouve, d'autre part, entièrement caractérisé par l'égalité symbolique :

³⁾ A propos d'une ordonnance de termes, parallèle à une direction donnée, voir: Sur quelques cas d'irréductibilité, etc. Journ. de Math. 6, II, 1906, p. 250.

⁴⁾ Comme le montre la figure I, tout polynôme $f(x, y)$ ne serait pas nécessairement transformé par (6) en un "polynôme". Des puissances négatives auraient pu s'introduire dans $F(\xi, \eta)$ si $f(x, y)$ dans (9) n'avait pas été choisi de façon particulière.

$$\left(\begin{array}{cc} x & y \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} \xi & \eta \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \xi & \eta \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 2 \\ 3 & 9 \\ 4 & 5 \\ 5 & 1 \\ 5 & 8 \end{array} \right)$$

9. La lecture directe dans la figure 1, du second membre de (10) est facilitée par la présence de la lettre η placée sur la direction positive de l'axe $\Omega\mu$ relatif à l'exposant μ de η . Les autres lettres x, y, ξ , dans la figure, ont une signification semblable.

10. Les axes des λ et μ n'auront pas en général leur origine confondue avec l'origine Ω des axes $\Omega\alpha$ et $\Omega\beta$. Rien d'essentiel ne sera modifié pour cela, puisque faire coïncider les deux origines ou les séparer, en déplaçant les axes parallèlement à eux-mêmes revient en dernier ressort à multiplier $f(x, y)$ par un terme de la forme $x^k y^l$ où k et l sont entiers, positifs, nuls ou négatifs, ou, ce qui revient au même, à multiplier $F(\xi, \eta)$ par un monôme analogue en ξ et η .

11. Les substitutions telles que (4) seront appelées dans la suite *substitutions S*.

Une substitution S sera *unimodulaire*, dans le cas de $\Delta = \pm 1$.

Les substitutions S unimodulaires occupent une place prépondérante dans toute la théorie. La correspondance qu'elles définissent entre le plan des x, y et celui des ξ, η est alors une *correspondance de Cremona*.

Pour construire une pareille substitution, il suffit, dans le plan des α, β de considérer un parallélogramme primitif. Les substitutions S non-unimodulaires, c'est-à-dire celles dont le déterminant Δ n'est pas égal à ± 1 , ont cependant leur rôle à jouer, car, parfois, plus commodément adaptables et d'interprétation souvent plus immédiate, leur introduction permet, dans bien des cas, de raccourcir les démonstrations.

12. Considérons maintenant deux substitutions S distinctes: les substitutions S_i , ($i = 1, 2$), dans lesquelles interviennent respectivement les variables ξ_i et η_i .

Les supports des axes (axes $\Omega\mu$) se rapportant aux variables η_i seront confondus, sans qu'il en soit nécessairement de même des directions positives. Les supports des axes (axes $\Omega\lambda$), se rapportant aux variables ξ_i , ne le seront pas, mais leurs directions positives respectives, à partir de Ω , seront toutes deux dirigées d'un même côté du support de l'axe des η_i .

Les substitutions S_i , choisies de la sorte, pourront être ou non, simultanément, unimodulaires ou non-unimodulaires, positives ou négatives.

Les variables sont alors liées par les deux relations :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1^\rho \eta_1^{\sigma_1} = \xi_2^\rho \eta_2^{\sigma_2} \\ \eta_1^{\tau_1} = \eta_2^{\tau_2} \end{array} \right.$$

Les exposants, dans celles-ci sont entiers ; dans les deux membres de la première, les variables ξ_1 et ξ_2 ont, toutes deux, le même exposant ρ , qu'on peut regarder comme positif.

Ces relations (11) sont immédiates. Un simple examen de la figure 1 permet de les obtenir.

Quelle que soit, en effet, la position qu'occupe la direction positive de l'axe $\Omega\lambda$, à droite de l'axe $\Omega\mu$, le λ d'un point nodal quelconque du système (α, β) restera le même. On aura, pour le point $\alpha = 1, \beta = 0$, par exemple, les coordonnées $\lambda = \rho, \mu = \sigma_1$ dans un premier système (λ, μ) , $\lambda = \rho, \mu = \sigma_2$ dans un second système (λ, μ) , les directions positives des deux axes $\Omega\lambda$ étant dirigées comme il vient d'être dit.

Ceci conduit à la première des formules (11).

La seconde s'obtient d'une manière analogue, en comparant les deux μ de l'un ou l'autre des points nodaux du système (α, β) , situés sur le support de l'axe des η_i .

Le Polygone

13. Soit $f(x, y) = \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ le polynôme considéré où l'on suppose tous les coefficients $A_{\alpha\beta}$ des termes figurant sous le signe Σ , différents de zéro.

A chacun de ces termes on fait correspondre dans un système nodal rapporté à deux axes $\Omega\alpha$ et $\Omega\beta$ un point nodal $A_{\alpha\beta}$ de coordonnées α, β .

Ces *points représentatifs* du polynôme $f(x, y)$ sont en nombre fini. On peut, par suite, les enclore d'un polygone convexe, unique et bien déterminé, si l'on exige que chaque sommet de ce polygone soit point représentatif effectif d'un terme de $f(x, y)$.

Ce polygone est *fermé*; des points représentatifs se trouvent en général à son intérieur. Ce polygone est, par définition, le *polygone de Newton* du polynôme $f(x, y)$.

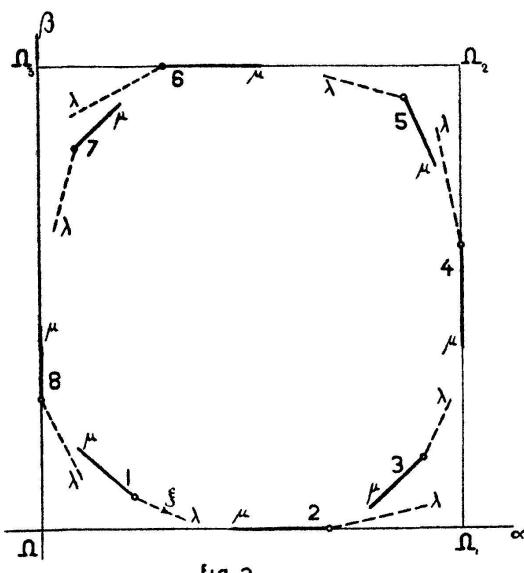
On dira indifféremment aussi, que ce polygone est le polygone de Newton de l'équation algébrique $f(x, y) = 0$.

Dans un polygone de Newton la partie du contour dont la convexité est tournée du côté de Ω , sera sa partie *interne*.

On pourra toujours supposer qu'un sommet, au moins, du polygone se trouve sur l'axe $\Omega \alpha$ et un autre, au moins, sur l'axe $\Omega \beta$. Si ce n'était le cas, une division de $f(x, y)$ par un monôme $x^k y^l$ y conduirait.⁵⁾

14. Un polygone de Newton peut dégénérer en une droite. Égalés à zéro, les polynômes correspondant représentent des courbes très particulières. Ces polynômes peuvent être considérés comme une généralisation des polynômes homogènes, car ils satisfont identiquement à un type déterminé d'équation aux dérivées partielles du premier ordre, type analogue à celle qui donne le théorème d'Euler.

15. Pour schématiser un polygone de Newton on peut faire usage de la figure 2.



Dans celle-ci le polygone se trouve encadré par le rectangle $\Omega\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ dont les côtés sont parallèles aux axes $\Omega\alpha$ et $\Omega\beta$.

Le polygone présente quatre parties convexes respectivement du côté de chacun des sommets de ce rectangle. Chacune de ces parties est caractérisée par un trait plein qui, lui, représente un côté effectif du polygone. Le trait en pointillé part de l'extrémité du trait plein. Cette extrémité est un sommet du polygone, et le trait en pointillé ne pénètre pas à l'intérieur de celui-ci.

Les numéros 1, 3, 5 et 7 correspondent ainsi respectivement à chacune des parties convexes dont on vient de parler.

⁵⁾ Les choses se passent d'une façon moins simple dans l'espace.

Dans la même figure 2, les côtés 2, 4, 6 et 8 sont des côtés du polygone qui, s'ils existent, coïncident respectivement avec l'un ou l'autre des quatre côtés du rectangle.

La figure 3 caractérise de manière suffisante les opérations à effectuer à propos d'un côté donné de la partie interne du polygone.

Soit, fig. 3, BAC l'angle en un sommet A de la partie interne du polygone.

On prolonge AB , ce qui donne un axe $A\mu$ qui se rapportera à la variable η . AB étant un segment nodal, l'axe $A\mu$ est supporté par une nodale.

On mène ensuite par A une autre nodale qui sera porteuse de l'axe $A\lambda$, relatif à la variable ξ . Cette dernière nodale doit être extérieure au polygone ou, tout au plus, coïncider avec celle qui porte le côté AC .

L'angle $\lambda A \mu$ est, de la sorte, un angle inférieur à 180° et qui, dans son intérieur, contient le polygone.

Menons, enfin, par Ω les axes $\Omega\lambda'$ et $\Omega\mu'$, parallèles respectivement aux axes $A\lambda$ et $A\mu$.

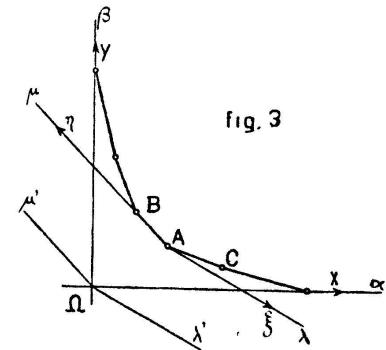
Ces axes issus de Ω ou, ce qui revient au même, les axes $A\lambda$ et $A\mu$, issus de A , définissent une substitution S , adaptée au polygone le long du côté AB , avec sommet en A .

Cette substitution sera définie par les équations (4), étant entendu que le premier membre de l'équation de la nodale, support de $\Omega\lambda$, est le second membre de la deuxième équation (3), et, le premier membre de l'équation de la nodale, support de $\Omega\mu$, le second membre de la première équation (3).

Pour la figure (3), telle qu'elle est disposée on a $\Delta > 0$ avec, par conséquent, $\varepsilon = +1$.

La substitution adoptée transforme $f(x, y)$ en un polynôme en ξ et η ordonné parallèlement à AB ; polynôme divisible par le monôme $\xi^k \eta^l$, ce monôme étant ce que devient, abstraction faite de son coefficient, le terme en $x^\alpha y^\beta$ dont le point représentatif est précisément A .

Par la substitution S ainsi choisie, l'équation (1) se transforme en une nouvelle équation



$$(12) \quad \varphi(\eta) + \xi \psi(\xi, \eta) = 0$$

où $\varphi(\eta)$ et $\psi(\xi, \eta)$ sont encore des polynômes.

Le polynôme entier $\varphi(\eta)$, est lui-même de la forme

$$(13) \quad \varphi(\eta) = A + A_1 \eta^{\varepsilon \Delta} + A_2 \eta^{2 \varepsilon \Delta} + \dots + B \eta^{n \varepsilon \Delta},$$

où n représente le nombre de points nodaux appartenant au côté AB du polygone.

Les points nodaux de ce côté AB seraient dans l'ordre où ils se présentent à partir du point A , désignés par les lettres A, A_1, A_2, \dots, B qui représentent au second membre de (13) les coefficients de $\varphi(\eta)$.

Envisagés comme coefficients, A et B représentent des quantités différentes de zéro. Les autres coefficients A_1, A_2, \dots peuvent ou non se trouver différents de zéro.

On remarquera, en outre, qu'à cause de la substitution choisie, on a pour celle-ci, fig. 3, dans son expression (4)

$$a_2 < 0, \quad b_2 > 0$$

de sorte qu'ayant $\varepsilon > 0$, les deux exposants de ξ se trouvent tous deux positifs.

L'équation (12), d'autre part, pour $\xi = 0$, admet exactement $n \varepsilon \Delta$ racines différentes de zéro. La courbe représentée par (12) et située dans le plan des ξ, η , possède ainsi $n \varepsilon \Delta$ branches ou fragments coupant l'axe des η en $n \varepsilon \Delta$ points à distance finie, branches auxquelles correspondent, dans le plan des x, y , à cause de la valeur positive des exposants de ξ dans l'expression de la substitution S intervenue, un certain nombre de branches de la courbe $f(x, y) = 0$, branches passant par l'origine O .

Sans serrer de plus près la question, on peut donc affirmer brièvement que les côtés de la partie interne du polygone caractérisés par le chiffre 1 dans la figure (2), déterminent des points de la courbe (1) confondus avec l'origine O , $x = y = 0$ du plan des x, y .

Ils les donnent en réalité tous, mais ce résultat s'établira plus loin.

16. Le résultat auquel on vient d'aboutir est bien connu. Ce qui peut avoir son intérêt, c'est le fait que, par les substitutions schématisées dans la fig. 2, on voit immédiatement, et par les mêmes raisonnements,

qu'au côté (unique, s'il existe) désigné par 2 dans la fig. 2, correspondant, sur la courbe $f(x, y) = 0$, les points dans le fini et différents de l'origine, situés à l'intersection ou aux intersections avec l'axe des x . Cela va de soi, d'ailleurs.

Mais, toujours de la même façon, l'on verrait, que la partie convexe du côté de Ω_1 et correspondant au chiffre 3 donne les points à l'infini sur Ox ; le côté 4, les points à l'infini dans une direction parallèle à Ox ; les côtés 5, les points pour lesquels x et y sont simultanément infinis.

On pourrait poursuivre et faire le tour de la figure 2, mais il est plus simple de dire que, par symétrie, les résultats relatifs au côté (éventuel) 6 se déduiraient, par permutation de x et de y , de ceux que l'on a obtenus pour 4, etc.

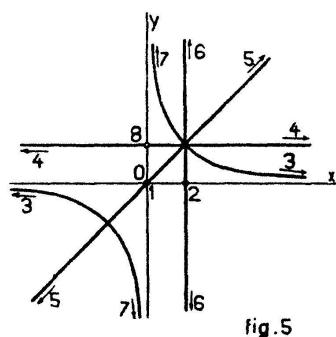
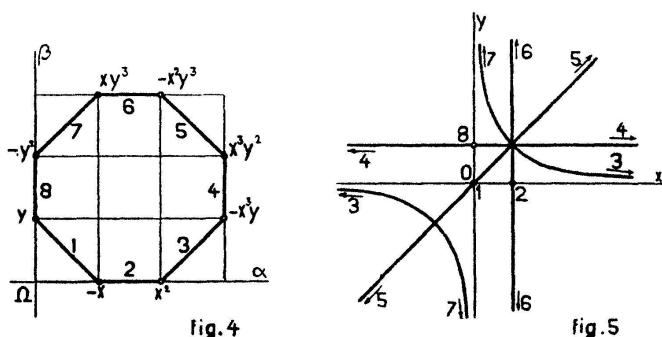
La figure 2 schématisse des substitutions S positives. On arriverait, bien entendu, aux mêmes résultats, et de la même façon, par des substitutions S négatives.

17. L'exemple très simple qui suit confirmera ces résultats.
Considérons la courbe (dégénérée)

$$(x - 1)(y - 1)(x - y)(xy - 1) = 0$$

dont le polygone, tout calcul effectué dans le premier membre de l'équation, est donné par la figure 4.

La courbe elle-même se trouve dans la figure 5.



La correspondance entre la courbe et le polygone, telle qu'elle vient d'être décrite dans le cas général, est immédiate.

18. Une substitution S appliquée à une courbe algébrique donnée, a donc pour effet de permuter entre eux les points, à l'origine, sur les axes, et à l'infini.⁶⁾

⁶⁾ Au sujet du rôle de ces permutations dans le problème de l'espace, voir Comptes rendus Ac. Sc. Paris, t. 154 (1912), p. 1495.

Une remarque évidente pour ainsi dire est encore la suivante:

Si, dans le plan des x, y , on effectue une translation d'axes, le polygone de l'équation $f(x, y) = 0$ modifiée, restera, en général, le même.

Quelle que soit la translation envisagée, il restera contenu à l'intérieur du rectangle $Q Q_1 Q_2 Q_3$, fig. 2; des sommets du nouveau polygone se trouveront certainement sur les côtés extérieurs du rectangle, c'est-à-dire sur les côtés dont l'intersection n'a pas lieu à l'origine Q .

Réduction

19. Quel que soit, dans le polygone, le côté que l'on considère, les représentations de la courbe $f(x, y) = 0$, aux points correspondants, s'obtiennent toujours de la même façon.

S'il ne s'agit pas d'un côté de la partie interne, une première substitution S ramène à ce cas, de sorte que c'est le seul dont il soit nécessaire de s'occuper.

20. Dans l'ensemble de la théorie, les variables désignées par la lettre ξ (avec ou sans indice) sont appelées *systématiquement* à varier dans le voisinage de zéro, alors que les autres variables η se meuvent autour de valeurs finies et différentes de zéro α et sont amenées ensuite par des translations: $\eta = \eta_1 + \alpha$ à se mouvoir, elles aussi, autour de zéro.

21. Les combinaisons de substitutions S permettant d'aboutir à la réduction de la singularité que la courbe $f(x, y) = 0$ peut présenter en $x = y = 0$, sont multiples.

Une façon simple de procéder est la suivante:

Prenant l'un des côtés de la partie interne du polygone, on lui adapte une substitution S unimodulaire. L'équation se transforme alors en une autre de la forme (12) ou $\varphi(\eta)$ s'écrit

$$\varphi(\eta) = A + A_1 \eta + \dots + B \eta^n,$$

les coefficients A, A_1, \dots, B ayant la même signification que dans (13).

Si l'équation $\varphi(\eta) = 0$ n'admet que des racines simples, la réduction est achevée. On résout pour cela l'équation (12) dans le voisinage de chacune de ces racines simples, ce qui donne des développements en puissances entières, positives et croissantes de ξ à introduire à la place de η , dans les seconds membres de la transformation S utilisée.

On peut encore, si l'on veut, résoudre paramétriquement l'équation (12) dans le voisinage de $\xi = 0$ et de la racine simple η , ce qui conduit

à une autre représentation en $x = y = 0$, d'une des branches de la courbe $f(x, y) = 0$.

22. Le choix de la substitution unimodulaire S , adaptée au côté donné du polygone, est, en quelque sorte, illimité. Cette substitution, en effet, peut être positive ou négative, et l'axe relatif à la variable ξ , être choisi d'une infinité de façons, tout en restant extérieur au polygone.

La question de l'équivalence des représentations se pose donc. Elle serait à résoudre sur la base des égalités (11).

23. Lorsque l'équation $\varphi(\eta) = 0$ admet des racines multiples, la réduction n'est point terminée. Si a est une des racines multiples, on opère tout d'abord une translation en a , ce qui ramène au cas qui vient d'être étudié. D'une manière générale, il ne pourrait y avoir poursuite indéfinie du procédé de réduction sans achèvement des opérations que dans le cas où la partie interne du polygone ne cesserait de se présenter sous forme d'un segment nodal unique dont l'inclinaison sur les axes supposés placés rectangulairement serait toujours de 45° , et le nombre des points nodaux lui appartenant égal, sans discontinue, au même entier n supérieur à l'unité.

Supposons, afin de simplifier l'écriture, que la chose ait lieu dès l'équation initiale $f(x, y) = 0$. On a tout d'abord,

$$(14) \quad n \geq 2.$$

La substitution unimodulaire S à adopter est alors, après la translation qui ramène à zéro la variable distincte de ξ , de la forme

$$(15) \quad \begin{cases} x = \xi (\eta + a)^r \\ y = \xi (\eta + a)^s \end{cases}$$

avec

$$\Delta = s - r = \pm 1.$$

De (15) on déduit :

$$(16) \quad \frac{\delta \xi}{\delta y} = -\frac{r}{\Delta} \frac{1}{(\eta + a)^s}, \quad \frac{\delta \eta}{\delta y} = \frac{1}{\Delta} \frac{1}{\xi (\eta + a)^{s-1}}$$

Le polynôme $f(x, y)$ lui-même devient un polynôme $F(\xi, \eta)$ dont la partie interne du polygone pour ξ et η , présente le même caractère que celle de $f(x, y)$.

D'autre part, que A soit positif ou négatif, on a

$$(17) \quad f(x, y) = \xi^r (\eta + a)^{Ks} F(\xi, \eta)$$

où l'entier positif ou nul K représente la plus petite des deux quantités r et s .

$F(\xi, \eta)$, à son tour, par une transformation analogue à (15), devient un polynôme $F_1(\xi_1, \eta_1)$. F et F_1 se trouvent liés par une égalité semblable à (17).

La chose se poursuivrait.

On a, maintenant, pour $D(x)$, discriminant de l'équation $f(x, y) = 0$, y étant l'inconnue, la relation

$$(18) \quad D(x) = f(x, y) P(x, y) + \frac{\delta f}{\delta y} Q(x, y),$$

où P et Q sont des polynômes entiers en x et y .

Effectuons au second membre de (18) la suite de substitutions caractérisées par (15). On voit⁷⁾ par (14), (16) et (17), et, du fait des α toujours finis et différents de zéro, que le discriminant $D(x)$, si le procédé ne s'achevait pas, serait divisible par une puissance entière et positive de x , aussi élevée que l'on voudrait. Ce fait est contradictoire, si l'on admet, hypothèse légitime, que le polynôme $f(x, y)$ n'a pas de diviseurs multiples.

Si donc, l'équation *initiale* $f(x, y) = 0$ est irréductible, la réduction relative à un côté de la partie interne de son polygone s'achèvera toujours, quelle que soit la suite de substitutions unimodulaires adoptée.

24. Il en sera de même pour n'importe quel côté du polygone. La méthode ne change pas, mais il reste à établir que, dans chaque cas, elle épouse bien toute la singularité.

Développements

25. Les substitutions S permettent d'envisager à un même point de vue les procédés de réduction de Puiseux et de Weierstrass, procédés que l'on a quelquefois opposés.

⁷⁾ Cf. Oeuvres de Weierstrass, t. IV, Chap. I.

La résolution de la singularité que présente à l'origine le folium de Descartes

$$(19) \quad x^3 + y^3 - 3\alpha xy = 0$$

permettra de comparer les méthodes.

26. Le procédé de Weierstrass consiste, en dernier ressort, à utiliser exclusivement les substitutions unimodulaires S pour lesquelles l'axe de la variable η est toujours parallèle à la nodale $\alpha + \beta = 0$, l'axe des ξ se confondant avec l'un ou l'autre des deux axes $\mathcal{Q}\alpha$ et $\mathcal{Q}\beta$. Par le moyen de ces substitutions et par des translations on arrive à rapprocher peu à peu le contour du polygone des axes du système nodal et, partant, à résoudre la singularité. Les constantes introduites par Weierstrass donnent au procédé sa souplesse.

Dans l'équation (19) du folium de Descartes, le terme en xy conduit à deux substitutions distinctes, dont l'une, qui est quadratique :

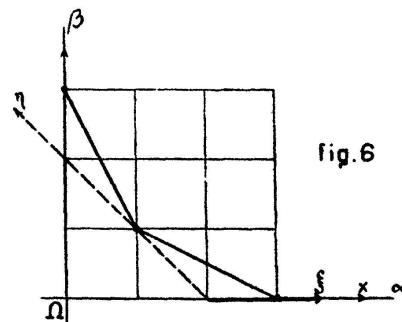
$$(20) \quad \begin{cases} x = \xi \\ y = \xi \eta \end{cases}$$

se rattache à la fig. 6 et transforme (19) en :

$$(21) \quad \xi + \xi \eta^3 - 3\alpha \eta = 0.$$

Cette équation (21), pour $\xi = 0$, donne $\eta = 0$.
On en déduit alors

$$\eta = P(\xi)$$



où P est une série entière en ξ , s'annulant pour $\xi = 0$. Introduite à la place de η on obtient, pour ξ voisin de zéro, une représentation en O du cycle du folium dont la tangente est confondue avec Ox .

L'autre cycle s'obtiendrait de la même façon. Le nouvel axe des η dans une substitution nouvelle analogue à (20) serait de direction opposée à celui de la fig. 6 et l'axe des ξ confondu avec celui des y .

27. Les substitutions S qui interviennent dans le procédé de Puiseux ne sont pas nécessairement unimodulaires.

Leurs axes des η se confondent successivement avec les côtés du polygone et leurs axes des ξ avec 3α .

A la fig. 7 se rattache la substitution de Puiseux

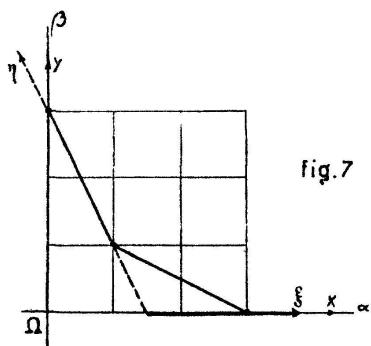


fig.7

$$\begin{cases} x = \xi^2 \\ y = \xi \eta \end{cases}$$

qui n'est pas unimodulaire et fournit le cycle du folium tangent à Oy en O :

$$\begin{cases} y = +\sqrt[3]{3\alpha} x^{\frac{1}{2}} + \dots \\ y = -\sqrt[3]{3\alpha} x^{\frac{1}{2}} + \dots \end{cases}$$

A la fig. 8 se rattache la seconde substitution de Puiseux:

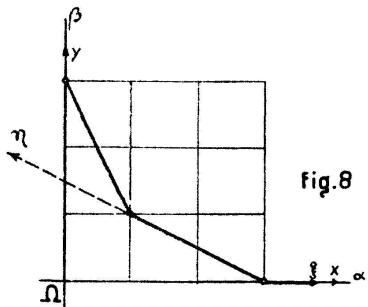


fig.8

$$\begin{cases} x = \xi \\ y = \xi^2 \eta \end{cases}$$

qui, elle, est unimodulaire et conduit à l'autre cycle du folium en O .

28. Une substitution S , de la nature de celles qui ont été introduites dans cette étude, serait, pour le folium, caractérisée par la fig. 9:

On aurait pour celle-ci:

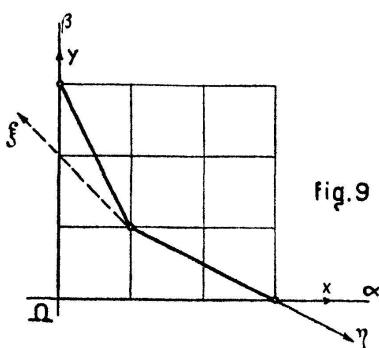


fig.9

$$\begin{cases} x = \xi \eta \\ y = \xi^2 \eta \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$\xi^3 \eta^3 + \xi^6 \eta^3 - 3\alpha \xi^3 \eta^2 = 0$$

c'est-à-dire à

$$\eta + \xi^3 \eta - 3\alpha = 0$$

et donne un développement

$$\eta = P(\xi)$$

où $P(\xi)$ est une série entière en ξ qui, pour $\xi = 0$ prend la valeur 3α .

Les équations

$$\begin{cases} x = \xi P(\xi) \\ y = \xi^2 P(\xi) \end{cases}$$

représentent alors le cycle tangent à Ox en O .

Par symétrie, l'on aperçoit de suite, la substitution analogue à celle qui vient d'être utilisée et qui conduirait à l'autre cycle.

Pour trouver les branches à l'infini on considérera la figure 10.

Par cette figure, on passe à la substitution:

$$\begin{cases} x = \xi^{-1} \eta^2 \\ y = \xi^{-1} \eta \end{cases}$$

transformant l'équation (19) en

$$\xi^{-3} \eta^6 + \xi^{-3} \eta^3 - 3 \alpha \xi^{-2} \eta^3 = 0$$

c'est-à-dire en

$$\eta^3 + 1 - 3 \alpha \xi = 0.$$

De cette équation, on tire, entre autres choses:

$$\eta = P(\xi)$$

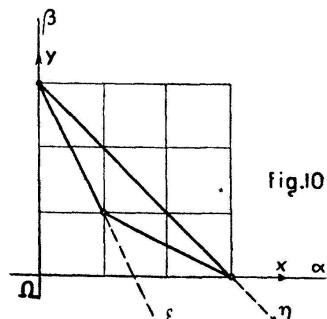
où

$$P(0) = -1.$$

Dans ces conditions, les égalités

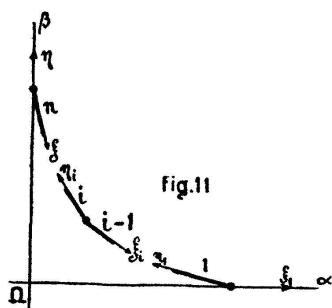
$$\begin{cases} x = \xi^{-1} P^2(\xi) \\ y = \xi^{-1} P(\xi) \end{cases}$$

se trouvent représenter la branche réelle du folium à l'infini.



Courbes approchées

29. Considérons, fig. 11, la partie interne du polygone de l'équation $f(x, y) = 0$. Les n côtés de celle-ci sont numérotés de 1 à n et l'on peut écrire :



$$(22) \quad f(x, y) = g_i(x, y) + h_i(x, y) \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

Les g_i et h_i , au second membre de chaque égalité (22) sont des polynômes entiers en x et y : $g_i(x, y)$ est constitué par l'ensemble des termes de $f(x, y)$ dont les points représentatifs se trouvent sur le $i^{\text{ème}}$ côté du contour; $h_i(x, y)$, par les autres termes.

Tous les points représentatifs des termes du polynôme $h_i(x, y)$ sont donc situés au-dessus de la nodale support du $i^{\text{ème}}$ côté.

Les équations:

$$g_i(x, y) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

sont ou non irréductibles. Elles représentent, § 14 des courbes particulières (paraboles), qui, dans le voisinage de $x = y = 0$, sont *courbes approchées* de l'une ou l'autre des branches de la proposée $f(x, y) = 0$. Ce fait, connu d'ailleurs, résultera facilement de ce qui va suivre.

30. Il s'agit maintenant de faire voir que le procédé de réduction développé au cours de ce travail (§ 21, etc.) épuise effectivement la singularité en O .

On effectue pour cela n substitutions S : S_1, S_2, \dots, S_n relatives respectivement à chacun des n côtés du contour, fig. 11. Ces substitutions seront toutes positives. Celle qui se rapporte au $i^{\text{ème}}$ côté admettra, comme axe de la variable η_i , la nodale support de ce $i^{\text{ème}}$ côté et comme axe des ξ_i , la nodale support du $(i - 1)^{\text{ème}}$ côté; le sommet de la substitution sera le point d'intersection de ces $(i - 1)^{\text{ème}}$ et $i^{\text{ème}}$ côtés.

La substitution S_1 , relative au côté 1, aura comme axe relatif aux ξ , l'axe relatif aux x .

On aura, ainsi, pour les substitutions S_i :

$$(23) \quad \begin{cases} x = \xi_i^{r_i} \eta_i^{r_{i-1}} \\ y = \xi_i^{s_i} \eta_i^{s_{i-1}} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

avec

$$r_o = 0, \quad s_o = 1.$$

Leurs déterminants respectifs

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} r_i & r_{i-1} \\ s_i & s_{i-1} \end{vmatrix}$$

sont tous positifs ; cela ressort du choix des axes dans les substitutions ; cela ressort aussi de l'interprétation que l'on peut donner des quantités r_i et s_i , qui sont entières et jamais négatives.

D'un autre côté enfin, les variables qui entrent dans les S_i sont, sans tenir compte de certaines puissances entières et positives qui peuvent intervenir, ξ_2 inverse de η_1 , ξ_3 inverse de η_2 , et ainsi de suite, ξ_n inverse de η_{n-1} . Le calcul l'établirait de suite, mais on s'en rend compte plus rapidement en remarquant que la direction positive de l'axe des ξ_i est prise en sens inverse, de la direction positive de l'axe des η_{i-1} .

31. L'application des substitutions S_i à la courbe $f(x, y) = 0$, conduit alors à cause de (22) et du § 8 à des courbes telles que :

$$(24) \quad F_i(\xi_i, \eta_i) = \varphi_i(\eta_i) + \xi_i \psi_i(\xi_i, \eta_i) = 0. \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

Dans ces équations (24), les φ_i proviennent des g_i de (22).

La correspondance entre les plans de chacune de ces courbes (24) et la courbe proposée $f(x, y) = 0$ est alors, § 6, une correspondance $(1, \varepsilon_i \Delta_i)$ où $\varepsilon_i = \pm 1$, suivant que Δ_i est positif ou négatif.

Le fait que la correspondance n'est pas, en général de Cremona, sera repris un peu plus loin.

Ici, l'on commence par établir qu'étant donnés sur la courbe $f(x, y) = 0$, les points voisins de l'origine O , $x = y = 0$, on peut, en les épousant dans leur totalité, leur faire correspondre sur les courbes (24) tous les points, mais seulement les points pour lesquels ξ_i est voisin de zéro, tandis que η_i reste fini et différent de zéro.

La chose est immédiate.

La courbe (24) relative à $i = 1$, $F_1 = 0$, correspond dans sa totalité à la courbe $f(x, y) = 0$. Mais, à cause de la substitution S_1 donnée par (23), où $r_o = 0$, les seuls points qui, sur $F_1 = 0$, peuvent correspondre à des points de $f = 0$, voisins de l'origine O , $x = y = 0$, sont les points pour lesquels ξ_1 est voisin de zéro.

Par ces points-là, l'ensemble des points de $f=0$, voisins de O se trouve épuisé.

Mais à $\xi_1=0$, correspondent sur $F_1=0$, des points pour lesquels η_1 est fini.

On les obtient en résolvant l'équation $\varphi_1(\eta_1)=0$. Les autres sont ceux pour lesquels η_1 est infini.

La courbe $F_2=0$, à son tour, correspond dans sa totalité à la courbe $f=0$. Par la transformation S_1 de ci-dessus, certains points de $f=0$, voisins de O , se trouvent éliminés. Ceux que l'on doit encore considérer sont ceux qui sur $F_1=0$, correspondent à un η_1 voisin de l'infini, et par conséquent, d'après ce que l'on sait sur ξ_2 et η_2 , ceux de $F_2=0$, pour lesquels ξ_2 est voisin de zéro.

Les η_2 correspondants sont alors des racines de l'équation $\varphi_2(\eta_2)=0$ ou sont infinis. Nous mettrons à part les points de $F_2=0$, pour lesquels ξ_2 est voisin de zéro et η_2 fini et différent de zéro, et ne retenons que ceux pour lesquels η_2 est infini.

Le raisonnement se poursuit. Finalement on arrive à l'équation $F_n=0$. Les seuls points qui pourraient correspondre à des points voisins de l'origine O sur $f=0$ et non touchés encore, seraient les points pour lesquels on aurait ξ_n voisin de zéro et η_n infini.

Or ces points n'existent pas sur la courbe $F_n=0$.

Prenons, pour le voir, la substitution Σ :

$$(25) \quad \begin{cases} x = \xi \eta^{r_n} \\ y = \eta^{s_n}. \end{cases}$$

Cette substitution encore positive, admet comme axe relatif aux ξ , le support du $n^{\text{ème}}$ côté du contour, fig. 11. Sa direction positive est inverse de celle de l'axe relatif aux η_n dans la substitution précédente.

Si, donc, on suppose η_n infini, on a, ici, ξ voisin de zéro.

Après la substitution Σ , l'équation $f=0$ devient

$$F(\xi, \eta) = \varphi(\eta) + \xi \psi(\xi, \eta) = 0$$

et, sur la courbe $F=0$, les seuls points pour lesquels ξ est voisin de zéro, ne peuvent correspondre qu'à des η finis et différents de zéro ou infinis. Or de pareils points ne peuvent correspondre à des points au voisinage de zéro, puisque dans (25), l'exposant s_n est positif. Il ne saurait donc y avoir sur la courbe $F_n=0$, des points à l'infini sur l'axe

des η_i , correspondant à des points de $f(x, y) = 0$ au voisinage de O . Les branches de $f(x, y) = 0$, au voisinage de O sont ainsi séparées et nous les avons toutes.

32. Reste encore le fait que les substitutions utilisées S_i ne sont pas nécessairement unimodulaires et qu'en outre, on les a prises, toutes, positives, alors que le procédé de réduction suppose les substitutions unimodulaires, mais positives ou négatives indifféremment.

A cause de (11), on voit, tout d'abord, que pour deux substitutions relatives à un même côté, les points dans les transformées de $f(x, y) = 0$ pour lesquels les ξ_i sont voisins de zéro et les η_i finis et différents de zéro, se correspondent d'une manière exclusive.

On voit, ensuite, que S_i et Σ_i pour un i donné étant deux substitutions relatives au même côté i , la première non-unimodulaire, la seconde unimodulaire, les branches de la transformée par S_i se réunissent en groupes de branches qui, chacune ont comme correspondante une branche unique de la transformée par Σ_i .

La singularité en O , de la courbe $f = 0$, est donc, pour cette raison, complètement épuisée, quand le long du contour, fig. 11, on adapte à chaque côté une substitution unimodulaire quelconque.

La démonstration est achevée.

On peut ajouter encore qu'en traitant par des substitutions S les autres parties du polygone fermé de $f(x, y) = 0$, on obtiendra également, des représentations complètes.

(Reçu le 26 janvier 1929.)