Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 1 (1929)

Artikel: Zur Theorie der endlichen Gruppen topologischer Abbildungen von geschlossenen Flächen in sich.

Autor: Scherrer, Willy

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1139

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Theorie der endlichen Gruppen topologischer Abbildungen von geschlossenen Flächen in sich

Von WILLY SCHERRER, Winterthur

In dieser Arbeit soll gezeigt werden,*) daß man die grundlegenden Resultate von Brouwer [2]) und v. Kerékjárto [1]) betreffend die endlichen Gruppen topologischer Abbildungen von zweiseitigen geschlossenen Flächen ausdehnen kann, 1. auf alle endlichen Gruppen, welche die Indikatrix nicht invariant lassen, und 2. auf die endlichen Gruppen der einseitigen Flächen.

In einer früheren Arbeit [3]) über topologische Involutionen habe ich ohne Beweis die Charakterisierung der 2-periodischen Abbildungen beliebiger zweiseitiger Flächen und der einseitigen Flächen vom Geschlecht 1 angegeben. Diese Ergebnisse können durch direkte Konstruktion eines Diskontinuitätsbereichs gewonnen werden. Unmittelbar daran anschließend, habe ich die n-periodischen Abbildungen der zweiseitigen Flächen behandelt. [4]) Obwohl diese Abbildungen einer analogen Behandlung fähig sind, habe ich mich dabei der Brouwerschen Methode der Ueberlagerungsfläche bedient, weil sie viel rascher zum Ziel führt, und überdies viel leichter verallgemeinert werden kann. Die vorliegende Arbeit schließt sich methodisch im wesentlichen an die letztere Arbeit an. Die Darstellung soll aber so gehalten werden, daß die Kenntnis der beiden eben erwähnten Arbeiten nicht nötig ist. Um die Arbeit leicht lesbar zu machen, werde ich an einigen Stellen Argumentationen ausführen, welche in ähnlicher Form schon von den oben erwähnten Autoren angegeben worden sind.

Der erste Teil der Arbeit enthält die allgemeine Theorie, d. h. diejenigen Resultate, welche für alle geschlossenen Flächen Gültigkeit haben. Die Möglichkeit der Charakterisierung der endlichen topologischen Gruppen beruht wesentlich auf ihrem Verhalten im Kleinen. Die Untersuchung hat daher an diesem Punkte einzusetzen. (§ 1.) Die Untersuchung im Kleinen führt auf die endlichen topologischen Gruppen der Kreisscheibe. In dieser Hinsicht ist bekannt, daß jede endliche Gruppe von topologischen Abbildungen der Kreisscheibe in sich, welche die Indikatrix invariant lassen, einer Rotationsgruppe der euklidischen Kreisscheibe

*) Fußnoten sollen durch das Zeichen *) markiert werden. Die Literaturnachweise hingegen werden fortlaufend numeriert und am Schluße der Abhandlung zusammengestellt.

äquivalent ist. Weiterhin ist bekannt, daß jede periodische Abbildung der Kreisscheibe, welche die Indikatrix umkehrt, einer Spiegelung einer euklidischen Kreisscheibe an einem Durchmesser äquivalent ist. Diese Resultate müssen also ergänzt werden durch die Charakterisierung aller endlichen Gruppen der Kreisscheibe, welche die Indikatrix nicht invariant lassen. (§ 2.) Hieran schließt sich die Untersuchung der Gruppen im Großen. Dabei erweist es sich als notwendig, den Begriff der Ueberlagerungsfläche in dem Sinne zu erweitern, daß neben Verzweigungspunkten auch noch Faltungslinien zugelassen werden. (§ 3.) Die in Betracht kommenden Ueberlagerungsflächen sind regulär. Dies bedingt eine Relation zwischen den Verzweigungen und Faltungen, welche eine Erweiterung der Hurwitz'schen Relation darstellt. Um dann aus der Konstruktion einer regulären Ueberlagerungsfläche auf die gesuchte Gruppe schließen zu können, ist es notwendig, den Zusammenhang der durch die Konstruktion gegebenen Monodromiegruppe und der Gruppe der Decktransformationen zu kennen. (§ 4.)

Der zweite Teil der Arbeit enthält zwei Anwendungen. Erstens werden die endlichen Gruppen der Kugel und der projektiven Ebene aufgestellt. (§ 5.) Dabei zeigt sich deutlich, daß man zwischen der abstrakten Gruppe und ihrer Darstellung durch topologische Abbildungen wohl zu unterscheiden hat. So läßt zum Beispiel die projektive Ebene zwei topologisch verschiedene Darstellungen der Tetraedergruppe zu. Es ist bemerkenswert, daß die im ersten Teil entwickelten Begriffe ohne weiteres eine vollständig zwangsläufige Aufzählung sämtlicher Darstellungen ergeben. In § 6 werden die involutorischen Transformationen sämtlicher geschlossenen Flächen hergeleitet, und hinsichtlich topologischer Aequivalenz klassifiziert.*)

I. Teil: Die allgemeine Theorie

§ 1. Untersuchung im Kleinen

Wir denken uns eine geschlossene Fläche F, welche einer endlichen Gruppe g von eineindeutigen und stetigen Transformationen unterworfen sei. Der Punkt P bleibe bei einer der Transformationen von g invariant. Dann bildet die Gesamtheit derjenigen Transformationen aus g, welche P invariant lassen, eine Untergruppe γ von g, deren Ordnung mit ν bezeichnet werde. Es ist von entscheidender Bedeutung, daß um einen

*) Vergleiche auch die Schlußbemerkung.

derartigen Punkt P immer eine Jordanumgebung angegeben werden kann, welche bei sämtlichen Operationen von γ und nur bei diesen in sich übergeht. Unser nächstes Ziel besteht also darin, diese Behauptung sicher zu stellen.

Sei Q irgend ein von P verschiedener Punkt auf F. Wir wählen eine Jordanumgebung u von P derart, daß Q und alle vermittelst g aus Q erzeugten Bilder außerhalb u liegen. Das ist immer möglich, falls nur Q mit keinem der vermittelst g aus Q erzeugten Punkte zusammenfällt. Weiter wählen wir eine zweite Umgebung u_0 von P von solcher Kleinheit, daß u_0 zusammen mit seinen durch γ erzeugten Bildern $u_1, u_2, \ldots u_{\nu-1}$ ganz im Innern von u liegt. Dies ist möglich, weil P bei γ invariant bleibt und die Zahl dieser Umgebungen endlich ist. Die Umgebungen $u_0, u_1, \ldots u_{\nu-1}$ bedecken zusammen einen Bereich B. Dasjenige der durch B auf F bestimmten Restgebiete, welches den Punkt Q enthält, geht bei allen Transformationen der Untergruppe γ in sich über. Um das zu zeigen, bezeichnen wir das in Frage stehende Restgebiet mit G und wählen irgend eine Transformation τ von γ aus. Sei Q_τ das durch τ erzeugte Bild von Q. Der Bereich B ist derart definiert, daß Q mit Q_τ verbunden werden kann, vermittelst eines einfachen Bogens α, welcher B nicht trifft. Also gehört Q_τ zu G. Sei nun weiter R irgend ein beliebiger Punkt von G, so kann man ihn mit Q verbinden, vermittelst eines einfachen Bogens β, welcher B nicht trifft. Bei der Transformation τ geht aber β über in einen Bogen β_τ, welcher ebenfalls B nicht treffen kann. Das folgt ebenfalls aus dem Begriff von B. Die Linie $\alpha + \beta_\tau$ stellt somit eine Verbindung zwischen Q und R_τ dar, welche B nicht trifft, also ganz im Innern von G verläuft. R_τ gehört somit ebenfalls zu G.

Wir bezeichnen nun die zu G gehörige Komplementärmenge, welche also den Bereich B umfaßt, mit B^*. B^* liegt ganz in u und geht bei γ in sich über, da es alle Punkte umfaßt, welche nicht zu G gehören. Wir weisen nun nach, daß B^* selbst ein Jordanbereich ist, indem wir zeigen, daß der Rand von B^* eine Jordankurve ist.

Es genügt, denjenigen Teil von G zu betrachten, welcher innerhalb u liegt. Wir bilden nun u topologisch auf eine Kreisscheibe K ab und behalten für die Abbilder aller in Betracht kommenden Elemente die eingeführten Bezeichnungen unverändert bei.

Wir erhalten somit im Innern von K die Jordanbereiche $u_0, u_1 \ldots u_{\nu-1}$, welche miteinander den innern Punkt P gemein haben und zusammen einen Bereich B bilden. B ist ein beschränktes Kontinuum, von dem wir zuerst zeigen wollen, daß es im kleinen zusammenhängend ist.

B ist sicher im kleinen zusammenhängend für jeden Punkt, welcher im Innern eines der Teilbereiche $u_0, u_1, \ldots u_{\nu-1}$ liegt und auch für jeden Punkt, welcher gleichzeitig den Rändern aller dieser Teilbereiche angehört. Sei also O ein Punkt von B, welche den Rändern der Bereiche $u_0, u_1, \ldots u_\nu$; $\lambda < \nu - 1$, hingegen keinem der Bereiche $u_{\lambda+1}, \ldots u_{\nu-1}$ angehört. Ist B in O nicht zusammenhängend im kleinen, so gibt es in beliebiger Nähe von O Punkte von B, welche mit O nicht durch einen kurzen zu B gehörigen Bogen verbunden werden können. Wählen wir nun eine gegen O konvergierende Reihe von solchen Punkten, so kann diese Reihe von einem gewissen Index an keine Punkte der Bereiche $u_0, u_1, \ldots u_\lambda$ enthalten. Also enthält diese Reihe sicher eine Teilfolge, deren Punkte alle einem und demselben der übrigen Bereiche angehören, sagen wir etwa dem Bereiche $u_{\lambda+1}$. Dann muß aber auch O zu $u_{\lambda+1}$ gehören. Dies geht gegen die Voraussetzung, und die Annahme, B sei in irgend einem Punkte nicht zusammenhängend im kleinen, führt somit zu einem Widerspruch. B stellt also nach Hahn[5]) und Mazurkiewicz[6]) eine stetige Kurve dar. Daher muß B nach Schönflies[7]) in jedem seiner Restgebiete allseitig erreichbar sein. Wir betrachten nun insbesondere dasjenige Restgebiet G, welches B vom Rande von K trennt und bezeichnen mit ϱ die Menge derjenigen Randpunkte von G, welche im Innern von K liegen. ϱ besteht aus einem Stück, da sonst B zerfallen müßte.

Wir zeigen nun, daß ϱ durch irgend zwei verschiedene seiner Punkte P_1 und P_2 zerfällt in zwei Teilkontinuen, welche außer P_1 und P_2 keinen Punkt gemein haben. Zu diesem Zwecke führen wir von zwei Punkten R_1 und R_2 des Kreisscheibenrandes durch das Innere von G zwei resp. gegen die Punkte P_1 und P_2 konvergierende Streckenzüge α_1 und α_2, welche einander nicht treffen. α_1 und α_2 müssen zusammen G in zwei Gebiete G_1 und G_2 zerlegen, da sonst B zerfallen würde. Nun kann man die Punkte von ϱ einteilen in diejenigen Punkte, welche innerhalb G_1 und diejenigen Punkte, welche innerhalb G_2 erreichbar sind. Die beiden so entstehenden Klassen haben außer P_1 und P_2 keinen Punkt gemein. Andernfalls könnte man vom Rande der Kreisscheibe zwei gegen einen gemeinsamen Punkt P_3 konvergierende Streckenzüge β_1 und β_2 angeben, welche ganz in G_1 resp. G_2 verlaufen. β_1 und β_2 bilden dann zusammen einen einfachen Querschnitt der Kreisscheibe, welcher diese in zwei Gebiete H_1 und H_2 zerlegt. Sowohl H_1 wie H_2 müßten innere Punkte von B enthalten. Die innern Punkte von B bilden aber ein Gebiet, da die Bereiche $u_0, u_1, \ldots u_{\nu-1}$ alle den innern Punkt P gemein haben. Dann müßte aber auch P_3 ein innerer Punkt von B sein,

was einen Widerspruch bedeutet. Nun kann man folgern, daß die durch α_1 und α_2 bestimmten Punktklassen Kontinuen sind, welche zusammen ϱ erschöpfen. Somit ist ϱ ein Kontinuum, welches durch irgend zwei seiner Punkte in zwei Kontinuen zerfällt, die außer diesen Punkten keinen Punkt gemein haben und zusammen ϱ erschöpfen. Ein derartiges Kontinuum ist nach Janiszewski[8]) eine Jordankurve.

Wir haben so das Resultat gewonnen, daß zu jedem bei einer Untergruppe γ invarianten Punkte P eine Jordanumgebung B^* gehört, welche bei allen Transformationen von γ in sich übergeht. Um solche Abbildungen näher zu charakterisieren, bilden wir B^* topologisch auf eine Kreisscheibe ab und erhalten so eine endliche Gruppe von topologischen Abbildungen einer Kreisscheibe in sich.

§ 2. Die endlichen topologischen Gruppen der Kreisscheibe

Wir betrachten zuerst eine endliche Gruppe g von topologischen Abbildungen einer *Kreislinie* k in sich und behaupten, daß auf k Punkte existieren, welche bei keiner Abbildung aus g festbleiben. Zu dem Zwecke zeigen wir, daß bei einer einzelnen von der Identität verschiedenen Abbildung höchstens zwei Punkte festbleiben. Angenommen, bei der Abbildung t aus g blieben die drei Punkte A, B und C auf k fest, so müßten die außerhalb von einander liegenden Bögen AB, BC, CA in sich übergehen. Dann finden wir aber auf mindestens einen dieser Bögen einen Punkt X, dessen Bild X' von ihm verschieden ist. Daraus ergibt sich aber die Existenz eines Bogens, welcher bei t in einen echten Teilbogen von sich selbst übergeht. Eine derartige Abbildung kann aber nicht periodisch sein. Somit existiert nur eine endliche Menge $\mathfrak{M}$ von Punkten, welche nicht bei allen Transformationen aus g bewegt werden. Nun wählen wir irgend einen Punkt P, welcher nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört und üben auf ihn alle Transformationen von g aus. Dadurch erhalten wir die $n-1$ von einander und von P verschiedene Punkte $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$, wo n die Ordnung von g bedeutet. Würden nämlich zwei verschiedene Transformationen t und s aus g dasselbe Bild erzeugen, so ließe die Abbildung ts^{-1} den Punkt P fest. Da aber ts^{-1} von der Identität verschieden ist, resultiert ein Widerspruch gegenüber den für P gemachten Annahmen.

Die Punkte $P, P_1, \ldots P_{n-1}$, seien so numeriert, wie sie auf der Kreislinie bei einer bestimmten Durchlaufung unmittelbar zyklisch aufeinander folgen. Wir betrachten nun diejenige Abbildung, welche P in P_1 überführt. Dabei muß der Bogen $\overrightarrow{PP_1}$ wieder in einen Bogen übergehen,

welcher im Innern keine Punkte P_i enthält, da sonst die inverse Abbildung einen zum System der P_i äquivalenten Punkt erzeugen würde. Dies widerspricht aber der Festsetzung, daß P_1 im Sinne der Durchlaufung unmittelbar auf P folgt. Daraus folgt, daß nur zwei Fälle in Betracht kommen:

1. Die Abbildung $P \to P_1$ führt $\overrightarrow{PP_1}$ über in $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ über in $\overrightarrow{P_2P_3}$ etc. Es liegt eine n-periodische Gruppe von indikatrixerhaltenden Abbildungen vor, welche mit einer euklidischen Rotationsgruppe äquivalent ist.

2. Die Abbildung $P \to P_1$ führt $\overrightarrow{PP_1}$ über in $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ in $\overrightarrow{PP_{n-1}}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$ in $\overrightarrow{P_{n-1}P_{n-2}}$, allgemein $\overrightarrow{P_\lambda P_{\lambda+1}}$ in $\overrightarrow{P_{n-(\lambda+1)}P_{n-\lambda}}$. Hieraus folgt, daß n gerade sein muß. Wäre nämlich $n = 2m+1$ so ginge $\overrightarrow{P_{m+1}P_{m+2}}$ über in $\overrightarrow{P_{m+1}P_m}$, d. h. P_{m+1} bliebe fest, was wiederum gegen die gemachten Annahmen verstößt.

Das gleiche Resultat ergibt sich für jede Transformation, welche irgend einen Punkt P_i in einen benachbarten P_{i+1} oder P_{i-1} überführt. Tritt nämlich einmal der Fall 1. ein, so ergibt sich sofort eine Rotationsgruppe und somit ausnahmslos der Fall 1. Weiter folgt, daß jede derartige Abbildung, welche also benachbarte Punkte P_i ineinander überführt, zweiperiodisch ist. Das Quadrat dieser Transformation läßt ja die benachbarten Punkte fest und ist somit die Identität oder nach den am Anfang dieses Paragraphen angestellten Ueberlegungen überhaupt nicht periodisch. Ueberdies existiert auf jedem primitiven Bogen P_iP_{i+1} genau ein Punkt, welcher bei der Abbildung invariant beibt. Diese Abbildung läßt auch den „Diametralbogen" invariant und nur diesen und besitzt somit genau zwei Fixpunkte.

Auf die gleiche Weise kann man irgend eine Transformation $P_i \to P_k$ charakterisieren und man erkennt insbesondere, daß alle Operationen der Gruppe aus irgend zwei benachbarten „Spiegelungen" zusammengesetzt werden können, oder falls man zwei benachbarte Spiegelungen zu einer primitiven Rotation zusammenfaßt, aus einer Spiegelung und einer primitiven Rotation. Man erhält so die Struktur einer euklidischen Gruppe von Rotationen und Spiegelungen. Man kann nun leicht die Aequivalenz im engern Sinne mit einer solchen Gruppe nachweisen, indem man die Kreislinie k folgendermaßen auf eine Kreislinie $\bar{k}$ abbildet: Man bezeichne die auf den primitiven Bögen PP_1 und PP_{n-1} liegenden Fixpunkte derjenigen Abbildungen, welche diese Bögen invariant lassen, mit Q und Q_{n-1} und bilde den Bogen $Q_{n-1}PQ$ topologisch ab auf einen Bogen $\bar{Q}_{n-1}\bar{P}\,\bar{Q}$ der Kreislinie $\bar{k}$ von der Länge $\frac{2\pi}{n}$. Hierbei ordnen wir

derjenigen Abbildung s von k, welche PP_1, also auch den Punkt Q invariant läßt, diejenige Spiegelung der Kreislinie $\bar{k}$ zu, welche den Punkt $\bar{Q}$ fest läßt. In entsprechender Weise ordnen wir derjenigen Abbildung s_{n-1}, welche PP_{n-1} in sich überführt, die Spiegelung $\bar{s}_{n-1}$ zu, welche also den Punkt $\bar{Q}_{n-1}$ fest läßt. So wie die Gruppe g aus den Elementen s und s_{n-1} erzeugt wird, ergibt sich aus $\bar{s}$ und $\bar{s}_{n-1}$ eine zu g vollständig isomorphe Gruppe $\bar{g}$ von $\bar{k}$, von der jede Operation die Bogenlänge invariant läßt, also eine Drehung oder Umklappung von $\bar{k}$ darstellt. Nun gehört zu einem beliebigen, aber bestimmten Punkt M_i eines Intervalles $Q_{i-1}P_iQ_i$ genau ein hinsichtlich g zu M_i äquivalenter Punkt M im Innern von $Q_{n-1}PQ$. Diesem entspricht bei der Abbildung auch $\bar{Q}_{n-1}\bar{P}\bar{Q}$ ein Punkt M. Bedeuted nun τ diejenigen eindeutig bestimmte Abbildung von g, welche M in M_i überführt, so lassen wir den Punkt M_i denjenigen Punkt $\bar{M}_i$ von $\bar{k}$ entsprechen, welcher durch die τ entsprechende Abbildung $\bar{\tau}$ von $\bar{g}$ aus $\bar{M}$ erzeugt wird. Analog verfährt man mit dem Punkte Q_{i-1}, indem man in der üblichen Weise zu jedem Intervall $Q_{i-1}PQ_i$ den Anfangspunkt, nicht aber den Endpunkt hinzurechnet. Die Zuordnung auf $\bar{k}$ wird eindeutig, weil die beiden zur Verfügung stehenden Abbildungen $\bar{\tau}$ den Punkt $\bar{Q}$ in ein und denselben Punkt $\bar{Q}_{i-1}$ überführen. Damit ist die Kreislinie k derart topologisch auf die Kreislinie $\bar{k}$ abgebildet, daß die Gruppe g in eine euklidische Gruppe $\bar{g}$ von Rotationen und Spiegelungen übergeht.

Wir betrachten jetzt eine endliche Gruppe g von topologischen Abbildungen einer Kreisscheibe K in sich. Enthält g keine Abbildung, welche die Indikatrix umkehrt, so ist sie einer euklidischen Rotationsgruppe äquivalent. Weiter brauchen wir die Tatsache, daß eine einzelne die Indikatrix umkehrende Abbildung von K in sich, falls sie einer endlichen Gruppe angehört, mit einer euklidischen Spiegelung an einem Durchmesser äquivalent ist. Wir bezeichnen deshalb eine derartige Abbildung s kurz als Spiegelung und nennen die einen einfachen Querschnitt von K bildende Fixpunktmenge von s die Achse a der Spiegelung.[1])

Wir setzen nun ausdrücklich voraus, daß g Spiegelungen enthalte und lassen auch den Fall außer Betracht, daß g aus einer einzigen Spiegelung besteht. Dann bilden die indikatrixerhaltenden Operationen eine invariante Untergruppe vom Index 2, deren sämtliche Operationen das im Innern von K liegende Rotationszentrum O als einzigen Fixpunkt haben. Haben also die Achsen a_i und a_k zweier Spiegelungen s_i und s_k von g einen Punkt gemein, so bleibt dieser auch bei der indikatrixerhaltenden Abbildung $s_i\, s_k$ invariant und muß deshalb mit dem Punkt O zusammenfallen. Hieraus folgt vorerst, daß irgend zwei Achsen höchstens einen

Punkt gemein haben. Die gerade Ordnung der Gruppe sei bezeichnet mit $2n$. Wir greifen nun irgend eine Spiegelung s heraus, und bezeichnen die Endpunkte ihrer Achse a mit A und A_n. Die Achse a zerlegt K in zwei einfache Bereiche. Wir gehen nun von A aus auf dem Rande K in denjenigen Bereich, welcher Punkte einer zweiten Achse enthält, bis zu einem nächsten Achsenendpunkt A_1 und bezeichnen den andern Endpunkt der so gefundenen Achse a_1 mit A_{n+1}. Würde A_{n+1} in demselben der durch a bestimmten Teilbereiche liegen, wie A_1, so ergäbe sich für die Abbildung $s\,s_1$ auf der Pheripherie von K ein Bogen, welcher in einen echten Teilbogen von sich selbst überginge, was der Periodizität widerspricht. Hieraus folgt, daß die Achse a_1 die Achse a genau in einem Punkte, nämlich dem Rotationszentrum O überkreuzt. Wir bezeichnen den im Innern keine Achsenpunkte enthaltenden Winkelbereich $A\,A_1\,O\,A$ mit ω. Da diese Tatsache der Ueberkreuzung für irgend zwei Achsen gilt, so folgt weiter, daß der zu ω diametrale Winkelbereich $\omega_n = A_n\,A_{n+1}\,O\,A_n$ im Innern auch keine Achsenpunkte enthalten kann. Denn eine in ω_n vorhandene Achse müßte sowohl a als auch a_1 in O einfach überkreuzen und somit in ω hineinführen. Von A_1 gehen wir weiter im Sinne des primitiven Bogens $A_0\,A_1$ und finden eine nächste Achse a_2 mit dem Endpunkt A_2. Der so erhaltene primitive Winkelbereich heiße ω_1. Die gleichen Ueberlegungen zeigen, daß ihm in der gleichen Umlaufsrichtung von A_{n+1} ausgehend der diametral gegenüber liegende primitive Winkelbereich ω_{n+1} entspricht. Wir erhalten so schließlich eine Zerlegung von k in die $2n$ primitiven Winkelbereiche $\omega, \omega_1, \ldots \omega_{2n-1}$, deren Scheitel im Rotationszentrum O liegen. Dabei entfallen die vier «Radien» von je zwei einander gegenüber liegenden Winkelbereichen ω_λ und $\omega_{n+\lambda}$ auf die zwei Achsen a_λ und $a_{\lambda+1}$. wobei eben gilt, $a_{n+\lambda} = a_\lambda$.

Nun erzeugt die Gruppe g von K auch auf dem Rande von K eine endliche Gruppe g' von topologischen Abbildungen, deren invariante Elemente gegeben sind durch die Punkte $A, A_1, \ldots A_{2n-1}$ und deren Ordnung $\leqq 2n$ sein muß. Hieraus folgt auf Grund der für die Kreislinie gefundenen Resultate, daß auch die Gruppe der Randabbildungen g' aus $2n$ verschiedenen Elementen besteht und daß jedem innern Punkte eines primitiven Bogens innerhalb jedes andern primitiven Bogens genau ein und nur ein hinsichtlich g' äquivalenter Punkt entspricht. Hieraus kann man weiter schließen, daß dieselbe Behauptung zutrifft, für die primitiven Winkelbereiche hinsichtlich der Gruppe g. Beweis: Wir nehmen an, einem Punkte P im Innern von ω entspreche bei einer Transformation t von g ein Punkt P' im Innern oder auf einem «Radius» von

ω. Dann verbinden wir den Punkt P' durch einen im Innern von ω verlaufenden Bogen β' mit einem innern Punkte des primitiven Bogens AA_1. Diesem Bogen entspricht bei der Abbildung $\bar{t}'$ ein Bogen β, welcher zu einem innern Punkte eines andern primitiven Bogens hinführt, also einen der Radien von ω notwendigerweise in einen vom Rotationszentrum verschiedenen Punkt Q innerhalb K trifft. Diesem Punkt Q entspricht bei der Abbildung t nach Konstruktion von β' ein Punkt Q' im Innern von ω. Bezeichnen wir nun mit s diejenige Spiegelung, welche die Q enthaltende Achse fest läßt, so führt die Abbildung $t^{-1}\,st$ den Punkt Q' in sich über. Da nun aber Q' von O verschieden ist, so müßte im Innern von ω eine Achse vorhanden sein, was der Konstruktion von ω widerspricht.

Es ist nun ersichtlich, daß man die Gruppe g von K in der gleichen Weise wie beim Falle einer Kreislinie in eine endliche Gruppe von euklidischen Drehungen und Umklappungen verwandeln kann und wir sind somit zu folgendem Resultat gelangt:

Satz 1: Jede endliche Gruppe von topologischen Abbildungen einer Kreisscheibe in sich ist topologisch äquivalent mit einer euklidischen Gruppe von Drehungen und Spiegelungen.

§ 3. Untersuchung im Großen

Wir knüpfen wieder an § 1 an und können über die Menge $\mathfrak{M}$ der bei einer Untergruppe γ von g invarianten Punkte P folgende Aussagen machen:

1. Ist γ eine Rotationsgruppe, so ist P ein isolierter Punkt von $\mathfrak{M}$.

2. Ist γ eine aus einer einzigen Spiegelung bestehende Gruppe, so besteht die in eine genügend kleine geeignete Jordanumgebung u von P entfallende Teilmenge von $\mathfrak{M}$ aus einem einfachen Bogenstück, welches P enthält und dessen sämtliche Punkte bei γ invariant bleiben.

3. Ist γ aus Rotationen und Spiegelungen zusammengesetzt, so laufen in P eine gerade Anzahl von Bögen der unter 2. beschriebenen Art zusammen und der Punkt P ist in dieser Eigenschaft isoliert. Der Einfluß der Gruppe γ ist für eine genügend kleine geeignete Umgebung u von P vollständig beschrieben durch Satz 1, § 2.

Daraus folgt nun, daß der fruchtbare Gedanke von Brouwer*), die Systeme der hinsichtlich g æquivalenten Punkte zu einer Mannigfaltigkeit zusammen zu fassen, auch hier anwendbar ist[9]). Wir wählen also

*) Dieser Gedanke tritt übrigens im Gebiete der konformen Abbildung schon bei Poincaré auf in seinen Untersuchungen über automorphe Funktionen.

irgend einen Punkt P von F aus, fügen die durch g aus P erzeugten Elemente $P_1, P_2, .. P_{n-1}$, hinzu und fassen die Punkte $(P, P_1, P_2, .. P_{n-1})$ auf als einziges Element π. Die Menge der Elemente π werde bezeichnet mit Φ. Bleibt P bei keiner Operation aus g invariant, so existiert um P eine Jordanumgebung u, welche von ihren sämtlichen Bildern verschieden ist. Die Gesamtheit der zugehörigen Elemente π' ist ein umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild der die Umgebung u erfüllenden Punkte P' und bildet daher im Sinne der Topologie eine volle Umgebung des Punktes π. Bleibt hingegen P bei einer Untergruppe γ von g invariant, so tritt einer der durch 1. 2. und 3. charakterisierten Ausnahmefälle ein. In jedem Falle existiert zum Punkte P ein primitiver Winkelbereich ω, dessen Punkte P' mit den zugehörigen Systemen π' in umkehrbar eindeutiger und stetiger Beziehung stehen. Im Falle 1. speziell sind die Punkte der Grenzradien von ω paarweise äquivalent und die zugehörigen Elemente müßen also paarweise identifiziert werden, d. h., die Punkte π' bilden wiederum eine volle Umgebung des Punktes π. In dem Falle 2. und 3. hingegen sind die Punkte der Grenzradien eines primitiven Winkels ω nicht äquivalent hinsichtlich g. Die zugehörigen Punkte π' bilden somit eine *Halbumgebung* des Punktes π. Zusammenfassend erkennt man, daß die Menge Φ im Sinne der Topologie eine Fläche bildet, welche eine endliche Zahl von Rändern aufweist, sofern die Fälle 2. und 3. bei der Gruppe g verwirklicht sind. Diese Fläche Φ nennen wir mit Brouwer die Modulmannigfaltigkeit von F hinsichtlich der Gruppe g.

Die transformierte Fläche F selbst kann nun als Ueberlagerungsfläche von Φ aufgefasst werden und die Art der Ueberlagerung für jeden einzelnen Punkt π von Φ ergibt sich aus den oben auseinandergesetzten Tatsachen. Repräsentiert der Punkt π ein System von nichtinvarianten Punkten $P, P_1, .. P_{n-1}$, so liegen über einer Umgebung von π genau die n schlichten Umgebungen $u, u_1, .. u_{n-1}$, dieser Punkte. Entspricht hingegen dem Punkte π ein System, von dem etwa der Punkt P bei einer Rotationsgruppe γ der Ordnung λ invariant bleibt, so liegt erst einmal über einer Umgebung von π ein schlichter primitiver Winkelbereich ω, dessen Grenzradien relativ zu Φ übereinander liegen, aber nicht vereinigt werden dürfen. An dem einen der Grenzradien anschließend, überlagert sich dem Bereich ω der zweite Winkelbereich ω_1 u. s. f. bis schließlich nach Durchlaufung des letzten Winkelbereichs $\omega_{\lambda-1}$ die Vereinigung mit ω stattfindet. Man erhält so einen Verzweigungspunkt im klassischen Sinne. Ueber diesen lagern sich $\frac{n}{\lambda} - 1$

weitere Verzweigungspunkte der Ordnung $\lambda - 1$. Bedeutet nämlich τ eine Abbildung, welche den Punkt P in einen von P verschiedenen Punkt P_τ überführt, so sind diejenigen Abbildungen, welche P_τ invariant lassen, gegeben durch die Gruppe $\tau^{-1} \gamma \tau$, welche wiederum eine Rotationsgruppe der Ordnung λ darstellt.

Die Fälle 2. und 3. fassen wir zusammen und nehmen also an, P bleibe bei einer auch Spiegelungen enthaltenden Untergruppe γ der Ordnung 2μ invariant. Um hier die Art der Ueberlagerung anschaulich bequem zu erfassen, bedienen wir uns der Darstellung von γ durch eine euklidische Gruppe einer Kreisscheibe. Wir denken uns auf dieser Kreisscheibe einen Punkt Q, welcher in kontinuierlicher Bewegung nacheinander die primitiven Winkelbereiche $\omega, \omega_1, \ldots \omega_{2\mu-1}$ durchläuft. Diesem Punkte lassen wir in jedem Moment denjenigen Punkt $\bar{Q}$ aus ω entsprechen, welcher mit ihm hinsichtlich γ æquivalent ist. $\bar{Q}$ vollführt in ω im Ganzen 2μ Oszillationen. Wenn man nun in der üblichen Weise die den verschiedenen Winkelbereichen entsprechenden, aber in ω koinzidierenden Lagen des Punktes $\bar{Q}$ dadurch unterscheidet, daß man sie „über einander" anordnet, erhält man ein Ueberlagerungsgebilde, welches über den beiden Grenzradien μ-mal gefaltet, über dem Scheitel aber überdies noch μ-mal verzweigt ist. Natürlich ist es unwesentlich, ob eine einzelne Faltung jeweils „nach oben" oder „nach unten" erfolgt. Immerhin empfiehlt es sich, zur Erhöhung der Anschaulichkeit folgendes Verfahren einzuschlagen: Man denke sich die einzelnen über einander liegenden Bereiche $\omega, \omega_1, \ldots \omega_{2\mu-1}$ als Winkel von der Größe π, entsprechend einer zu Grunde liegenden Halbumgebung von π und unterscheide die Grenzradien mit rechts und links. Nun werde ω_1 an ω rechts angesetzt und nach oben gefaltet, hierauf ω_2, welches sich notwendigerweise links anschließt, nach unten gefaltet, aber so, daß ω_2 über ω liegt. Hierauf kommt rechts ω_3 an ω_2 nach aufwärts, aber wieder so, daß ω_3 unter ω_1 liegt, etc. Dieser Prozeß stellt gewissermaßen eine Einwickelung dar. Im letzten Schritt werden links $\mu - 1$ Hüllen durchbrochen, um $\omega_{2\mu-1}$ an ω anzuschließen. Vergegenwärtigt man sich dieses räumliche Modell, so erkennt man, daß man von einer zwischen $\omega_{2\mu-2}$ und $\omega_{2\mu-1}$ liegenden Stelle aus dasselbe mit einer Bewegung auseinander falten kann. Dabei entsteht ein gewöhnlicher Verzweigungspunkt der Ordnung $\mu - 1$. Umgekehrt erhält man dieses Modell, wenn man einen gewöhnlichen Verzweigungspunkt Ordnung längs eines Durchmessers faltet. Ich nenne deshalb einen derartigen Punkt einen *gefalteten Verzweigungspunkt* $(\mu - 1)^{\text{ter}}$ *Ordnung*. Oder auch kurz eine *Faltverzweigung*.

Die Abbildungen von F in sich erscheinen nun auf der Ueberlagerungsfläche als Decktransformationen, denn die hinsichtlich g äquivalenten Punkte machen ja gerade sämtliche über einem Punkte von Φ liegenden Punkte aus. Die erhaltene n-blättrige Ueberlagerungsfläche von Φ gestattet also gerade n Decktransformationen und erweist sich somit als reguläre Ueberlagerungsfläche von Φ.

Wir formulieren als Ergebnis

Satz 2.: Wird eine geschlossene Fläche F einer endlichen Gruppe g von n topologischen Abbildungen unterworfen, so bilden die Systeme der hinsichtlich g äquivalenten Punkte eine Polyederfläche Φ. Die Fläche F ist eine reguläre Ueberlagerungsfläche von Φ, für deren singulären Elemente folgende Möglichkeiten in Betracht kommen:

1. *Ueber dem Innern von Φ liegen endlich viele Verzweigungspunkte.*
2. *Ueber jedem Rande von Φ liegen $\frac{n}{2}$ Faltungslinien.*
3. *Ueber irgend einem Rande liegen endlich viele Faltverzweigungen.*

Daß es sich um reguläre Ueberlagerungsflächen handelt, ist von ausschlaggebender Bedeutung. Die daraus sich ergebenden Konsequenzen sollen aber erst im nächsten Paragraphen gezogen werden. Hier soll vorerst noch die Konstruktion einer beliebigen Ueberlagerungsfläche mit Faltungslinien und gefalteten Verzweigungspunkten auf Grund einer passenden Zerschneidung der Grundfläche angegeben werden.

Wir wählen im Innern von Φ einen Punkt O, über welchem keine Verzweigung stattfindet, und führen von diesem Punkte aus

a) je einen einfachen Schnitt zu jedem Verzweigungspunkt im Innern von Φ.

b) je einen einfachen Schnitt zu jedem Rand, welcher überdies eine der eventuell vorhandenen Faltverzweigungen trifft.

c) ein vollständiges kanonisches Schnittsystem.

Ueber die so zerschnittene Fläche Φ legen wir n mit ihr kongruente und gleichzerschnittene Blätter. Hierauf heften wir die n Blätter längs jedes einzelnen der geführten Schnitte in beliebiger Permutation aneinander, wobei nur darauf zu achten ist, daß bei O keine Verzweigung entsteht. Nun muß die Heftung noch längs der Ränder von Φ erklärt werden. Wir betrachten einen bestimmten Rand, welcher etwa m gefaltete Verzweigungspunkte enthalten möge. Durch diese m Punkte zerfällt der Rand in m Bögen. Längs jedes dieser Bögen vollziehen wir die Heftung in unabhängiger Weise, aber derart, daß lauter Faltungslinien entstehen. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß das Quadrat der zugehörigen Blätterpermutation die Identität ergibt. Durch die voll-

zogene Heftung längs der Randbögen sind, wie weiter unten gezeigt wird, die Faltverzweigungen bestimmt. Falls also der Rand keine derartigen Singularitäten enthält, muß man darauf achten, daß bei der Heftung längs des einzigen Bogens auch keine Faltverzweigung entsteht, in demjenigen Punkte, wo der von O ausgehende Schnitt eintritt.

Wählen wir nun im Innern von Φ und außerhalb des Schnittsystems einen bestimmten Punkt M, so ist die zu diesem Punkte gehörige Darstellung der Monodromiegruppe durch die oben beschriebene Konstruktion bestimmt. Wir führen folgende Bezeichnungen für die die Monodromiegruppe konstituierenden Substitutionen ein:

a) Wir numerieren fortlaufend von 1 bis v die einfachen Schnitte, welche zu den gewöhnlichen Verzweigungspunkten hinführen und bezeichnen die zugehörigen Substitutionen mit $V_1, V_2, \ldots V_v$.

b) Wir numerieren ebenso die zu den Rändern hinführenden Schnitte von 1 bis r und bezeichnen die zugehörigen Substitutionen mit $R_1, R_2, \ldots R_r$.

c) Wir greifen einen einzelnen, etwa den i^{ten} Rand heraus und bezeichnen die Anzahl der auf ihn entfallenden Faltverzweigungspunkte mit v_i. Dieser Rand zerfällt also in v_i Bögen, welche wir in einer bestimmten Durchlaufung numerieren. Die den einzelnen Bögen entsprechenden Faltungssubstitutionen mögen dann bezeichnet werden mit $S_{i1}, S_{i2}, \ldots S_{iv_i}$; die Substitutionen der zugehörigen Faltverzweigungen seien $\overline{V}_{i1}, \overline{V}_{i2}, \ldots \overline{V}_{iv_i}$. Hierbei soll $\overline{V}_{i1}$ im Sinne der Durchlaufung am Ende des zu S_{i1} gehörigen Bogens stehen. Die $\overline{V}_{i\lambda}$ gehören nach der obigen Konstruktion nicht zu den die Monodromiegruppe konstituierenden Elementen. Enthält der Rand keine Faltverzweigung, so lassen wir einfach den zweiten Index weg und haben dann das einzige Element S_i. Wir werden zum Ausdruck bringen müssen, daß in diesem Falle $\overline{V}_i = 1$ ist.

d) Wir bezeichnen schließlich mit $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots A_p, B_p$ die Substitutionen der p Paare konjugierter Rückkehrschnitte, falls Φ zweiseitig und vom Geschlecht p ist oder mit $A_1, A_2, \ldots A_p$ die Substitutionen der p einufrigen Rückkehrschnitte falls Φ einseitig und vom Geschlecht p ist.

Die Substitutionen a) und d) sind aus der Theorie der ungefalteten Ueberlagerungsflächen bekannt und bedürfen keine Erläuterung. Aber auch für die Substitutionen b) gilt dieselbe Bemerkung, denn für sie spielen die Ränder die Rolle von Verzweigungspunkten. Die Forderung, daß im Punkte O keine Verzweigung auftritt, drückt sich bei der oben angegebenen Anordnung der Schnitte aus durch die Relation

$$\text{(I)} \quad V_1 V_2 \ldots V_\upsilon R_1 R_2 \ldots R_r A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_p B_p A_p^{-1} B_p^{-1} = 1$$

falls Φ zweiseitig ist oder durch

$$\text{(I')} \qquad V_1 V_2 \ldots V_\upsilon R_1 R_2 \ldots R_r A_1^2 A_2^2 \ldots A_p^2 = 1$$

falls Φ einseitig ist.

Einer besondern Erläuterung bedürfen die unter c) erwähnten Substitutionen. Die Faltungssubstitutionen S_{ik} gewinnen wir, wenn wir durch den Punkt M folgende geschlossene und gerichtete Spurkurve α ziehen: Wir verbinden M mit einem Punkte des zu S_{ik} gehörigen Randbogens vermittelst eines einfachen Bogens β, welcher ganz innerhalb der zerschnittenen Fläche Φ verläuft und durchlaufen diesen Bogen zuerst in seiner Entstehungsrichtung und hierauf in der entgegengesetzten Richtung. Für das Verhalten der einem in α laufenden Punkte P überlagerten Punkte $P_1, P_2 \ldots P_n$ während des Wechsels von P beim Randbogen kommen, da das System der überlagerten Punkte in ein äquivalentes übergehen muß, zwei Möglichkeiten in Betracht. Das System der überlagerten Punkte erfährt die Identität, d. h. jeder Punkt P_i geht beim Rücklauf von P ebenfalls im selben Blatt zurück, in welchem er angekommen ist. Dann hat kein eigentlicher Uebergang stattgefunden und α kann kontinuierlich auf M zusammengezogen werden. Soll also S_{ik} ein Ausdruck der an dem betreffendem Randpunkt vorgenommenen Faltung sein, so muß jeder Punkt P_i in das auf Grund der Faltung zugeordnete Blatt übergehen. Dann kann aber α nicht mehr auf M zusammengezogen werden, ohne daß die überlagerten Kurven zerreißen. Einzig in diesem Falle sprechen wir von einem Uebergang über eine Faltungslinie (Randübergang).

Wenn man nun beachtet, daß die Darstellung der Monodromiegruppe durch eine Verschiebung von M innerhalb der zerschnittenen Fläche Φ nicht beeinflusst wird, daß man also M in beliebige Nähe einer Faltverzweigung bringen kann, und wenn man weiter die oben gegebene Modellvorstellung für derartige Singularitäten heranzieht, so erkennt man, daß für jeden Index $\lambda = 1, 2, \ldots v_i - 1$ gilt

$$\text{(II)} \qquad S_{i,\lambda+1} S_{i,\lambda} = \overline{V}_{i,\lambda}$$

Eine Ausnahme bildet die dem Index $\lambda = v_i$ entsprechende Faltverzweigung und zwar deshalb, weil, wie man unmittelbar sieht, bei einer «Umkreisung» dieses Punktes der hier einmündende Schnitt überschritten

werden muß. Eine kurze Ueberlegung ergibt, daß die Relation II in diesem Falle zu ersetzen ist, durch

$$\overset{-1}{R_i}\, S_{i\,1}\, R_i\, S_{i\,v_i} = \bar{V}_{i\,v_i} \tag{III}$$

Enthält insbesondere der betrachtete Rand keine Faltverzweigung, so gilt $v_i = 1$; $S_{i\,1} = S_i$ und somit folgt aus III die Relation

$$\overset{-1}{R_i}\, S_i\, R_i\, S_i = 1 \tag{III'}$$

Damit sind die für den allgemeinen (nicht-regulären) Fall in Betracht kommenden Relationen aufgezählt. Sofern wir aber vorausgesetzt haben, daß über jeden Randbogen nur Falten (keine einfachen Ränder) liegen, haben wir eine Regularitätsbedingung bereits berücksichtigt, und in dieser Beziehung wären also die Relationen $n \equiv o$ (mod. 2) und

$$\overset{2}{S_{ik}} = 1 \tag{IV}$$

wo n die Ordnung der Gruppe bedeutet, hinzuzufügen.

Nachdem wir so die Konstruktion der Überlagerungsfläche auf Grund der wesentlichen die Monodromiegruppe konstituierenden Verzweigungs- und Faltungssubstitutionen beschrieben haben, bleibt uns noch die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen den Invarianten der Grundfläche und denjenigen der Ueberlagerungsfläche anzugeben. Dabei ergibt sich, daß die Art, wie die Flächen Φ und F hinsichtlich Ihrer Orientierbarkeit zusammenhängen im allgemeinen nicht-regulären Falle nicht durch geschlossene Relationen zwischen den Operationen der Monodromiegruppe zum Ausdruck gebracht werden kann. Da wir aber für die Zwecke der endlichen Gruppen nur den Fall der regulären Ueberlagerungsflächen benötigen, beschränke ich mich auf diesen Fall. Die nähere Charakterisierung der Ueberlagerungsflächen soll Gegenstand des folgenden Paragraphen sein.

§ 4. Reguläre Ueberlagerungsflächen

Die Charakterisierung der regulären Ueberlagerungsflächen zerfällt im wesentlichen in drei Teilaufgaben.

1. Es muß eine Formel angegeben werden, welche gestattet, auf Grund der Verzweigungsart und der Blätterzahl die Zusammenhangszahl

der Ueberlagerungsfläche aus der Zusammenhangszahl der Grundfläche zu berechnen. Diese Formel wird also eine Verallgemeinerung der bekannten Formel von Hurwitz darstellen.

2. Es muß in einem „Verzweigungssatz" der Zusammenhang zwischen der Monodromiegruppe und der Gruppe der Decktransformationen angegeben werden. Dieser Verzweigungssatz ist für die wirkliche Aufzählung der Gruppen von fundamentaler Bedeutung, den nach den Erörterungen des vorausgehenden Paragraphen bildet bei der Konstruktion einer Ueberlagerungsfläche die Monodromiegruppe das Primäre, während die gesuchte Gruppe ihren Ausdruck in den Decktransformationen findet.

3. Es muß angegeben werden, wie die Grundfläche und die Ueberlagerungsfläche hinsichtlich der Orientierbarkeit von einander abhängen. Man könnte auf den ersten Blick erwarten, daß diese Frage an zweiter Stelle zu behandeln sei. Der Leser wird aber beim Gang der Entwicklungen selber sehen, daß die hier getroffene Anordnung zweckmäßiger ist.

Wir behandeln nun diese drei Aufgaben in der angegebenen Reihenfolge.

1. Um die Aufzählung der einzuführenden Bezeichnungen zu erleichtern, benutzen wir vorübergehend folgende Benennungen. Ein Punkt P_i auf der Ueberlagerungsfläche F heißt ein *freier Punkt*, wenn er weder mit einem Verzweigungspunkt zusammenfällt, noch in einer Faltungslinie liegt. Ein Punkt P_i von F heißt ein *freier Randpunkt*, wenn er in einer Faltungslinie liegt, aber mit keinem Faltverzweigungspunkt zusammenfällt. Wenn also ein Punkt weder ein freier Punkt noch ein freier Randpunkt ist, so muß er entweder ein Verzweigungspunkt oder ein Faltverzweigungspunkt sein. Da F eine reguläre Ueberlagerungsfläche von Φ ist, so kommt allen Punkten $P_1, P_2, \ldots P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots P_n$, welche denselben Spurpunkt P auf Φ besitzen, auch dieselbe Benennung zu. Daraus folgt weiter, daß man auch den Spurpunkten P dieselbe Benennung beilegen darf.

Wir führen nun auf Φ eine Triangulation ein, in welcher sämtliche gefalteten und ungefalteten Verzweigungspunkte als Ecken auftreten. Enthält Φ Ränder, so gehören diese zu dem Kantensystem der Triangulation. Die Triangulation von Φ überträgt sich ohne weiteres auf F. Wenn man nun die Elemente der beiden Triangulationen aufzählt um die Charakteristik*) zu bilden, so muß man dabei die Verzweigungspunkte einzeln aufführen. Liegt z. B. über dem Punkt P von Φ ein Verzweigungspunkt der Ordnung $\lambda - 1$, so folgt aus der Regularität von F,

*) Charakteristik = Anzahl der Punkte — Anzahl der Kanten + Anzahl der Flächenstücke.

daß über P genau $\frac{n}{\lambda}$ Verzweigungspunkte der Ordnung $\lambda - 1$ liegen. Bezeichnen wir also in leicht verständlicher Abkürzung die Anzahl derjenigen Punkte P von Φ, über welchen ungefaltete Verzweigungen liegen, mit $\Sigma\, 1$, so ist die Anzahl der ungefalteten Verzweigungspunkte auf F gegeben durch $\Sigma \frac{n}{\lambda}$, wobei natürlich die Summation über die für die einzelnen Punkte P geltenden Werte λ zu erstrecken ist. Ist hingegen P ein Punkt auf dem Rande von Φ, über welchem ein gefalteter Verzweigungspunkt der Ordnung $\mu - 1$ liegt, so schließen sich die sämtlichen dem Punkt P überlagerten Punkte zu genau $\frac{n}{2\mu}$ gefalteten Verzweigungspunkten der Ordnung $\mu - 1$ zusammen. Hier ist also mit $\mu - 1$ die Ordnung der eigentlichen Verzweigung gezählt, während der Faktor 2 auf Rechnung der Faltung kommt. Die Anzahl der eben beschriebenen Punkte P von Φ bezeichnen wir nun mit $\Sigma'\, 1$ und die Anzahl der Faltverzweigungspunkte ist somit gegeben durch $\Sigma' \frac{n}{2\mu}$.

Nun werden die folgenden Festsetzungen ohne weiteres verständlich sein,

Die Triangulation der Grundfläche Φ betreffend:

Anzahl der freien Punkte	$= \alpha_0$
Anzahl der freien Randpunkte	$= \beta_0$
Anzahl derjenigen Punkte, über welchen gewöhnliche Verzweigungen liegen	$= \Sigma\, 1$
Anzahl derjenigen Punkte, über welchen Faltverzweigungen liegen	$= \Sigma'\, 1$
Anzahl der innern Kanten	$= \alpha_1$
Anzahl der Randkanten	$= \beta_1$
Anzahl der Dreiecke	$= \alpha_2$

Die Triangulation der Ueberlagerungsfläche betreffend:

Anzahl der freien Punkte	$= a_0$
Anzahl der freien Randpunkte	$= b_0$
Anzahl der gewöhnlichen Verzweigungspunkte	$= \Sigma \frac{n}{\lambda}$
Anzahl der Faltverzweigungspunkte	$= \Sigma' \frac{n}{2\mu}$
Anzahl der innern Kanten	$= a_1$
Anzahl der Randkanten	$= b_1$
Anzahl der Dreiecke	$= a_2$

Zur zweitletzten Zeile ist zu bemerken, daß die Bezeichnung als Randkanten aus Gründen der Bequemlichkeit gewählt worden ist für diejenigen Kanten von F, welche über den Randkanten von Φ liegen. Sie sind natürlich keine Randkanten, sondern gehören zu den Faltungslinien. Zwischen den eingeführten Zahlen bestehen nun gewisse Relationen, die ohne weiteres ersichtlich sind und die ich deshalb einfach angebe. Die erste Relation drückt eine Beziehung zwischen Elementen von Φ aus, während die übrigen im wesentlichen zum Ausdruck bringen, daß F sozusagen die Ver-n-fachung von Φ ist.

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \beta_0 + \Sigma' \, 1 \\
a_0 &= n\,\alpha_0 \\
b_0 &= \frac{n}{2}\beta_0 \\
a_1 &= n\,\alpha_1 \\
b_1 &= \frac{n}{2}\beta_1 \\
a_2 &= n\,\alpha_2
\end{aligned}$$

Bedeuten nun ζ resp. z die Zusammenhangszahlen von Φ resp. F so liefert die bekannte Zusammenhangsrelation

$$\begin{aligned}
2 - \zeta &= (\alpha_0 + \beta_0 + \Sigma\, 1 + \Sigma'\, 1) - (\alpha_1 + \beta_1) + \alpha_2 \\
2 - z &= \left(a_0 + b_0 + \Sigma \frac{n}{\lambda} + \Sigma' \frac{n}{2\mu}\right) - (a_1 + b_1) + a_2
\end{aligned}$$

Wenn man die erste dieser beiden Gleichungen mit n multipliziert und hierauf von der zweiten subtrahiert, so erhält man unter Benutzung der eben angegebenen Beziehungen vermittelst einfacher Umformungen die Relation

$$2 - z = n\,(2 - \zeta) - \Sigma\, n \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - \Sigma' \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \qquad \text{(H)}$$

Unterdrückt man in dieser Formel die Summe Σ', so resultiert die Hurwitz'sche Relation. Die Formel (H) bringt die gesuchte Beziehung zwischen gewöhnlichen Verzweigungen, Faltverzweigungen und Zusammenhangszahlen zum Ausdruck.

2. Um den Zusammenhang zwischen den Decktransformationen und den Verzweigungssubstitutionen zu ermitteln, fasse ich denjenigen Punkt M von Φ ins Auge, der uns schon früher zur Darstellung der Mono-

dromiegruppe gedient hat. Die über ihm liegenden Punkte von F seien bezeichnet mit $M_1, M_2, \ldots M_n$.

Irgend eine Operation S_k der Monodromiegruppe*) wird bekanntlich folgendermaßen definiert: Man zieht durch M auf Φ eine stetige, geschlossene und gerichtete Kurve γ und läßt einen Punkt P ausgehend von M eine einmalige und vollständige Durchlaufung von γ ausführen. Dann vollführen die dem Punhte P überlagerten Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$, ebenfalls ausgehend von den Anfangslagen $M_1, M_2, \ldots M_n$, n Durchlaufungen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$, welche, zufolge der vorausgesetzten Regularität alle entweder gleichzeitig geschlossen oder ungeschlossen sind. Wenn P seine Endlage, also wiederum M, erreicht hat, so ist das System P_1, $P_2, \ldots P_n$ seinerseits wieder mit dem System $M_1, M_2, \ldots M_n$ in Deckung, wobei aber im allgemeinen die Reihenfolge der einzelnen Endlagen von derjenigen der Anfangslagen verschieden ist. S_k ist dann erklärt als diejenige Substitution, welche die Anfangspermutation in die Endpermutation überführt. Hieraus folgt, daß im regulären Falle die Substitution S_k eindeutig bestimmt ist, durch Angabe desjenigen Punkfes M_k, in welchen etwa der Punkt M_1 übergeführt wird. Leistet nämlich eine Substitution $\overline{S}_k$ dasselbe, so entspricht bei $\overline{S}_k\, S_k^{-1}$ dem Punkte M_1 die geschlossene Kurve $\overline{\gamma}_1\, \gamma_1^{-1}$. Dann müssen aber alle der zugehörigen Spur überlagerten Kurven geschlossen sein, d. h. alle Punkte M_1, M_2, $\ldots M_n$ bleiben bei $\overline{S}_k\, S_k^{-1}$ fest. Also gilt $\overline{S}_k\, S_k^{-1} = 1$ oder $\overline{S}_k = S_k$.

Eine Decktransformation T_i hingegen ist folgendermaßen definiert: Man wählt irgend einen Punkt von F, etwa M_1, und ordnet ihm irgend einen darüberliegenden, etwa M_i zu. Hierauf verbindet man den Punkt M_1 mit einem beliebigen Punht P_1 von F durch eine stetige und gerichtete Kurve δ_1, welche keine singulären Punkte trifft. Nun ordnet man von M_i ausgehend der Kurve δ_1 diejenige Kurve δ_i zu, welche in Φ dieselbe gerichtete Spur δ besitzt. Diese Kurve δ_i ist durch diese Festsetzung als eindeutige Ueberlagerung von δ_1 bestimmt, falls im Sinne der in § 3 getroffenen Festsetzungen dafür gesorgt wird, daß jedem wirklichen Randübergang von δ_1 ein wirklicher Randübergang von δ_i entspricht und umgekehrt. Das Bild des Punktes P_1 bei der in Betracht gezogenen Decktransformation wird jetzt erklärt als der dem Punkte P_1 überlagerte Endpunkt P_i der Kurve δ_i.

---

*) Hier ist S_k als Zeichen für *irgend* eine Operation anzusehen und nicht zu verwechseln mit der im vorigen Paragraphen benutzten Bezeichnung S_{ik} für die k^{te} Faltungssubstitution des i^{ten} Randes.

Der Vergleich der beiden Definitionen ergibt, daß die Decktransformation T die Kurve γ_1 überführt in die Kurve γ_i. Der Anfangspunkt von γ_1 ist der Punkt M_1, der Endpunkt aber der oben schon eingeführte Punkt M_k. Der Anfangspunkt von γ_i ist der Punkt M_i, der Endpunkt soll bezeichnet sein mit M_e. Bezeichnen wir weiter mit T_k diejenige Decktransformation, welche M_1 überführt in M_k und mit S_i diejenige Monodromiesubstitution, welche M_1 überführt in M_i, so folgt, daß sowohl die Decktransformation $T_k\, T_i$ als auch die Substitution $S_i\, S_k$ den Punkt M_1 überführen in den Punkt M_e. Ordnen wir also in den beiden Gruppen diejenigen Elemente einander zu, welche den gleichen Index haben, so entspricht einem beliebigen Produkt $S_i\, S_k$ das Produkt $T_k\, T_i$. Die beiden Gruppen sind somit vollständig isomorph unter Vertauschung der Faktorenfolge. Als Ergebnis formulieren wir

Satz 3: Die Monodromiegruppe einer regulären Ueberlagerungsfläche ist vollständig isomorph mit der Gruppe ihrer Decktransformationen unter Vertauschung der Faktorenfolge.

Um sich die Bedeutung dieses Resultats klar zu machen, beachte man, daß jede Ueberlagerungsfläche eine Monodromiegruppe besitzt, hingegen nur die regulären Ueberlagerungsflächen die volle Gruppe der Decktransformationen zulassen.

3. Um zu entscheiden, ob die Ueberlagerungsfläche F orientierbar ist oder nicht, betrachte ich geschlossene stetige Kurven γ auf F, welche sich aus einer endlichen Zahl einfacher Bögen zusammensetzen. F ist dann und nur dann nicht orientierbar, falls einufrige Kurven γ existieren. Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß man eine Kurve γ durch eine endliche Zahl kleiner Deformationen so verlagern kann, daß sie keinen der singulären Punkte trifft und nur endlich viele Randübergänge besitzt. Man kann nun weiter annehmen, daß γ nach dieser Deformation in endlich viele konsekutive einfache Bögen zerfällt, von denen jeder in einem bestimmten Exemplar der n Blätter von F liegt. Jeder einzelne dieser Bögen kann weiter im Innern des zugehörigen Blattes so deformiert werden, daß er genau einmal durch einen der Punkte $M_1, M_2, \ldots M_n$ läuft. Hier bedeutet M wiederum denjenigen Punkt von Φ, welcher schon früher zur Darstellung der Monodromiegruppe gedient hat. Sei etwa β_i der in das i^{te} Blatt fallende Teilbogen von γ. Er zerfällt durch M_i in zwei einfache Teilbögen, deren von M_i verschiedene Endpunkte auf dem Schnittsystem liegen. Wir ordnen nun γ eine bestimmte Durchlaufung zu und fassen die von M_i ausgehende Hälfte zusammen mit der anschließenden analog definierten Hälfte des konsekutiven Bogens. Der letztere Bogen führt also wieder zu einem Punkte M_k hin. Dieses

Verfahren setzen wir fort, bis die ganze Kurve γ durchlaufen ist. Jedem der so erhaltenen Bögen entspricht eine geschlossene Spur auf Φ und die zugeordnete Substitution der Monodromiegruppe stellt eine der bei der Konstruktion von F (§ 3) benutzten Schnittsubstitutionen dar, welche bezeichnet waren mit $V_1, V_2, \ldots V_\upsilon, R_1, R_2, \ldots R_r, S_{11}, S_{12}, \ldots S_{1\upsilon_1}, S_{21}, S_{22}, \ldots S_{2\upsilon_2}, S_{r1}, S_{r2}, \ldots S_{r\upsilon_r}, A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots A_p, B_p$. Im Falle eines einseitigen Φ tritt an Stelle der letzten Reihe die Reihe $A_1, A_2, \ldots A_p$ welche die Substitutionen der einufrigen Rückkehrschnitte enthält. Der vollständigen Durchlaufung von γ entspricht somit ein Produkt derartiger Substitutionen. Die Tatsache, daß γ geschlossen ist, drückt sich dadurch aus, daß dieses Produkt gleich der Einheitssubstitution ist. Um nun festzustellen, ob γ ein- oder zweiufrig ist, erteilen wir der Umgebung des Punktes M von Φ eine Indikatrix, welche sich direkt auf die Umgebung der überlagerten Punkte $M_1, \ldots M_n$ überträgt. Hierauf wählen wir aus $M_1, M_2, \ldots M_n$ einen der auf γ liegenden Punkte aus, etwa M_i, und betrachten ihn als Anfang einer Durchlaufung von γ. Die Indikatrix der zu M_i gehörigen Umgebung sei repräsentiert durch eine kleine geschlossene und gerichtete Kurve $\varkappa$. Führt man uun bei der Durchlaufung von γ die Indikatrixkurve $\varkappa$ kontinuierlich mit, so erkennt man, daß nach Durchlaufung eines Bogens β die Indikatrix $\varkappa$ in Bezug auf die Indikatrix der Umgebungen der Punkte $M_1, \ldots M_n$ dann und nur dann umgeschlagen hat, wenn β über eine Faltungslinie oder über einen einufrigen Verzweigungsschnitt führt. Um dies einzusehen, beachte man, daß die gemeinsame Indikatrix der Umgebungen des Systems $(M_1, M_2, \ldots M_n)$ ohne weiteres erstreckt werden kann auf die ganzen, aber zerschnitten gedachten n Blätter von F. Hieraus folgt sofort, daß die Indikatrix bei Ueberschreitung einer Faltungslinie umschlägt. Aber auch bei Ueberschreitung eines einufrigen Verzweigungsschnittes muß ein Umschlag erfolgen, da in diesem Falle die Spur β_0 von β notwendig einufrig ist. Zum Beweis bezeichnen wir die kanonischen Rückkehrschnitte von Φ mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ und nehmen an, daß etwa der Rückkehrschnitt α_1 von einem zweiufrigen β_0 überschritten werde. Unterdrücken wir nun α_1, so erhalten wir $p-1$ einufrige Rückkehrschnitte $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_p$, welche zusammen mit dem zweiufrigen Rückkehrschnitt β_0 die Fläche Φ nicht zerlegen. Das bedeutet einen Widerspruch, da das Geschlecht von Φ gleich p angenommen worden ist. Uebrigens kann man sich die letzte Behauptung auch leicht klar machen, indem man Φ durch ein mit der üblichen Ränderzuordnung versehenes kanonisches Polygon darstellt. Die ganze Kurve γ wird also ein- oder zweiufrig sein, je nachdem das zu γ gehörige Substitutions-

produkt von den Operationen S_{ik}, A_i eine ungerade oder gerade Anzahl enthält. Hierbei ist klar, daß man die Orientierbarkeit der Grundfläche Φ in dem Sinne zu berücksichtigen hat, daß die Operationen A_i nur als Substitutionen für einufrige Rückkehrschnitte, also nur bei einseitigem Φ in Betracht kommen. Bei der Zählung der einzelnen Operationen muß natürlich ihre Multiplizität berücksichtigt werden. Umgekehrt gehören aber zu jedem Substitutionsprodukt, welches die Einheit ergibt, geschlossene Kurven γ der angegebenen Art. Wir erhalten somit als Resultat:

Satz 4: Eine endlichblättrige, reguläre Ueberlagerungsfläche F ist dann und nur dann einseitig, wenn die Monodromiegruppe eine Relation enthält, in welcher die unter Berücksichtigung der Multiplizitäten festgestellte Anzahl der indikatrixumkehrenden erzeugenden Operationen ungerade ist. Als indikatrixumkehrende Operationen sind dabei diejenigen Substitutionen bezeichnet, welche einem Randübergang oder einem einufrigen Rückkehrschnitt entsprechen.

Für die richtige Anwendung dieser Regel ist die schon in der Einleitung gemachte Bemerkung wichtig, wonach man zu unterscheiden hat zwischen der abstrakten Gruppe und ihrer Darstellung durch topologische Abbildungen. Als erzeugende Operationen sind sämtliche bei der Konstruktion der Ueberlagerungsfläche auftretenten, den Schnittlinien entsprechenden Substitutionen anzusprechen, auch wenn mehrere von ihnen ein und dasselbe Element der abstrakten Gruppe darstellen. So kann z. B. einem einufrigen Rückkehrschnitt die Einheitssubstitution ensprechen. Wir haben damit eine Relation $A_i = 1$ und die Ueberlagerungsfläche F erweist sich nach der obigen Regel als einseitig.

Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir noch das im vorausgehenden Paragraphen hergeleitete Relationssystem vervollständigen. Wir haben nämlich noch auszudrücken, daß die gewöhnlichen Verzweigungspunkte vorgeschriebene Ordnungen und ebenso die Faltverzweigungen vorgeschriebene Ordnungen besitzen. Wir erhalten so zu den Relationen *I*, *I'*, *II*, *III*, *III'*, *IV* und *(H)* noch folgende zwei Relationen:

$$V_1^{\lambda_1} = V_2^{\lambda_2} = \ldots = V_\upsilon^{\lambda_\upsilon} = 1 \tag{V}$$

$$\overline{V}_{11}^{\mu_{11}} = \overline{V}_{12}^{\mu_{12}} = \ldots = \overline{V}_{1\upsilon_1}^{\mu_{1\upsilon_1}} = \overline{V}_{21}^{\mu_{21}} = \ldots = \overline{V}_{r\upsilon_r}^{\mu_{r\upsilon_r}} = 1 \tag{VI}$$

II. Teil: Anwendungen

§ 5. Die Gruppen der Kugelfläche und der projektiven Ebene

Die Grundlage der Aufzählung liefert die im vorigen Paragraphen hergeleitete Formel

$$2 - z = n(2 - \zeta) - \sum_{\lambda=1}^{v} n\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - \sum_{\mu=1}^{v'}{}' \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \tag{H}$$

Wir setzen allgemein $z = 2p_2 + p_1 + r$; $\zeta = 2\pi_2 + \pi_1 + \varrho$. Hier bedeutet im üblichen Sinne p_2 die Anzahl der zweiufrigen, p_1 diejenige der einufrigen Rückkehrschnitte der Ueberlagerungsfläche F und r die Anzahl ihrer Ränder. Die entsprechende Bedeutung haben die Zahlen π_2, π_1 und ϱ für die Modulfläche Φ. Da wir F als geschlossen voraussetzen, so ist r immer gleich Null zu setzen.

Wir beginnen mit der Kugelfläche $z = 0$ und schreiben Gleichung (H) in der Form

$$\sum_{\lambda=}^{v} \frac{n}{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{v'}{}' \frac{n}{2\mu} = n\left(\zeta + v + \frac{v'}{2} - 2\right) + 2 \tag{A}$$

Da auf jeden Fall gilt $\lambda \geqq 2$ und $\mu \geqq 2$, so erhält man durch eine leichte Umformung die Bedingung

$$\zeta + \frac{v}{2} + \frac{v'}{4} < 2 \tag{B}$$

Da weiter die linke Seite von (A) nicht negativ sein kann, ergibt sich aus der rechten Seite die zweite Bedingung

$$\zeta + v + \frac{v'}{2} \geqq 1 \tag{C}$$

wo überdies das Gleichheitszeichen nur für $n = 2$ eintreten kann. Wir ordnen nun die Lösungen nach aufsteigenden Werten der Summe

$\sigma = \zeta + v + v' = 2\pi_2 + \pi_1 + \varrho + v + v'$. Entsprechen einem bestimmten Werte σ mehrere Lösungen, so ordnen wir diese in der Weise, daß den Größen π_2, π_1, ϱ, v, v' von links nach rechts möglichst große Werte erteilt werden. In diesem Sinne ist die folgende Tabelle zu verstehen. Dabei sind aber diejenigen Fälle von vorneherein unterdrückt worden, für welche Gleichung (A) zu einem Widerspruch führt oder welche im Widerspruch zur Definition der benutzten Größen stehen. So muß z. B. mit $\varrho = 0$ auch $v' = 0$ sein, da Faltverzweigungen nur auf Rändern vorkommen.

σ	π_2	π_1	ϱ	v	v'
1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	0
2	0	0	1	1	0
2	0	0	0	2	0
3	0	0	1	1	1
3	0	0	1	0	2
3	0	0	0	3	0
4	0	0	1	0	3

Für die projektive Ebene $z = 1$ ergibt sich an Stelle von (A) die Gleichung

$$\sum_{\lambda=-1}^{v} \frac{n}{\lambda} + \sum_{\mu=-1}^{v'} \frac{n}{2\mu} = n\left(\zeta + v + \frac{v'}{2} - 2\right) + 1 . \qquad \text{(A')}$$

Die Ungleichungen (B) und (C) hingegen gelten unverändert, ausgenommen davon, daß bei (C) das Gleichheitszeichen nicht mehr in Frage kommt. Somit ist auch für diesen Fall die eben angegebene Tabelle maßgebend. Jeder Zeile entspricht eine spezielle Gleichung (A) resp. (A'). Wir numerieren nun die Zeilen von oben nach unten und entsprechend die Gleichungen. Wenn wir dabei noch von vorneherein diejenigen Gleichungen weglassen, welche keine von der Identität verschiedene Lösung zulassen, erhalten wir schließlich folgende Uebersicht.

	(A)	(A′)
1.	$n = 2$	— — — — —
2.	$n = 2$	— — — — —
3.	$\frac{n}{\lambda} = 2$	$\frac{n}{\lambda} = 1$
4.	$\frac{n}{\lambda} = 2$	$\frac{n}{\lambda} = 1$
5.	$\frac{n}{\lambda_1} + \frac{n}{\lambda_2} = 2$	— — — — —
6.	$\frac{n}{\lambda} + \frac{n}{2\mu} = \frac{n}{2} + 2$	$\frac{n}{\lambda_1} + \frac{n}{2\mu} = \frac{n}{2} + 1$
7.	$\frac{n}{2\mu_1} + \frac{n}{2\mu_2} = 2$	— — — — —
8.	$\frac{n}{\lambda_1} + \frac{n}{\lambda_2} + \frac{n}{\lambda_3} = n + 2$	$\frac{n}{\lambda_1} + \frac{n}{\lambda_2} + \frac{n}{\lambda_3} = n + 1$
9.	$\frac{n}{2\mu_1} + \frac{n}{2\mu_2} + \frac{n}{2\mu_3} = \frac{n}{2} + 2$	$\frac{n}{2\mu_1} + \frac{n}{2\mu_2} + \frac{n}{2\mu_3} = \frac{n}{2} + 1$

In dieser Reihenfolge sollen die Fälle durchbehandelt werden. Dabei bedienen wir uns der in den Paragraphen 3 und 4 eingeführten Bezeichnungen und benutzen überdies für Kugel und projektive Ebene die Abkürzungen K und E.

1. Die Bedingungen $\pi_2 = 0$, $\pi_1 = 1$, $\varrho = 0$ bedeuten, daß die Modulfläche Φ eine einseitige geschlossene Fläche vom Geschlecht 1 ist, also selbst den Zusammenhang von E hat. $v = v' = 0$ bedeutet, daß F eine unverzweigte Ueberlagerungsfläche von Φ ist. Das Schnittsystem von Φ besteht aus einem einufrigen Rückkehrschnitt a und die bei Ueberschreitung von a erfolgende Substitution A ist die einzige in Betracht kommende Operation. In Uebereinstimmung mit $n = 2$ muß gelten (Gleichung I′ § 3) $A^2 = 1$. Die Konstruktion der Ueberlagerungsfläche F von Φ geschieht folgendermaßen: Ausgehend vom Punkte M von α wird Φ längs a zerschnitten. Das eine Ufer von a setzt sich zusammen aus zwei «neben einander liegenden» Hälften, von denen jede einer einmaligen Durchlaufung von α entspricht. Das Gleiche gilt von den zwei über Φ liegenden Blättern F_1 und F_2 von F in bezug auf die zugehörigen Schnitte a_1 und a_2. F_1 und F_2 sind nun so zusammenzu-

fügen, daß die eine Hälfte des Ufers von α_1 verschmolzen wird mit derjenigen Hälfte des Ufers von a_2 deren Projektion neben der eben benutzten Hälfte des Ufers von a_1 liegt und vice-versa. Daß $F = K$ ist, folgt schon aus $\tau = 0$. Die Orientierbarkeit von F kann auch dadurch bestätigt werden, daß die einzige vorkommende Relation $A^2 = 1$ die indikatrix-umkehrende Operation A in gerader Anzahl enthält. (Satz 4 § 4). Die zugehörige Decktransformation bedeutet eine involutorische Transformation mit Umkehrung der Indikatrix von K in sich, welche keinen Punkt von K invariant läßt. Modell: Spiegelung der euklidischen Kugel an ihrem Mittelpunkt.

2. $\pi_2 = 0$; $\pi_1 = 0$; $\varrho = 1$; $v = 0$; $v' = 0$. Φ ist vom Geschlecht Null und hat einen Rand, kann somit als Kreisscheibe aufgefaßt werden. F liegt unverzweigt über Φ mit einer Faltungslinie über dem Rand. Die Konstruktion ist ohne weiteres ersichtlich. Die einzige Operation ist S und es gilt $S^2 = 1$ und natürlich auch $F = K$. Modell: Spiegelung der euklidischen Kugel an einer Hauptebene.

3. $\pi_2 = 0$; $\pi_1 = 1$; $\varrho = 0$; $v = 1$; $v' = 0$. Als Operationen kommen in Betracht die Substitution A längs des einufrigen Rückkehrschnitts a und die Substitution V längs der von σ zum Verzweigungspunkt hinführenden Schnittlinie. Für die Konstruktion längs a gilt wieder das unter 1. Gesagte. An Stelle des dort sich ergebenden Zweierzyklus können natürlich mehrere Cykel beliebiger Ordnung treten. Gleichung II ergibt $V A^2 = 1$, also $V = A^{-2}$. Alle Operationen setzen sich aus A zusammen und die Gruppe ist somit zyklisch. Ist n der Grad, so gilt $A^n = 1$. Hier ist nun zu unterscheiden zwischen geradem und ungeradem n. Die erste der Gleichungen 3. sagt aus, daß für $F = K$ gelten muß, $n \equiv 0 \pmod{2}$ und $\lambda = \frac{n}{2}$. Es gilt aber auch das Umgekehrte. Sei etwa $n = 2m$, so folgt aus $V = A^{-2}$ die Gleichung $V^m = A^{-2m} = 1$, $\lambda = m = \frac{n}{2}$ und somit $F = K$. Für $n \equiv 1 \pmod{2}$, oder $n = 2m + 1$ erhalten wir $A^{2m+1} = A\, V^m = 1$. Wir haben somit eine Relation, welche das indikatrixumkehrende A nur einmal enthält, woraus $F = E$ folgt.

Modelle: Wir wählen in einer euklidischen Kugel K_0 eine feste Achse a_0 und verstehen unter $T(\alpha)$ eine zur Achse a_0 gehörige Rotationsspiegelung vom Winkel α, d. h. eine Rotation von K_0 um den Winkel α mit der festen Achse a_0 gefolgt von einer Spiegelung an der zu a_0 senkrechten Hauptebene. Dann gilt

$$\text{für } K\colon A = T\left(\frac{2\pi}{n}\right);\ n \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\text{für } E\colon A = T\left(\frac{2\pi}{2n}\right);\ n \equiv 1 \pmod{2}$$

wobei im zweiten Falle diametral gegenüber liegende Punkte von K_0 zu identifizieren sind.

Hier möchte ich folgendes bemerken: Die Angabe der Modell-Darstellungen hat nur den Zweck, sofort die bekannten Beispiele zur Verfügung zu stellen. Im übrigen enthalten die hier angegebenen Ueberlagerungsgebilde alle und nur die topologisch wesentlichen Eigenschaften. Sie sind die eigentlichen Modelle und haben für alle geschlossenen Flächen Gültigkeit. Aus ihnen ergeben sich alle denkbaren räumlichen Modelle in einer von zufälligen Aeußerlichkeiten unabhängigen Weise, wenn man das Ueberlagerungsgebilde auseinanderfaltet und den einzelnen Operationen V, R, A, B, S im topologischen Sinne Rotationen, Translationen, Gleit-Spiegelungen und Spiegelungen des zerschnittenen Φ in eindeutiger Weise auf Grund der durch die Gruppe bestimmten Ränder-Zuordnung entsprechen läßt. Ein derartiges Verfahren wurde von Brouwer zur Herleitung der indikatrixerhaltenden Gruppen des Torus [10]) verwendet. Da wir für den vorliegenden Zweck dieses Verfahren nicht benötigen, soll es auch nicht weiter beschrieben werden.

4. $\pi_2 = 0$; $\pi_1 = 0$; $\varrho = 1$; $v = 1$; $v' = 0$, die erzeugenden Operationen sind V, R, S. Nach Definition gilt

$$S^2 = 1\ ;\ V^\lambda = 1.$$

Gleichung I liefert

$$VR = 1\ ;\ \text{oder}\ V = R^{-1}\ .$$

Schließlich muß zufolge $v' = 0$ auf Grund von Gleichung IV ausgedrückt werden, daß auf dem Rand keine Faltverzweigung liegt. Dies ergibt

$$R^{-1} S R S = 1\ ;\ \text{oder}\ R S = S R.$$

Im Falle $F = K$ gilt die Gleichung $n = 2\lambda$. Die Gruppe setzt sich zusammen aus einer zyklischen Rotationsgruppe $1, R, R^2, \ldots R^{\frac{n}{2}-1}$ und

einer mit ihr vertauschbaren Spiegelung S. Hier ist noch besonders der Fall $\lambda \equiv 1 \pmod{2}$ anzumerken. Die Gruppe ist in diesem Falle zyklisch mit dem erzeugenden Element $R\,S$ $[(R\,S)^{\lambda} = S]$. Im Falle $F = E$ gilt $n = \lambda$, somit wird die ganze Gruppe durch die Operationen $1, R, R^2 \ldots R^{n-1}$ erschöpft. Die Operation S muß daher unter diesen Operationen vorkommen. Hieraus folgt $n \equiv 0 \pmod{2}$, $S = R^{\frac{n}{2}}$. Diese Gleichung bestätigt wiederum die Einseitigkeit von F.

Modelle: Wir benutzen wieder die unter 3. beschriebene Kugel K_0 und die die Rotationsspiegelung $T(\alpha)$ zusammensetzenden Operationen $R(\alpha)$ und S_0. $R(\alpha)$ bedeutet also eine Rotation vom Winkel α und S_0 eine Spiegelung an der zur Achse senkrechten Hauptebene. Dann gilt

für K: die Gruppe wird dargestellt durch $R\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$, S_0 speziell für $\lambda \equiv 1$ (mod. 2) durch $T\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = R\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) S_0$,

für E: die Gruppe wird dargestellt durch $T\left(\frac{2\pi}{2\lambda}\right)$; $\lambda \equiv 0$ (mod. 2).

Hier sind wieder die diametral einander gegenüber liegenden Punkte von K_0 zu identifizieren. Man vergleiche das Ergebnis mit den unter 3. angegebenen Modelle und beachte, daß damit tatsächlich alle Möglichkeiten für $T(\alpha)$ erschöpft sind.

5. $\pi_1 = \pi_2 = \varrho = 0$; $v = 2$; $v' = 0$. Die zugehörige Gleichung $\frac{n}{\lambda_1} + \frac{n}{\lambda_2} = 2$ besitzt die einzige Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = n$. Die erzeugenden Operationen V_1 und V_2 genügen den Gleichungen $V_1^n = V_2^n = 1$; $V_1 V_2 = 1$. Man erkennt ohne weiteres für $F = K$ die Existenz einer Rotationsgruppe, welche im Sinne von 4. modellmäßig dargestellt wird durch $R\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. $F = E$ existiert nicht, da $\frac{n}{\lambda_1} + \frac{n}{\lambda_2} = 1$ keine Lösung hat. Wir überspringen nun 6. und behandeln vorerst

7. $\pi_1 = \pi_2 = 0$; $\varrho = 1$; $v' = 2$, die erzeugenden Substitutionen sind S_1 und S_2.

In Betracht kommen die Relationen III, V und VII.

$$S_2 S_1 = \overline{V_1}; \quad S_1 S_2 = \overline{V_2}; \qquad \text{III}$$

$$S_1^2 = 1; \quad S_2^2 = 1 \quad n \equiv 0 \pmod{2} \qquad \text{V}$$

$$\overline{V_1}^{\mu_1} = 1; \quad \overline{V_2}^{\mu_2} = 1 \qquad \text{VII}$$

Aus III. und V. folgt

$$\overline{V}_1 \overline{V}_2 = 1.$$

Die Gleichung $\frac{n}{2\mu_1} + \frac{n}{2\mu_2} = 2$ besitzt die einzige Lösung $\mu_1 = \mu_2 = \mu$; $n = 2\mu$. Auf Grund der Resultate von 5. erkennt man sofort, daß die $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$ für sich eine zyklische Gruppe vom Grade $\mu = \frac{n}{2}$ erzeugen. Wir setzen deshalb $\overline{V}_1 = \overline{V}$; $\overline{V}_2 = \overline{V}^{\mu-1}$ und weiter $S_1 = S$. Dann folgt $S_2 = \overline{V}S = S\overline{V}^{\mu-1}$. Man erkennt die Existenz einer *Diederspiegelungsgruppe*.

Modell: Einer Rotationsgruppe ist eine Spiegelung an einer die Achse enthaltenden Hauptebene überlagert. Damit ist die Gruppe für $F = K$ charakterisiert.

Für $F = E$ existiert keine Gruppe, da $\frac{n}{2\mu_1} + \frac{n}{2\mu_2} = 1$ keine Lösung hat.

6. Dieser Fall ist im Hinblick auf die projektive Ebene $F = E$ besonders instruktiv. Die Gleichung (A) ergibt

$$\text{a)} \qquad \frac{n}{\lambda} + \frac{n}{2\mu} = \frac{2}{n} + 2 \text{ für } F = K$$

und (A')

$$\text{b} \qquad \frac{n}{\lambda} + \frac{n}{2\mu} = \frac{n}{2} + 1 \text{ für } F = E$$

Man erkennt leicht, daß die Lösungen von a) gegeben sind durch

$$\text{a}_1) \qquad \lambda = 2\,; \quad \frac{n}{2\mu} = 2$$

$$\text{a}_2) \qquad \lambda = 3\,; \quad \mu = 2\,; \quad n = 24$$

Ebenso erhält man die Lösungen von b):

$$\text{b}_1 \qquad \lambda = 2\,; \quad \frac{n}{2\mu} = 1$$

$$\text{b}_2) \qquad \lambda = 3\,; \quad \mu = 2\,; \quad n = 12$$

Wir behandeln diese Fälle am bequemsten in der Reihenfolge a_1), b_1), a_2), b_2).

a_1) Die erzeugenden Operationen sind V, R und S. Sie genügen den Relationen I, V und VI:

$$VR = 1 \qquad \text{I}$$

$$S^2 = 1 \qquad \text{V}$$

$$V^2 = 1 \qquad \text{VI}$$

Hinzu tritt nach Gleich. IV die Operation

$$R^{-1} S R S = \overline{V} \qquad \text{IV}$$

welche der Relation VII genügen muß:

$$\overline{V}^{\mu} = 1 \qquad \text{VII}$$

Aus I und IV folgt $R = V^{-1} = V$. Man kann also R ohne weiteres eliminieren und erhält

$$\overline{V} = V S V S$$

Nun findet man leicht, $(V\overline{V})^2 = (SVS)^2 = 1$ und daraus ergibt sich die Beziehung

$$V\overline{V} = \overline{V}^{\mu-1} V$$

Dies bedeutet, daß die Elemente V und $\overline{V}$ allein eine Diedergruppe γ erzeugen, deren sämtliche Operationen gegeben sind durch

$$1,\ \overline{V},\ \overline{V}^2, \ldots \overline{V}^{\mu-1}$$
$$V,\ V\overline{V},\ V\overline{V}^2, \ldots V\overline{V}^{\mu-1}$$

Die volle Gruppe g erhält man durch Hinzufügung der Elemente

$$S,\ \overline{V}S,\ \overline{V}^2 S, \ldots \overline{V}^{\mu-1} S$$
$$VS,\ V\overline{V}S,\ V\overline{V}^2 S, \ldots V\overline{V}^{\mu-1} S$$

Aus den für V, S und $\overline{V}$ gültigen Relationen erhält man leicht

$$SVS = V\overline{V};\ S\overline{V}^i S = \overline{V}^{\mu-i}$$

Diese Relationen beschreiben vollständig, wie γ in g enthalten ist. Insbesondere erweist sich γ als invariante Untergruppe von g, was schon aus dem Umstande folgt, daß γ die indikatrixerhaltenden Operationen umfaßt. Die Gruppe g ist die *erweiterte Diedergruppe*.

b_1) Die erzeugenden Operationen sind dieselben, wie bei a_1). Ebenso gelten die nämlichen Relationen. Hingegen muß der Grad von g nicht 4μ sondern 2μ sein. Es muß also noch eine Relation hinzutreten. In der Tat, $F = E$ ist einseitig und Satz 4 fordert eine Relation, welche unter den schon angegebenen nicht enthalten ist. Auf Grund der Resultate unter a_1) erkennt man sofort, daß die gesuchte Relation darin besteht, daß eines der Elemente der Nebenreihe von γ gleich 1 sein muß. Anders ausgedrückt, S gehört zu γ. Es muß also ein Element von γ ausfindig gemacht werden, dessen Quadrat 1 ist und welches für S eingesetzt werden kann ohne daß die Gruppe γ verkürzt wird. Da aus $S = V$ die Gleichung $\overline{V} = 1$ folgt, scheidet diese Möglichkeit aus. Wir setzen nun $S = V\overline{V}^i$. Dann müßen die Beziehungen $\overline{V} = VSVS$ und $S^2 = 1$ erfüllt sein. Die zweite Bedingung ist für jedes i erfüllt. Die erste ergibt $\overline{V} = \overline{V}^{2i}$, $\overline{V}^{2i-1} = 1$, $i = \frac{\mu+1}{2}$. Für ungerade μ kann man also setzen $S = V\overline{V}^{\frac{\mu+1}{2}} = \overline{V}^{\frac{\mu-1}{2}} V$.

Für gerade μ erhält man als einzige Möglichkeit $S = \overline{V}^{\frac{\mu}{2}}$. Man hat somit das Resultat, daß in jedem Falle die Einordnung von S in γ festgelegt ist. Modellmäßig erhält man die Gruppe sowohl aus der Diederspiegelungsgruppe als auch aus der Diederdrehgruppe, wenn man auf der Kugel diametral gegenüberliegende Punkte identifiziert.

a_2) Erzeugende: V, R, S.

Relationen: $V^3 = 1$, $VR = 1$, $S^2 = 1$; dazu tritt von der Faltverzweigung her wieder $\overline{V} = R^{-1}SRS$ mit $\overline{V}^2 = 1$. Wir eliminieren wieder R und erhalten $\overline{V} = V^2SVS$. Man folgert nun leicht die Relation

$$V\overline{V}\,V\overline{V}\,V\overline{V} = 1$$

Ihr zufolge erzeugen V und $\overline{V}$ eine Untergruppe γ von der Struktur der Tetraedergruppe. Die Hinzunahme von S ergibt die voll 24-gliedrige Gruppe g, in welcher γ invariant enthalten ist. Es gelten die Relationen

$$SVS = V\overline{V}\,;\; S\overline{V}S = \overline{V}$$

Die Gruppe g ist nicht die sogenannte erweiterte Tetraedergruppe. Sie wird vielmehr modellmäßig dargestellt durch die 3-zähligen Drehungen des Würfels vermehrt um die Spiegelungen an den zu den Seitenflächen

parallelen Symmetrieebenen. Man überzeugt sich auf Grund dieses Modells leicht davon, daß diese 24-gliedrige Gruppe auch nicht die Struktur der Oktaedergruppe besitzt. Die Zusammensetzung einer 3-zähligen Drehung mit einer der hinzugefügten Spiegelungen ergibt nämlich eine 6-periodische Rotationsspiegelung, während die Oktaedergruppe überhaupt keine 6-periodische Operatoren enthält.

b_2) Die Argumentation verläuft analog wie bei b_1). Für S kommen als einzige 2-zählige Elemente aus γ in Betracht $\overline{V}$, $V\overline{V}\,V^2$, $V^2\overline{V}V$, welche übrigens zusammen mit dem Einheitselement die Vierergruppe ergeben. Zufolge der Relation $\overline{V} = V^2 S V S$ und $\overline{V}^2 = 1$ wird γ nur dann nicht verkürzt, wenn man setzt

$$S = V\overline{V}\,V^2$$

Damit erscheint γ als Tetraedergruppe der projektiven Ebene.

8. Die Gleichung $\frac{n}{\lambda_1} + \frac{n}{\lambda_2} + \frac{n}{\lambda_3} = n + 2$ ergibt bekanntlich die regulären Drehgruppen in folgender Weise:

	λ_1	λ_2	λ_3	n
Dieder	2	2	m	2m
Tetraeder	2	3	3	12
Oktaeder	2	3	4	24
Ikosaeder	2	3	5	60

Dazu gehören die Operatoren V_1, V_2, V_3, welche den Relationen

$$V^{\lambda_1} = V_2^{\lambda_2} = V_3^{\lambda_3} = 1\,;\quad V_1 V_2 V_3 = 1$$

genügen. Man kann also immer einen Operator eliminieren und erhält so die Erzeugung der Gruppe aus 2 Elementen. Es ist bemerkenswert, daß die angegebenen Relationen die Gruppe eindeutig bestimmen, falls die λ_i ein Wertsystem der obigen Tabelle darstellen. Anders ausgedrückt: Irgend eine abstrakte Gruppe, welche den angegebenen Bedingungen genügt, ist eine reguläre Drehgruppe. Der Grad n stellt sich von selbst her. Die Gruppe enthält keine indikatrixumkehrende Operation und dementsprechend resultiert auch keine Gruppe für die projektive Ebene.

9. Hier sind wieder die Fälle $F = K$ und $F = E$ auseinander zu halten.

a) $F = K$; die Gleichung $\frac{n}{2\mu_1} + \frac{n}{2\mu_2} + \frac{n}{2\mu_3} = \frac{n}{2} + 2$ liefert die erweiterten Drehgruppen:

	μ_1	μ_2	μ_3	n
Dieder	2	2	m	4m
Tetraeder	2	3	3	24
Oktaeder	2	3	4	48
Ikosaeder	2	3	5	120

Als erzeugende Operatoren sind zu nehmen S_1, S_2, S_3 mit den Relationen $S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = 1$. Dazu kommen im Sinne von III die Substitutionen $\overline{V_1} = S_2 S_3$, $\overline{V_2} = S_3 S_1$, $\overline{V_3} = S_1 S_2$; mit den Relationen $\overline{V_1}^{\mu_1} = \overline{V_2}^{\mu_2} = \overline{V_3}^{\mu_3} = 1$. Man folgert ohne weiteres das Bestehen von $\overline{V_1}\,\overline{V_2}\,\overline{V_3} = 1$. Damit ist die invariante Untergruppe γ der indikatrixerhaltenden Operationen gewonnen. Man sieht leicht, daß sich die volle Gruppe g ergibt, wenn man etwa γ rechtsseitig mit irgend einem Element $S = S_i$ komponiert.

b) $F = E$; die Gleichung $\frac{n}{2\mu_1} + \frac{n}{2\mu_2} + \frac{n}{2\mu_3} = \frac{n}{2} + 1$ hat genau dieselben Lösungen wie die entsprechende Gleichung von 8. wenn man dort an Stelle der λ_i die μ_i treten läßt. Die Operatoren sind die unter a) angegeben: S_1, S_2, S_3 mit den nämlichen Relationen. Hier muß ein S ausgewählt werden, welches mit einem Element X von γ identifiziert werden kann, ohne daß γ verkürzt wird. Man kann sich wieder davon überzeugen, daß zu einem gegebenen S das passende X eindeutig bestimmt ist. Die Bedeutung dieser Tatsache für das Modell kann man sich folgendermaßen klar machen. Für die Kugel mit diametral identifizierten Punkten muß die Operation SX die Identität bedeuten. SX muß daher eine Zentralspiegelung sein. Bei gegebenem S gibt es aber nur ein X, welches dieser Forderung genügt, nämlich diejenige Halbdrehung, welche die zu S gehörige Spiegelungsebene invariant läßt.

Wir haben somit auch für die projektive Ebene die Realisierungen der regulären Drehgruppen gewonnen. Die Oktaeder- und Ikosaedergruppe treten hier zum ersten Mal auf. Die Diedergruppe erhielten wir unter $6b_1$ und die Tetraedergruppe unter $6b_2$. Diese Realisierungen sind jedoch von den zuletzt erhaltenen topologisch verschieden, d. h. es gibt keine topologische Abbildung von E in sich, welche die eine in

die andere überführt. Man erkennt dies ohne weiteres aus der verschiedenen Verzweigungsart, welche die Verschiedenheit der invarianten Elemente zum Ausdruck bringt.

§ 6. Involutorische Transformationen

Aus den vorausgehenden Erörterungen ist zu ersehen, daß man wohl unterscheiden muß zwischen der abstrakten Gruppe und ihrer Realisierung durch topologische Abbildungen. Dies wird noch deutlicher, wenn man die einfachste endliche Gruppe, nämlich die Gruppe der Involution: $1, T, T^2 = 1$ zu Grunde legt. Ueber diese Gruppe ist kein Wort zu verlieren. Hingegen sind die Möglichkeiten ihrer Realisierung durch topologische Abbildungen schon recht mannigfaltig.

Je nachdem die Ueberlagerungsfläche F einseitig oder zweiseitig ist, bezeichnen wir sie mit F_1 oder F_2. Ebenso unterscheiden wir für Φ zwischen Φ_1 und Φ_2. Wir legen wiederum die Gleichung (H)

$$2 - z = n\,(2 - \zeta) - \sum_1^{\upsilon} n \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - \sum_1^{\upsilon'}{}' \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)$$

zugrunde. Da die Gruppe zyklisch ist, gilt $v' = 0$. Weiter ist zu setzen $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\upsilon = n = 2$. Indem man dies berücksichtigt, erhält man nach leichter Umformung die Gleichung

$$z + 2 = 2\,\zeta + v \tag{1}$$

Hier ist wieder zu setzen

$$\begin{array}{lll} \text{für} & F = F_2: & z = 2\,p_2 \quad ; \\ \text{für} & F = F_1: & z = p_1 \quad ; \\ \text{für} & \Phi = \Phi_2: & \zeta = 2\,\pi_2 + \varrho\,; \\ \text{für} & \Phi = \Phi_1: & \zeta = \pi_1 + \varrho\,. \end{array}$$

Als erzeugende Operationen ergeben sich

$$\text{für} \quad \Phi = \Phi_2: A_i = T^{a_i}\,;\ B_i = T^{b_i}\,;\ V_i = T;\ R_i = T^{r_i}\,;\ S = T$$

$$\text{für} \quad \Phi = \Phi_1: A_i = T^{a_i}\,;\ V_i = T;\ R_i = T^{r_i}\,;\ S = T$$

Die Gleichung 1. § 3 reduziert sich in beiden Fällen auf

$$V_1\, V_2 \ldots V_\upsilon\, R_1\, R_2 \ldots R_\rho = 1$$

Dies ergibt die äquivalente Bedingungsgleichung

$$(2) \qquad v + r_1 + r_2 + \ldots + r_\rho \equiv 0 \pmod{2}$$

Jede der Zahlen a_i, b_i, r_i, ist modulo 2 zu nehmen, kann also immer gleich 0 oder 1 gesetzt werden. Man sieht ohne weiteres, daß damit auch alle übrigen Bedingungen erfüllt sind. Die Orientierbarkeit soll in den einzelnen zu unterscheidenden Hauptfällen jeweils besonders diskutiert werden. Wir gehen nun der Reihe nach die drei sich ergebenden Hauptfälle durch.

a) *Indikatrixerhaltende Involutionen 2-seitiger Flächen.*

Man erkennt unmittelbar, daß folgende Bedingungen erfüllt sein müssen: $F = F_2$, $z = 2p_2$; $\Phi = \Phi_2$; $\varrho = 0$; $\zeta = 2\pi_2$. Gleichung (1) ergibt somit:

$$(1') \qquad 2p_2 + 2 = 4\pi_2 + v$$

Da v auch die Anzahl der Fixpunkte bedeutet, folgt der

Satz 5: Die Anzahl der Fixpunkte einer indikatrixerhaltenden Involution einer geschlossenen 2-seitigen Fläche in sich ist kongruent $2p + 2$ modulo 4 und erreicht im Maximum den Wert $2p + 2$ wo p das Geschlecht der Fläche bedeutet.

Für ein festes $\pi_2 \neq 0$ ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, die Ueberlagerungsfläche zu konstruieren. Man kann nämlich den Exponenten a_i, b_i der Operatoren $A = T^{a_i}$, $B = T^{b_i}$ in beliebiger Weise den Wert 0 oder 1 erteilen, sofern nur einmal das Element T realisiert wird. Diese einem festen π_2 entsprechenden Abbildung stimmen in der Anzahl der Fixpunkte überein. Es erhebt sich nun die Frage, ob sie im engern Sinne äquivalent sind, d. h. ob es möglich ist, die Fläche F so in sich zu transformieren, daß irgend eine dieser Abbildungen in irgend eine andere von ihnen übergeht. Diese Frage wird entschieden durch

Satz 6: Zwei indikatrixerhaltende Involutionen einer 2-seitigen Fläche sind dann und nur dann topologisch äquivalent, wenn sie in der Anzahl der Fixpunkte übereinstimmt.

Der Beweis dieses Satzes beruht darauf, daß es möglich ist, einen eindeutig bestimmten «reduzierten Fundamentalbereich» anzugeben. Es ist zweckmäßig folgende Bezeichnungen einzuführen: Ein die Fläche nicht zerlegender Rückkehrschnitt, welcher sein Bild nicht trifft, bildet zusammen mit seinem Bilde ein *Zykelpaar*. Ein invarianter Rückkehrschnitt, dessen Ufer bei der Abbildung vertauscht werden, heiße ein

Schnittzykel. Ein Schnittzykel geht mit umgekehrter Indikatrix in sich über und trägt somit genau zwei Fixpunkte. Ein System von Zykelpaaren und Schnittzykeln, welche zusammen die Fläche in zwei Teile zerlegen, die bei der Abbildung mit einander vertauscht werden, heiße *ein die Involution halbierendes Schnittsystem* oder kurz *ein halbierendes Schnittsystem.*

Nun beweisen wir

Hilfssatz 1: Zu einer indikatrixerhaltenden Involution lassen sich immer halbierende Schnittsysteme angeben.

Die Richtigkeit der Behauptung für den Fall der Kugel folgt ohne weiteres aus dem Umstande, daß die in Frage kommende Involution der Kugel mit einer Halbdrehung äquivalent ist. Jedes halbierende Schnittsystem besteht aus einem Schnittzykel. Wir setzen also den Hilfssatz voraus für Flächen, deren Geschlecht kleiner ist als p und beweisen ihn für p. Ist $\pi_2 = 0$, so kann Φ_2 als Kugel aufgefasst werden und es gilt für die Anzahl v der Fixpunkte $v = 2p + 2$. Man bezeichne die Spurpunkte der Verzweigungen mit $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{2p+1}, P_{2p+2}$ und zwar in der Reihenfolge, welche einer zyklischen Durchlaufung der von O ausgehenden Verzweigungsschnitte entspricht. Hierauf verbinde man in der Grundfläche Φ_2 die Punkte P_1 und P_2 vermittelst eines einfachen Bogens α_1, welcher das Schnittsystem nicht trifft, hierauf P_3 und P_4 vermittelst eines ebensolchen Bogens α_2, welcher überdies α_1 nicht trifft und so fort; allgemein P_{2i-1} und P_{2i} vermittelst eines Bogens α_i, welcher weder das Schnittsystem noch die vorausgehenden Bögen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2-1}$ trifft. Den Bögen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p+1}$ überlagert sind dann genau $p + 1$ Schnittzykel $c_1, c_2, \ldots c_{p+1}$, welche zusammen ein halbierendes Schnittsystem bilden, wie man ohne Schwierigkeit einsieht.

Ist $\pi_2 \neq 0$, so betrachten wir irgend ein Rückkehrschnittpaar a_i, b_i mit den zugeordneten Substitutionen A_i und B_i. Ist eine der beiden Substitutionen, etwa A_i, gleich der Identität, so ziehen wir einen Zykel σ auf Φ_2, welcher a_i genau einmal überkreuzt, im übrigen aber keinen Punkt mit dem Schnittsystem gemein hat. Zufolge $A_i = 1$ zerfällt das Ueberlagerungsgebilde von σ in ein Zykelpaar (σ_1, σ_2). Gilt hingegen $A_i = B_i = T$, so führe man σ so, daß es sowohl a_i wie b_i genau einmal überkreuzt, im übrigen aber keinen Punkt mit dem Schnittsystem gemein hat. Zufolge $A_i B_i = T^2 = 1$ ergibt sich wieder ein Zykelpaar (σ_1, σ_2).

Nun sind 3 Fälle zu unterscheiden:

1. (σ_1, σ_2) zerlegt F in 2 Teile F^1 und F^2, welche bei der Abbildung ineinander übergehen. Dann bildet (σ_1, σ_2) ein halbierendes Schnittsystem.

2. (σ_1, σ_2) zerlegt F in 2 Teile F^1 und F^2, von denen jeder bei der Abbildung in sich übergeht. Da σ_1 allein F nicht zerlegt, haben F^1 und F^2 kleineres Geschlecht als F. Wir zerschneiden nun F längs σ_1 und σ_2. Dann entsprechen den Schnitten σ_1 und σ_2 auf F^1 die beiden Ränder σ_{11} und σ_{21} und ebenso auf F^2 die Ränder σ_{12} und σ_{22}. Die berandeten Flächen F^1 und F^2 unterliegen selbst einer Involution und unbeschadet der Ränder kann man die Existenz von halbierenden Schnittsystemen C^1 und C^2 annehmen. Durch C^1 zerfalle F^1 in F^{11} und F^{12}, wobei F^{11} den Rand σ_{11} und F^{12} den Rand σ_{21} enthalte. Ebenso zerfällt F^2 durch C^2 in F^{21} und F^{22} mit den resp. Rändern σ_{12} und σ_{22}. Auf der unzerschnittenen Fläche F hängen F^{11} und F^{21} längs σ_1 und ebenso F^{12} und F^{22} längs σ_2 zusammen und man erkennt, daß $C^1 + C^2$ ein die Involution von F halbierendes Schnittsystem bildet.

3. (σ_1, σ_2) zerlegt F nicht. Wir schneiden F längs σ_1 und σ_2 auf und erhalten eine Fläche $\overline{F}$ von niedrigerem Geschlecht mit den vier Rändern $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$. Bei der Involution von $\overline{F}$ werden σ_{11} und σ_{12} vertauscht mit σ_{21} respektive σ_{22}. Sei nun $\overline{C}$ ein die Involution von $\overline{F}$ halbierendes Schnittsystem, welches $\overline{F}$ in $\overline{F}^1$ und $\overline{F}^2$ zerlegt, so gehören σ_{11} und σ_{12} zu $\overline{F}^1$ und ebenso σ_{21} und σ_{22} zu $\overline{F}^2$. Daraus folgt, daß $\overline{C}$ auch ein die Involution der unzerschnittenen Fläche halbierendes System ist. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Nun kann man aus den nach Hilfssatz 1 existierenden halbierenden Schnittsystemen ein einfachstes auswählen.

Hilfssatz 2: Unter den die Involution halbierenden Schnittsystemen existieren immer minimale Schnittsysteme, welche dadurch gekennzeichnet sind, dass sie entweder aus lauter Schnittzykeln oder aus einem einzigen Zykelpaar bestehen.

Beweis: Sei C ein halbierendes Schnittsystem, welches F in die bei der Abbildung ineinander übergehenden Teile F^1 und F^2 zerlegt. Enthält C nur Schnittzykel, so liegt ein minimales Schnittsystem vor. Wir nehmen also an, C enthalte die Zykelpaare (σ_1, σ_2); (σ_1', σ_2'); ... und wollen weiter voraussetzen, daß C auch mindestens einen Schnittzykel s enthalte. s enthält zwei Fixpunkte P und Q und zerfällt durch diese beiden Punkte in zwei einfache Bögen α_1 und α_2, welche bei der Abbildung mit einander vertauscht werden. Nun verbinde man, was immer möglich ist, innerhalb F^1 die Punkte P und Q vermittels eines einfachen Bogens β_1, welcher zusammen mit $\alpha_1, \sigma_1, \sigma_1', \sigma_1'', \ldots$, einen schlichtartigen Teilbereich G^1 von F^1 begrenzt. Mit H^1 bezeichne man den Bereich $F^1 - G^1$. Dann begrenzt das Bild β_2 von β_1 innerhalb F^2 zusammen mit $\alpha_2, \sigma_2, \sigma_2', \sigma_2'', \ldots$, einen schlichtartigen Bereich G^2,

welcher das Abbild von G^1 ist. Ebenso ist H^2 das Bild von H^1. Ersetzt man jetzt im System C den Schnittzykel s zusammen mit den Zykelpaaren (σ_1, σ_2), (σ_1', σ_2'), (σ_1'', σ_2''), ..., durch den aus β_1 und β_2 gebildeten Schnittzykel, so erhält man ein minimales halbierendes Schnittsystem $\overline{C}$, welches F zerlegt in die bei der Abbildung ineinander übergehenden Teile $\overline{F}^1 = H^1 + G^2$ und $\overline{F}^2 = H^2 + G^1$. Falls C keine Schnittzykel enthält, benutze man an Stelle von s ein Zykelpaar (σ_1, σ_2). Eine analoge Konstruktion ergibt dann die Reduktion von C auf ein System $\overline{C}$, welches aus einem einzigen Zykelpaar $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ besteht. Hiermit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Enthält die Abbildung $v = 2w$ Fixpunkte, so besteht das minimale Schnittsystem aus w Schnittzykeln. Enthält sie keinen Fixpunkt, so besteht das minimale System aus einem Zykelpaar. Gestützt darauf ergibt sich der Beweis von Satz 6 folgendermaßen. Seien $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ zwei Involutionen von F, welche dieselbe Zahl von Fixpunkten besitzen und C, C' zwei zugehörige minimale Schnittsysteme. C zerlegt F in F^1 und F^2, ebenso C' in $F^{1'}$ und $F^{2'}$. Man sieht unmittelbar ein, daß sich der von den Zykeln aus C berandete Bereich F^1 derart topologisch auf den von Zykeln aus C' berandeten Bereich $F^{1'}$ abbilden läßt, daß die durch $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ auf den Rändern von F^1 und $F^{1'}$ vorgeschriebenen Zuordnungen erfüllt sind. Diese Abbildung kann folgendermaßen zu einer die Involutionen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ ineinander überführenden Abbildung der ganzen Fläche F in sich erweitert werden: Sei P_2 irgend ein Punkt aus F^2 und P_1 das durch $\mathfrak{J}$ aus P_2 erzeugte Bild, welches also in F^1 liegt. Sei weiter P_1' das durch die Abbildung $F^1 \longleftrightarrow F^{1'}$ in $F^{1'}$ erzeugte Bild von P_1. Wir üben auf P_1' die Involution $\mathfrak{J}'$ aus. P_1' geht dabei über in den Punkt P_2' von F_2'. Wir definieren nun die Erweiterung der Abbildung $F^1 \longleftrightarrow F^{1'}$. indem wir dem Punkte P_2 von F^2 das Bild P_2' in F_2' zuordnen. Damit ist eine topologische Abbildung von F in sich erklärt, welche $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{J}'$ überführt. Satz 6 ist somit bewiesen.

b) Indikatrixumkehrende Involutionen zweiseitiger Flächen.

$F = F_2$ ergibt $z = 2p_2$. Die Modulfläche kann einseitig oder zweiseitig sein. Wir nehmen voraus:

b_1) $\Phi = \Phi_2$. Dies bedingt $\pi_1 = 0$, $\varrho \neq 0$, $\zeta = 2\pi_2 + \varrho$. Da aus $VS = T^2 = 1$ folgen würde $F = F_1$, kann V nicht realisiert sein. Somit gilt $v = 0$. Nun erhalten wir aus Gleichung (1)

$$(1'') \qquad \begin{aligned} 2p_2 + 2 &= 4\pi_2 + 2\varrho \\ p_2 + 1 &= 2\pi_2 + \varrho. \end{aligned}$$

Da $\varrho \neq 0$ ist, haben wir noch die Gleichung (2) zu berücksichtigen. Man sieht aber sofort ein, daß auch alle $r_i = 0$ sein müssen. Wäre nämlich $r_i = 1$, so ergäbe sich aus $R_i S = T^2 = 1$ wiederum $F = F_1$.

b$_2$) $\Phi = \Phi_1$. Es gilt $\pi_2 = 0$; $\pi_1 \neq 0$; $\zeta = \pi_1 + \varrho$. Man sieht wiederum leicht ein, daß sowohl v wie auch alle r_i Null sein müssen, weil sonst $F = F_1$ folgen würde. Wir erhalten aus (1):

$$(1''') \qquad p_2 + 1 = \pi_2 + \varrho.$$

Eine Faltungslinie bedeutet für die Involution eine einfache geschlossene Kurve, welche aus lauter Fixpunkten besteht und die wir der Kürze halber *Fixzykel* nennen. Die Gleichungen (1'') und (1''') ergeben den

Satz 7: Die Anzahl der Fixzykel einer indikatrixumkehrenden Involution ist gleich einem der Werte 0, 1, 2, ..., $p + 1$, wo p das Geschlecht der Fläche bedeutet.

Um die Bedingungen der topologischen Aequivalenz zu umschreiben, reicht die Anzahl der Fixzykel nicht aus. Doch gelingt es wiederum, die Frage auf Grund eines minimalen halbierenden Schnitt-Systems zu entscheiden. Zur bequemen Formulierung ist es nützlich, noch einen weitern Begriff durch eine besondere Benennung herauszuheben: Ein die Fläche nicht zerlegender Rückkehrschnitt σ, welcher mit Erhaltung des Umlaufsinnes in sich übergeht, aber nicht fest bleibt, soll ein *Drehzykel* genannt werden. Da auf der Fläche die Indikatrix umgekehrt wird, werden seine Ufer bei der Abbildung mit einander vertauscht. Nun kann man durch Schlüsse, die im wesentlichen den unter a) ausgeführten analog sind, zeigen, daß immer die Involution halbierende Schnittsysteme existieren. Als Elemente solcher Schnittsysteme kommen in Betracht Fixzykel, Drehzykel und Zykelpaare. Auch hier ist wiederum eine Reduktion auf minimale Schnittsysteme möglich. Dabei ist aber zu beachten, daß bei der Durchführung dieser Reduktion die Fixzykel nicht verwendet werden können. Die Rolle, welche früher die Schnittzykel inne hatten, übernehmen jetzt die Drehzykel. Indem man beachtet, daß es immer möglich ist, zwei Drehzykel durch ein Zykelpaar zu ersetzen, ergibt sich

Satz 8: Zu einer indikatrixumkehrenden Involution einer zweiseitigen geschlossenen Fläche existiert immer ein minimales halbierendes Schnittsystem, welches neben eventuell vorhandenen Fixzykeln entweder noch einen Drehzykel oder ein Zykelpaar enthalten kann.

Ebenso ergibt sich durch analoge Schlüsse wie früher

Satz 9: Zwei indikatrixumkehrende Involutionen einer zweiseitigen geschlossenen Fläche sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie in den minimalen halbierenden Schnittsystemen übereinstimmen.

c) Die Involutionen der einseitigen Flächen.

Es gilt $F = F_1$ und somit $z = p_1$. Wir beginnen wieder mit dem Fall c_1): $\Phi = \Phi_2$, d. h. $\pi_1 = 0$. Damit $F = F_1$ erfüllt ist, muß mindestens entweder ein Fixpunkt (Verzweigungspunkt) vorhanden sein, oder eine der Grössen r_i muß von Null verschieden sein ($R_i = T^{r_i}$). Gleichung 1) liefert:

$$(1^{IV}) \qquad p_1 + 2 = 4\pi_2 + 2\varrho + v.$$

Weiter wird aber nun Gleichung (2) von Wichtigkeit, welche im Falle der zweiseitigen Flächen entweder von selbst erfüllt war oder aus (1) folgte. Wir teilen die Ränder in zwei Gruppen ein, je nachdem $r_i = 0$ oder $= 1$ ist. Das ist gleichbedeutend mit der Einteilung sämtlicher Fixzykel in zweiufrige und einufrige, deren respektive Anzahlen mit ϱ_2 und ϱ_1 bezeichnet werden sollen. Dann gilt natürlich $\varrho = \varrho_2 + \varrho_1$ und Gleichung (2) geht über in

$$(2^{I}) \qquad v + \varrho_1 \equiv 0 \pmod{2}$$

Nun führen wir auch in (1) statt ϱ die Summe $\varrho_2 + \varrho_1$ ein und erhalten

$$1^{V}) \qquad p_1 + 2 = 4\pi_2 + 2\varrho_2 + 2\varrho_1 + v.$$

c_2): $\Phi = \Phi_1$, d. h. $\pi_2 = 0$. Damit $F = F_1$ erfüllt ist, muß mindestens entweder $\varrho_1 + v \neq 0$, oder $\pi_1 \neq 0$ und $\varrho_2 \neq 0$, oder schließlich $\pi_1 \neq 0$ und eine der Größen $a_i = 0$ sein ($A_i = T^{a_i}$).

An Stelle von (1) erhalten wir

$$(1^{VI}) \qquad p_1 + 2 = 2\pi_1 + 2\varrho_2 + 2\varrho_1 + v$$

während Gleichung (2′) unverändert Gültigkeit hat.

Die Gleichungen (2′), (1^{V}) und (1^{VI}) zusammen mit den einschränkenden Bedingungen ergeben den

Satz 10: Bezeichnen wir die Anzahlen der zweiufrigen Fixzykel, der einufrigen Fixzykel und der Fixpunkte respektive mit ϱ_2, ϱ_1 und v, so können diese Anzahlen durch eine Involution einer einseitigen geschlossenen

Fläche vom Geschlecht p immer dann und nur dann realisiert werden, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$0 \leqq 2\varrho_2 + 2\varrho_1 + v \leqq p + 2$$
$$\varrho_1 \equiv p \pmod{2}$$
$$v \equiv p \pmod{2}$$

auszuschliessen sind dabei für $p \equiv 0$ (mod. 2) nur die zwei Fälle $\varrho_1 = v = 0$, $\varrho_2 = p/2 + 1$ und $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$, $v = p + 2$.

Auch hier läßt sich auf Grund eines minimalen halbierenden Systems die Frage der topologischen Aequivalenz erledigen. Die dazu notwendigen Ueberlegungen stimmen im Wesentlichen mit dem Frühern überein. Doch ist die Analogie nicht ganz auf der Hand liegend. Die wichtigsten Punkte sollen deshalb hier erörtert werden. Wir übernehmen die Bezeichnungsart der verschiedenen Zykel. Dabei muß immer zwischen Einufrigkeit und Zweiufrigkeit unterschieden werden. Wir erhalten so einufrige und zweiufrige Fixzykel, die übrigens schon oben erklärt worden sind. Unter einem Schnittzykel verstehen wir wieder einen *zweiufrigen* Zykel, welcher mit Umkehrung des Umlaufsinns in sich übergeht, somit zwei Fixpunkte trägt, und *überdies seine Ufer vertauscht.* Die letztere Voraussetzung muß, im Gegensatz zum Fall der zweiseitigen Flächen, ausdrücklich hinzugefügt werden. Ebenso verstehen wir unter einem Drehzykel einen zweiufrigen Zykel, welcher mit Erhaltung des Umlaufsinns aber nicht identisch in sich übergeht und *seine Ufer vertauscht.*

Was nun diejenigen einufrigen Zykel betrifft, welche bei der Involution invariant bleiben, so erkennt man, daß folgende zwei Fälle in Betracht kommen: Der Zykel wird mit Erhaltung des Umlaufsinns und dann notwendig identisch in sich transformiert, stellt also einen einufrigen Fixzykel dar. Oder aber der Zykel wird mit Umkehrung seines Umlaufsinns und dann notwendig mit zwei Fixpunkten in sich transformiert. In diesem Falle wird die Umgebung des einen Fixpunktes mit Erhaltung der Indikatrix in sich übergeführt, während in der Umgebung des andern Fixpunktes die Indikatrix umgekehrt wird. Im letztern Fixpunkte wird daher der Zykel von einem Fixzykel überkreuzt. Wir sprechen von einem *einufrigen Schnittzykel.*

Schließlich ist noch zu unterscheiden zwischen einufrigen und zweiufrigen Zykelpaaren.

Um die Zusammensetzung der halbierenden Schnittsysteme festzustellen, beginnen wir mit demjenigen Falle, welcher keine Reduktion auf niedrigeres Geschlecht gestattet. Dieser Fall tritt offenbar dann und nur dann

ein, wenn $\Phi = \Phi_2$ und $\pi_2 = 0$ ist, d. h. wenn die Modulfläche eine schlichtartige, eventuell mehrfach berandete Fläche darstellt. Die vom Punkte O ausgehende Zerschneidung von Φ wählen wir insbesondere so, daß in zyklischer Anordnung aufeinander folgen:

1. Die Schnittlinien nach den Verzweigungspunkten;

2. Die Schnittlinien nach denjenigen Rändern, welchen auf F einufrige Fixzykel entsprechen und

3. Die Schnittlinien nach den übrigen Rändern, welchen also auf F zweiufrige Fixzykel entsprechen.

Wir fassen nun, ausgehend vom ersten Verzweigungspunkt in der angegebenen Reihenfolge die Verzweigungspunkte und die einufrigen Fixzykel zu Paaren zusammen. Dies ist immer möglich, zufolge der Gleichung (2'). Die Elemente jedes Paares verbinden wir durch einen einfachen Bogen auf Φ derart, daß irgend zwei dieser Bögen einander nicht treffen und überdies kein Bogen eine Verzweigungslinie trifft. Außerdem soll jeder dieser Bögen im Innern von Φ verlaufen, abgesehen von denjenigen Endpunkten, welche nach Konstruktion auf einem Rande liegen. Das so erhaltene Liniensystem kann also folgende drei Arten von Elementen enthalten:

1. Einfache Bögen, deren Endpunkte Verzweigungspunkte sind.

2. Einen einfachen Bogen, dessen einer Endpunkt ein Verzweigungspunkt ist, während der andere auf einem Rande liegt, welchem auf F ein einufriger Fixzykel entspricht.

3. Einfache Bögen, deren Endpunkte auf Rändern liegen, denen auf F wiederum einufrige Fixzykel entsprechen.

Diesem System fügen wir noch hinzu:

4. Die übrigen (unverbundenen) Ränder, denen also auf F zweiufrige Fixzykel entsprechen.

Man sieht nun ohne weiteres, daß das Ueberlagerungsgebilde dieses aus den Elementen 1, 2, 3 und 4 bestehenden Liniensystems ein die Involution halbierendes Schnittsystem ist, welches überdies durch die Zahlen v, ϱ_1 und ϱ_2 eindeutig festgelegt wird. Die Elemente dieses Schnittsystems sind die Ueberlagerungsgebilde der Elemente 1, 2, 3 und 4. Die Ueberlagerungsgebilde der Elemente 1 und 4 sind Schnittzykel respektive zweiufrige Fixzykel. Das Ueberlagerungsgebilde eines Elementes 2 setzt sich zusammen aus einem einufrigen Fixzykel und einem einufrigen Schnittzykel, welche sich genau einmal überkreuzen: Es soll deshalb ein *Zykelkreuz* genannt werden. Das Ueberlagerungsgebilde eines Elementes 3 setzt sich zusammen aus zwei einufrigen Fixzykeln und einem invarianten Zykel mit zwei Fixpunkten, dessen Ufer in sich übergehen. Dieser

Zykel ist also nicht als Schnittzykel zu bezeichnen. Er überkreuzt jeden der beiden Fixzykel genau einmal an den Stellen, wo er seine Fixpunkte hat. Dieses Gebilde soll *Doppel-Zykelkreuz* genannt werden. Es besitzt als Ganzes genommen zwei Ufer, welche bei der Involution vertauscht werden.

Wir gehen nun über zu den Fällen, wo die Modulfläche nicht schlichtartig ist und behaupten die Gültigkeit von

Satz 11: Auf einer involutorisch in sich transformierten einseitigen geschlossenen Fläche existieren immer minimale halbierende Schnittsysteme, welche hinsichtlich ihrer Konstitution folgende zwei Typen aufweisen können:

1. Das Schnittsystem enthält neben eventuell vorhandenen zweiufrigen Fixzykeln, Doppel-Zykelkreuzen und Schnittzykeln höchstens ein Zykelkreuz.

2. Das Schnittsystem enthält neben eventuell vorhandenen zweiufrigen Fixzykeln höchstens entweder einen Drehzykel oder ein zweiufriges Zykelpaar.

Durch die oben ausgeführten Betrachtungen ist der vorstehende Satz bewiesen für den Fall, daß die Modulfläche schlichtartig ist. Das Schnittsystem fällt unter den Typus 1.

Der Beweis für nichtschlichtartige Modulflächen wird geführt unter Voraussetzung von Satz 11 für Flächen, welche niedrigeres Geschlecht haben als die zu untersuchende Fläche F und zerfällt naturgemäß in zwei Hauptteile. In einem ersten Reduktionsverfahren, welches wesentlich Gebrauch macht von der Darstellung der transformierten Fläche F als Ueberlagerungsfläche der Modulfläche Φ wird gezeigt, daß auf F immer halbierende Schnittsysteme existieren, welche aber noch nicht von minimalem Typus zu sein brauchen. Durch ein zweites Reduktionsverfahren, welches sich wesentlich auf F allein abspielt, werden die gewonnenen halbierenden Schnittsysteme in minimale übergeführt.

Wir beginnen also mit dem ersten Reduktionsverfahren und unterscheiden wieder die beiden Hauptfälle $\Phi = \Phi_2$ und $\Phi = \Phi_1$.

α) $\Phi = \Phi_2$: Wir schneiden die Modulfläche längs der von O ausgehenden konjugierten Rückkehrschnittpaare $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots a_\pi, b_\pi$ auf. Das einzelne Rückkehrschnittpaar a_i, b_i zerfällt dabei in eine Kette von vier Bögen, welche wir der Einfachheit halber, so wie sie auf einander folgen, mit $a_i, b_i, a_i^{-1}, b_i^{-1}$ bezeichnen. Die Bögen a_i und $a^{i^{-1}}$ sind also die beiden Ufer des soeben mit a_i bezeichneten Rückkehrschnitts und das analoge gilt für b_i und b_i^{-1}. a_i und a_i^{-1} sowie b_i und

b_i^{-1} sind in Bezug auf die entstehende schlichtartige Fläche Φ_2 mit umgekehrter Indikatrix zu identifizieren. Wir bemerken jetzt ausdrücklich, daß die Zerschneidung nicht weitergeführt werden soll und unter dieser Bedingung können wir $\overline{\Phi}_2$ auffassen als eine Kreisscheibe, deren Rand von der Kette der kanonischen Bögen gebildet wird, welche aber in ihrem Innern die auf Φ_2 vorhandenen Verzweigungspunkte und Ränder (Löcher) aufweist. An einem derartigen Modell kann man die in Betracht kommenden Möglichkeiten ebenso bequem ablesen, wie an der vollständig zerschnittenen Modulfläche.

Sei nun P ein von O verschiedener Punkt des Bogens a_i oder b_i, so bezeichnen wir mit P^{-1} den mit P zu identifizierenden Punkt des Bogens a_i^{-1} respektive b_i^{-1}. Den Uebergängen über a_i und b_i respektive a_i^{-1} b_i^{-1} entsprechen in der früheren Bezeichnungsweise die Substitutionen A_i, B_i respektive A_i^{-1}, B_i^{-1}.

Wir diskutieren nun folgende Unterfälle:

α_1) Unter den Operatoren $A_1, B_1, \ldots A_{\pi_2}, B_{\pi_2}$ ist einer gleich der Einheit, etwa $A_i = 1$. Wir verbinden den von O verschiedenen Punkt P von a_i mit P^{-1} auf a_i^{-1} vermittelst eines im Innern von $\overline{\Phi}_2$ verlaufenden Bogens σ, welcher keine Verzweigungslinie trifft. σ stellt auf Φ_2 einen nicht zerlegenden Rückkehrschnitt dar. Sein Ueberlagerungsgebilde besteht zufolge $A_i = 1$ aus einem zweiufrigen Zykelpaar (σ_1, σ_2). Wegen $F = F_1$ (F_1 und F_2 bedeuten nach früherer Abrede einseitiges respektive zweiseitiges F) und $\Phi = \Phi_2$ muß $\varrho + v \neq 0$ sein. Nun überzeugt man sich leicht, daß (σ_1, σ_2) die Ueberlagerungsfläche nicht zerlegt. Wir schneiden jetzt F längs σ_1 und σ_2 auf. Dem zweiufrigen σ_1 entsprechen auf der zerschnittenen Fläche F' zwei Ränder σ_1^1 und σ_1^2 und ebenso zerfällt σ_2 in σ_2^1 und σ_2^2. F' ist von niedrigerem Geschlecht als F und besitzt somit nach Satz 11 ein minimales Schnittsystem, von dem wir ohne weiteres annehmen können, daß es die vier Ränder nicht trifft. Läßt dieses Schnittsystem σ_1^1 und σ_2^1 auf derselben Seite, so bildet es auch ein minimales Schnittsystem für unzerschnittene Fläche F. Andernfalls erhält man ein halbierendes Schnittsystem für F, wenn man dem minimalen Schnittsystem von F' das Zykelpaar (σ_1, σ_2) beifügt.

α_2) $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = \ldots = A_{\pi_2} = B_{\pi_2} = T$. Wir verbinden den von O verschiedenen Punkt P von a_1 mit einem ebenfalls von O verschiedenen Punkt Q von b_1 vermittels eines Bogens ω im Innern von $\overline{\Phi}_2$, welcher wiederum keine Verzweigungslinie trifft. Hierauf verbinden wir Q^{-1} auf b_1^{-1} mit P^{-1} auf a_1^{-1} vermittels eines ebensolchen Bogens

τ, welcher überdies ω nicht trifft. Die Linie $\sigma = \omega + \tau$ bildet einen Φ_2 nicht zerlegenden Rückkehrschnitt. Wegen $A_1 B_1 = T^2 = 1$ ist das Ueberlagerungsgebilde von σ wieder ein zweiufriges Zykelpaar, welches aus schon unter α_1) angegebenen Gründen F nicht zerlegt. Auf genau dieselbe Weise ergibt sich nun ferner die Existenz eines halbierenden Schnittsystems für F, welches wiederum gegenüber einem minimalen System ein überschüssiges zweiufriges Zykelpaar enthalten kann.

Wir gehen nun über zu

β) $\Phi = \Phi_1$: Durch eine der unter α) angegebenen analogen Zerschneidungen erhalten wir eine schlichtartige Fläche $\overline{\Phi}_1$, deren Hauptrand von den aufeinander folgenden kanonischen Bögen $a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-2}, \ldots$ $\ldots a_{\pi_1}, a_{\pi_1}^{-1}$ gebildet wird. Hier sind a_i und a_i^{-1} in Bezug auf $\overline{\Phi}_1$ mit gleicher Indikatrix zu identifizieren und wiederum entsprechend den Uebergängen über die kanonischen Randbögen, die schon früher eingeführten Substitutionen $A_1, A_1^{-1}, \ldots A_{\pi_1}, A_{\pi_1}^{-1}$. Ueber die Bedeutung der Bezeichnungen P und P^{-1} soll wieder die bei α) getroffene Verabredung gelten.

Es ergeben sich drei Unterfälle:

β_1) Eine der Operationen $A_1, A_2, \ldots A_{\pi_1}$ stellt die Einheit dar, etwa $A_i = 1$. Wir verbinden den von O verschiedenen Punkt P von a_i mit P^{-1} auf a_i^{-1} vermittelst eines Bogens σ, welcher die gleichen Eigenschaften besitzt, wie der unter α_1) angegebene Bogen σ. Sein Ueberlagerungsgebilde ist zufolge $A_i = 1$ ein einufriges Zykelpaar (σ_1, σ_2), welches schon dem Begriff nach F nicht zerlegen kann. Wir schneiden F längs (σ_1, σ_2) auf. Falls die zerschnittene Fläche F' wieder einseitig ist, so existiert nach Satz 11 ein minimales Schnittsystem, von dem man unmittelbar einsieht, daß es auch ein minimales System für F darstellt. Ist hingegen F' zweiseitig, so unterliegt es einer Involution, welche je nach dem die Indikatrix erhält oder umkehrt. Nun erkennt man aber aus den früher gewonnenen Resultaten, daß die dabei sich ergebenden minimalen Schnittsysteme unter den nach Satz 11 zu fordernden enthalten sind. Wir erhalten somit wiederum ein minimales Schnittsystem für F,

$$\beta_2) \qquad \pi > 1 \; ; \; A_1 = A_2 = \ldots = A_{\pi_1} = T$$

Wir verbinden in analoger Weise wie bei α_2) den von O verschiedenen Punkt P von a_1 vermittelst des Bogens ω mit dem von O verschiedenen

Punkte Q^{-1} von a_2^{-1} und hierauf Q auf a_2 vermistels τ mit P^{-1} auf a_1^{-1}. Die Linie $\sigma = \omega + \tau$ ist ein nicht zerlegender zweiufriger Rückkehrschnitt auf Φ_1. Wegen $A_1 A_2 = T^2 = 1$ besteht das Ueberlagerungsgebilde aus einem zweiufrigen Zykelpaar (σ_1, σ_2). Damit $F = F_1$ erfüllt ist, muß $\varrho_1 + v = 0$ sein. Daraus folgt, daß das Zykelpaar (σ_1, σ_2) die Fläche F nicht zerlegt. Man erkennt wiederum die Existenz eines halbierenden Schnittsystems auf F, welches gegenüber einem minimalen Schnittsystem das überschüssige Zykelpaar (σ_1, σ_2) enthält.

β_3) $\pi_1 = 1$; $A_1 = T$. Wir verbinden P auf a_1 mit P^{-1} auf a_1^{-1} vermittels σ_0. Zufolge $A_1 = T$ ist das Ueberlagerungsgebilde von σ_0 ein zweiufriger Zykel σ, welcher mit vertauschten Ufern aber nicht identisch in sich übergeht, somit einen Drehzykel darstellt. Wiederum folgt aus $A_1 = T$ und $F = F_1$ die Bedingung $\varrho_1 + v \neq 0$ und hieraus, daß σ die Fläche F nicht zerlegt. Wir zerschneiden F längs σ und erhalten auf der zerschnittenen Fläche F' die beiden Ränder $\overset{1}{\sigma}$ und $\overset{2}{\sigma}$, welche einander involutorisch zugeordnet sind, da die Ufer von σ vertauscht werden. $\overset{1}{\sigma}$ und $\overset{2}{\sigma}$ werden daher durch das minimale Schnittsystem von F' von einander getrennt und man erkennt die Existenz eines halbierenden Systems auf F, welches den überschüssigen Drehzykel σ enthält.

Damit ist die erste Reduktion erledigt und man erhält zusammenfassend das Resultat, daß auf jeder involutorisch in sich transformierten einseitigen geschlossenen Fläche F ein halbierendes Schnittsystem existiert, welches sich von einem minimalen Schnittsystem höchstens um ein überschüssiges zweiufriges Zykelpaar oder einen überschüssigen Drehzykel unterscheidet.

In welchem Sinne die zweite Reduktion zu erfolgen hat, erläutern wir am bequemsten an einem bestimmten Falle. Wir nehmen an, es liege ein halbierendes Schnittsystem vor, welches unter andern Elementen eine Doppel-Zykelkreuz enthalte und außerdem ein überschüssiges zweiufriges Zykelpaar. Dann gilt folgende Tatsache: Es ist möglich, durch eine passende Abänderung das Zykelpaar wegzuschaffen derart, daß am Schlusse der Abänderung ein halbierendes Schnittsystem vorliegt, welches an Stelle des ursprünglichen Doppel-Zykelkreuzes ein abgeändertes Doppel-Zykelkreuz, hingegen kein Zykelpaar mehr enthält. Das neue Schnittsystem ist dann ein minimales. Wir drücken diese Tatsache kurz so aus: Ein Doppel-Zykelkreuz kann ein zweiufriges Zykelpaar *absorbieren*. In gleichem Sinne ist ein Zykelkreuz oder ein Schnittzykel oder schließlich ein Drehzykel imstande, ein zweiufriges Zykelpaar zu absorbieren.

Ebenso kann ein überschüssiger Drehzykel von einem Doppel-Zykelkreuz einem Zykelkreuz oder einem Schnittzykel absorbiert werden. Hingegen kann ein Drehzykel von einem Drehzykel nicht absorbiert werden. Abgesehen von der letzten Aussage können alle diese Behauptungen durch analoge Konstruktionen sichergestellt werden. Ich greife deshalb nur den am wenigsten leicht zu übersehenden Fall heraus. Dieser ergibt sich, wenn ein Doppel-Zykelkreuz mit einem überschüssigen Drehzykel zusammentrifft.

Seien δ_1 und δ_2 zwei ineinander übergehende Bögen des Drehzykels, welche in den ebenfalls ineinander übergehenden Punkten D_1 und D_2 zusammenhängen. Die Konstruktion geht aus vom mittleren Zykel des Doppel-Zykelkreuzes. Dieser Zykel zerfällt durch seine zwei Fixpunkte P und Q in zwei ineinander übergehende Bögen σ_1 und σ_2. Mit F^1 und F^2 bezeichnen wir wieder die ineinander übergehenden Hälften der Fläche F. Nun verbinden wir den Punkt P mit D_1 vermittels eines Bogens α_1, welcher abgesehen von seinen Endpunkten ganz innerhalb F^1 verläuft, und ebenso den Punkt Q mit D_2 vermittels eines Bogens β_1 innerhalb F^1 derart, daß die Bögen α_1, σ_1, β_1, δ_1 zusammen ein einfach zusammenhängendes Gebiet G^1 auf F^1 abgrenzen. Mit H^1 bezeichnen wir das durch G^1 innerhalb F^1 bestimmte Restgebiet. Bei der Involution geht G^1 über in ein Gebiet G^2 von F^2, welches von den Bögen α_2, σ_2, β_2, δ_2 begrenzt wird, und sein Restgebiet H^2 ist das Bild von H^1. Unterdrückt man nun die beiden Bögen σ_1 und δ_1, so verschmilzt G^1 mit H^1. Ebenso vereinigen sich G^2 und H^2 durch Aufheben der Bilder σ_2 und δ_2 von σ_1 und δ_1. Die Gebiete $G^1 + H^2$ und $G^2 + H^1$ sind von einander getrennt durch ein Schnittsystem, welches sich von den ursprünglichen dadurch unterscheidet, daß σ_1, σ_2, δ_1, δ_2 ersetzt sind durch α_1, β_1, α_2, β_2. Die Bögen α_1, β_1, α_2, β_2 bilden aber zusammen mit den Fixzykeln des ursprünglichen Doppel-Zykelkreuzes ein neues Doppel-Zykelkreuz. Man sieht nämlich unmittelbar, daß die Linie $\alpha_1 + \beta_2 + \alpha_2 + \beta_1$ mit zwei Fixpunkten in sich übergeht. Da aber das ganze Gebilde dem zerlegenden System angehört, so besitzt es notwendig zwei Ufer, welche bei der Involution miteinander vertauscht werden. Hieraus folgt wiederum, daß die Linie $\alpha_1 + \beta_2 + \alpha_2 + \beta_1$ zweiufrig ist und mit invarianten Ufern in sich übergeht. Hiermit ist die verlangte Reduktion auf ein minimales Schnittsystem vollzogen.

Nun bleibt nur noch der Fall zu erledigen, daß ein überschüssiger Drehzykel zu einem Schnittsystem hinzutritt, welches schon einen Drehzykel aufweist. Seien γ_1 und γ_2 zwei ineinander übergehende Bögen des einen Drehzykels, welche begrenzt werden durch die zwei ineinander

übergehenden Punkte C_1 und C_2. Für den andern Drehzykel übernehmen wir in analogem Sinne die schon oben gebrauchten Bezeichnungen δ_1, δ_2, D_1, D_2. Nun übertrage man die oben angegebene Konstruktion wörtlich, indem man an Stelle von P und Q die Punkte C_1 und C_2 und an Stelle der Bögen σ_1 und σ_2 die Bögen γ_1 und γ_2 treten läßt. Der wesentliche Unterschied gegenüber oben besteht darin, daß die Punkte C_1 und C_2 nicht mehr fest sind, sondern mit einander vertauscht werden.

Es ergibt sich, daß die zwei Drehzykel in ein zweiufriges Zykelpaar verwandelt werden. Die Konstruktion läßt sich in umgekehrter Richtung ausführen und liefert dann aus einem zweiufrigen Zykelpaar zwei Drehzykel. Wir haben somit das Resultat, daß zwei Drehzykel und ein zweiufriges Zykelpaar als Elemente eines halbierenden Schnittsystemes mit einander äquivalent sind. Satz 11 ist damit vollständig bewiesen.

Wie in den früher behandelten Hauptfällen behaupten wir nun auch für einseitige Flächen die Gültigkeit des folgenden Aequivalenzsatzes:

Satz 12: Zwei Involutionen einer einseitigen geschlossenen Fläche sind dann und nur dann topologisch äquivalent, wenn sie in den sie halbierenden minimalen Schnittsystemen übereinstimmen.

Der positive Teil des Satzes, nämlich daß zwei Involutionen äquivalent sind, wenn sie in den minimalen Schnittsystemen übereinstimmen, kann ganz analog erledigt werden wie die Aequivalenz der Indikatrix erhaltenden Involutionen zweiseitiger Flächen. Daß hingegen zwei Involutionen mit verschiedenen minimalen Schnittsystemen wirklich verschieden sind, bedarf in einem Falle einer besondern Ueberlegung. Die Verschiedenheit der Involutionen erkennt man ohne weiteres, wenn eine der beiden Involutionen ein minimales Schnittsystem vom Typus 1. hat. Dies beruht darauf, daß dieser Typus von minimalen Schnittsystemen durch die Anzahlen der verschiedenen invarianten Elemente bestimmt ist. Gerade dies ist aber bei den Schnittsystemen vom Typus 2. nicht mehr der Fall. Für eine Involution auf einer Fläche kommen hier bei vorgegebener Zahl ϱ_2 von zweiufrigen Fixzykeln drei Möglichkeiten in Betracht, welche wir der Reihe nach mit 2_1), 2_2) und 2_3) bezeichnen wollen.

2_1). Das minimale Schnittsystem wird durch die zweiufrigen Fixzykel erschöpft.

2_2). Es enthält neben diesen Elementen einen Drehzykel.

2_3). Es enthält neben den ϱ_2 Fixzykeln ein zweiufriges Zykelpaar.

Daß 2_2) nicht mit 2_1) äquivalent sein kann, folgt unmittelbar daraus, daß 2_1) überhaupt keinen Drehzykel aufweisen kann. Das Gleiche gilt

von 2_1) und 2_3), da ein zweiufriges Zykelpaar nach dem vorausgehenden Beweis mit zwei Drehzykeln äquivalent ist. Es bleibt somit nur noch das Verhältnis von 2_2) und 2_3 zu untersuchen. Wir denken uns wieder das Zykelpaar durch zwei Drehzykel ersetzt und nehmen nun an, es bestehe Aequivalenz, d. h. es sei möglich, F derart topologisch auf sich selbst abzubilden, daß eine Involution $\overline{\mathcal{J}}$ vom Typus 2_3) in eine Involution $\mathcal{J}$ vom Typus 2_2) verwandelt wird. Durch diese Abbildung geht das zu $\overline{\mathcal{J}}$ gehörende minimale Schnittsystem in ein minimales System der Involution $\mathcal{J}$ über. Wir können uns also auch so ausdrücken, daß ein und dieselbe Involution $\mathcal{J}$ sowohl ein minimales System S vom Typus 2_2) als auch eines $\overline{S}$ vom Typus 2_3) zuläßt. Wir bezeichnen wie früher die durch S respektive $\overline{S}$ bestimmten Flächenhälften mit F^1 und F^2 respektive $\overline{F}^1$ und $\overline{F}^2$. Seien weiter σ respektive $\overline{\omega}$, $\overline{\tau}$ die zu S respektive $\overline{S}$ gehörenden Drehzykel. $\overline{\omega}$ und $\overline{\tau}$ müssen σ treffen und man kann durch unwesentliche Deformationen erreichen, daß die Zahl der auftretenden Schnittpunkte endlich ist. Da $\overline{\omega}$ und $\overline{\tau}$ geschlossene Linien sind und σ zu einem halbierenden System gehört, so trifft $\overline{\omega}$ respektive $\overline{\tau}$ den Zykel σ in einer geraden Anzahl von Punkten, welche mit $2m$ respektive $2n$ bezeichnet sei. Die $2m$ Schnittpunkte von $\overline{\omega}$ mit σ sind überdies auf Grund der Involution paarweise einander zugeordnet. Zufolge des Umstandes, daß Drehzykel ihre Ufer vertauschen, erhält man für die Zahlen m und n die Bedingungen $m \equiv 1 \pmod{2}$ und $n \equiv 1 \pmod{2}$, somit $m + n \equiv 0 \pmod{2}$. Wir erteilen nun σ einen Umlaufssinn und numerieren sämtliche Ueberkreuzungen in diesem Sinne durch, gleichgültig ob sie zu $\overline{\omega}$ oder $\overline{\tau}$ gehören. Unter dieser Bedingung erhält das Bild der Ueberkreuzung mit dem Index i den Index $m + n + i$. Mit σ_i bezeichnen wir den im Sinne der Durchlaufung auf die Kreuzung i folgenden Bogen, welcher also bis zur Kreuzung $i + 1$ führt. Wir können immer annehmen, daß σ_1 zu $\overline{F}^1$ gehört. Dann gehört σ_2 zu $\overline{F}_2$, σ_1 wieder zum $\overline{F}_1$ usw. Allgemein gehört $\sigma_{\mu+1}$ zu $\overline{F}^1$ oder $\overline{F}_2$, je nachdem $\mu \equiv 0 \pmod{2}$ oder $\equiv 1 \pmod{2}$ ist. Also gehört σ_{1+m+n} nach den obigen Bemerkungen zu $\overline{F}^1$. Anderseits ist aber σ_{1+m+n} das Bild von σ_1, gehört somit zu $\overline{F}^2$. Damit sind wir zu einem Widerspruch gelangt, welcher nur verschwindet, wenn die Typen 2_2) und 2_3) nicht als äquivalent angesehen werden.

Schlußbemerkung

Bei der Auswahl der Anwendungen waren folgende Gesichtspunkte maßgebend: Das Beispiel der Kugel und der projektiven Ebene soll an

einem allgemein bekannten und leicht kontrollierbaren Objekt den Hergang der Methode illustrieren. Die Anwendung auf die involutorischen Transformationen der ein- und zweiseitigen geschlossenen Flächen gibt Gelegenheit, die Verwendbarkeit der Methode an einem Beispiel zu demonstrieren, welches nicht durch Komplikationen rein gruppentheoretischer Natur beschwert ist. Die Ausführungen von § 6 enthalten unter anderm den vollständigen Beweis für eine Reihe von Sätzen, welche ich in einer frühern Arbeit[3]) als Behauptungen formuliert habe. Als nächstliegendes weiteres Beispiel wäre zu nennen die Aufzählung sämtlicher endlichen Gruppen der einseitigen und zweiseitigen Ringflächen. Als Resultat ergibt sich, daß dieses Problem vollständig äquivalent ist mit der Aufzählung sämtlicher invarianter Untergruppen der ebenen Kristallgruppen vom endlichen Index. Die zugehörigen Faktorgruppen und nur diese liefern Gruppen der gesuchten Art. Für die indikatrixerhaltenden Gruppen des Torus ist dieses Resultat von Brouwer[10]) gewonnen worden. Als weiteres Beispiel kommen in Betracht die periodischen Transformationen von Flächen, deren Geschlecht größer als 1 ist. Schon der Fall der Doppelringfläche zeigt, daß diese Aufzählungen umfangreich werden. Sie bieten aber keine wesentlich neue Schwierigkeit, da es sich um zyklische Gruppen handelt. Es ist zu erwarten, daß sich dabei ein rein topologischer Beweis des Wiman'schen Satzes über die maximale Ordnung der Periode ergibt.

Schließlich möchte ich noch bemerken, daß die Behandlung berandeter Flächen prinzipiell nichts neues erfordert. Man braucht nur in der Formel (H) Seite 13 für $z = 2p_2 + p_1 + r$ die Bedingung $r \neq 0$ zur Geltung zu bringen, wo also r die Anzahl der Ränder der transformierten Fläche bedeutet, und in entsprechender Weise die Ueberlagerungsbedingungen zu modifizieren.

Literatur

Sämtliche Voraussetzungen, welche zum Studium der vorliegenden Arbeit nötig sind, findet der Leser dargestellt und vollständig bewiesen in den «Vorlesungen über Topologie» Bd. I von B. v. Kerékjartó, Springer, Berlin 1923.

1. v. Kerékjartó, B.: Ueber die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche. Math. Ann. Bd. 80, S. 36-38, 1919.

2. Brouwer, L. E. J.: Ueber die periodischen Transformationen der Kugel. Math. Ann. Bd. 80, S. 39-41, 1919.

3. Scherrer, W.: Ueber topologische Involutionen. Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. Zürich, 70, S. 268-277, 1925.

4. Scherrer, W.: Ueber periodische Transformationen von Flächen. Vierteljahrsschrift d. Naturf. Ges. Zürich, 70, S. 278-281, 1925.

5. Hahn, H.: Mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurve, Sitzungsber. d. math. nat.-w. Kl. d. K. Ak, d. W. Wien, Bd. 123, S. 2433-2489, 1914.

6. Mazurkiewicz, S.: Sur les lignes de Jordan, Fund. Math., Bd. 1, S. 166-209, 1920.

7. Schönflies, A.: Bericht über die Entwicklung der Mengenlehre II Leipzig 1908.

8. Janiszewski: Comptes rendus, Paris 1910, p. 198.

9. Brouwer, L. E. J.: Ueber topologische Involutionen, Proc. Akad. Amsterdam, XXI, S. 1143-1145.

10. Brouwer, L. E. J.: Enumération des surfaces de Riemann régulières de genre un. Comptes rendus, t. 168, p. 677, 1919.

11. Wiman: Stockh. Bih. 21, p. 4, 1895.

(Eingegangen den 30. November 1928)