Zeitschrift: Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

Herausgeber: Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe

Band: 52 (1974)

Heft: 7

Artikel: Probabilité et temps moyen d'attente des réseaux de couplage à plusierus étages avec possibliré d'attente illimitée

Autor: Praz, Laurent

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-874766

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Probabilité et temps moyen d'attente des réseaux de couplage à plusieurs étages avec possibilité d'attente illimitée

Laurent PRAZ, Berne

621.395.31:621.395.34:519.21
654.15.027.1:519.21

Wartewahrscheinlichkeit und mittlere Wartezeit von Koppelnetzen mit mehreren Koppelstufen und unbegrenzte Wartemöglichkeit

Zusammenfassung. *Der Autor untersucht ein Koppelnetz mit einer oder mehreren Stufen, in dem kein Anruf zurückgewiesen wird, das heisst mit unbegrenzter Wartemöglichkeit. Die Anrufe, die nicht sofort erledigt werden können, warten bis zur Freigabe einer, in der Zeit ihres Eintreffens besetzt gefundenen Leitung. Es kann eine Zahl der Warteschlangen erreicht werden, die gleich der Anzahl der Koppelmultipel in der ersten Stufe ist. Der betrachtete Verkehr ist in einem stationären Zustand. Die Wahrscheinlichkeitsdichten des Erscheinens eines Anrufes oder des Verschwindens einer Belegung sind konstant.*

Résumé. *L'auteur examine un réseau de couplage à un ou plusieurs étages dans lequel aucun appel n'est rejeté, c'est-à-dire avec possibilité d'attente illimitée. Les appels qui ne peuvent pas être servis immédiatement attendent la libération d'une des lignes trouvées occupées au moment de leur apparition. On peut obtenir un nombre de files d'attente égal au nombre de multiples de couplage du premier étage. Le trafic considéré se trouve dans un état stationnaire. Les densités de probabilité d'apparition d'un appel et de disparition d'une occupation sont constantes.*

Probabilità e tempi medi d'attesa delle reti d'accoppiamento a diversi livelli con possibilità d'attesa illimitata

Riassunto. *L'autore esamina una rete d'accoppiamento ad uno o a diversi livelli, nella quale nessuna chiamata è respinta, cioè con possibilità d'attesa illimitata. Le chiamate che non possono essere liquidate tempestivamente aspettano fino alla liberazione di una linea, che, al momento dell'arrivo della chiamata, era stata trovata occupata. Il numero delle attese può raggiungere l'effettivo dei multipli d'accoppiamento del primo stadio. Il traffico considerato è in fase stazionaria. Le probabilità dell'arrivo di una chiamata o della liberazione di un circuito occupato sono costanti.*

1. Généralités

1.1 Introduction

Afin de réduire le nombre de points de couplage par liaison téléphonique, on utilise souvent des réseaux de connexion à plusieurs étages avec sélection conjuguée, ce qui revient à ne choisir un sélecteur libre dans un étage que si l'on est sûr de ne pas être bloqué ensuite à l'étage ou aux étages suivants. L'organe de commande doit donc pouvoir contrôler plusieurs étages à la fois. Cette technique relativement complexe permet d'obtenir une meilleure occupation des sélecteurs et d'écouler plus facilement les trafics dans le réseau de connexion.

Dans les systèmes téléphoniques, qui travaillent comme systèmes à attente, les appels qui ne peuvent pas être connectés immédiatement sont mis en attente. Ils sont desservis dès qu'il y a des chemins de liaison libres. Par contre, dans les systèmes à appels perdus, les appels qui ne peuvent pas être traités immédiatement sont rejetés.

L'article traite des réseaux de couplage à plusieurs étages avec possibilité d'attente illimitée. Pour résoudre les problèmes liés à ces systèmes, on emploie des méthodes approchées, car les solutions exactes s'avèrent compliquées et entraînent des calculs très longs.

1.2 Réseaux de couplage à plusieurs étages

Un réseau de couplage à plusieurs étages peut se présenter sous la forme illustrée par la *figure 1*.

1.3 Brassage

Des impératifs économiques et techniques peuvent conduire à l'introduction d'un certain brassage après un ou plusieurs étages de couplage. Par brassage il faut comprendre la façon de relier les entrées d'un réseau d'interconnexion à ses différentes sorties. Dans le cas d'un brassage idéal, avec n sorties et une accessibilité de k, on doit avoir g groupes d'accès partiel. Leur nombre est défini par la relation suivante:

$$g = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ (n-k+1)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\ \ldots\ldots\ k}$$

Pour le calcul de la probabilité d'état, «x lignes occupées», on doit connaître avec quelle probabilité un nouvel appel, dans un groupe d'accès partiel déterminé, ne trouve plus aucune sortie libre. Dans le cas d'un brassage idéal et de x sorties occupées, on a exactement $\binom{x}{k}$ groupes d'accès partiel bloqués. On peut donc définir la probabilité de blocage σ (x) de la façon suivante:

$$\sigma(x) = \frac{\binom{x}{k}}{\binom{n}{k}}$$

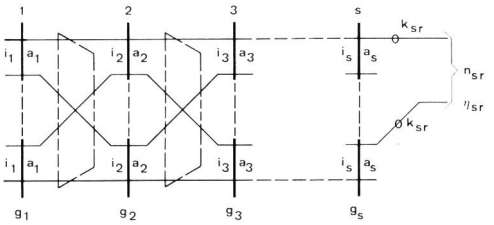

Fig. 1
Réseau de couplage à plusieurs étages

$i_1, i_2, \ldots i_s$	nombre d'entrées par multiple de couplage
$a_1, a_2, \ldots a_s$	nombre de sorties par multiple de couplage
$g_1, g_2, \ldots g_s$	nombre de multiples de couplage par étage
n_{sr}	nombre de lignes du faisceau r
k_{sr}	nombre de sorties par multiple de couplage de l'étage s, appartenant au faisceau r
η_{sr}	proportion de trafic appartenant à la direction r

Dans la pratique, on ne peut pas toujours obtenir un brassage idéal car bien souvent le nombre de groupes d'accès partiel nécessaire serait beaucoup trop élevé.

Pour les cas de brassage non idéal et d'une répartition homogène du trafic, on obtient, comme approximation, une probabilité de blocage qui prend la valeur suivante:

$$\sigma(x) = \frac{\binom{n-k}{x-k}}{\binom{n}{x}} = \frac{\binom{x}{k}}{\binom{n}{k}}$$

1.4 Description des réseaux de couplage avec attente

On considère un système à attente dans lequel aucun appel n'est rejeté. Les appels qui ne peuvent pas être servis immédiatement attendent la libération d'une des lignes trouvées occupées au moment de leur apparition. On peut ainsi obtenir g_1 queues d'attente parallèles *(fig. 2)*.

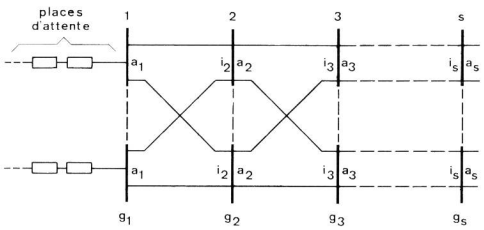

Fig. 2
Système à attente avec queues d'attente parallèles

$i_1, i_2, \ldots i_s$ nombre d'entrées par multiple de couplage
$a_1, a_2, \ldots a_s$ nombre de sorties par multiple de couplage
$g_1, g_2, \ldots g_s$ nombre de multiples de couplage par étage

1.5 Hypothèses de trafic

1. Le trafic considéré se trouve dans un état stationnaire. Les probabilités d'état d'un multiple de couplage sont indépendantes du temps. Cela revient à dire que le nombre moyen de lignes occupées dans l'espace de temps considéré ne varie pas.
2. La densité de probabilité d'apparition d'un appel est constante, indépendante du temps et du nombre d'appels momentanément en cours.
3. La densité de probabilité de disparition d'une occupation est constante. Cela nous amène à admettre une distribution exponentielle des durées d'occupations. D'après cette hypothèse, la probabilité pour une occupation d'avoir une durée supérieure à un temps t est exprimée par la fonction:

$$P(>t) = e^{-\frac{t}{t_m}}$$

t_m = durée moyenne d'une occupation

1.6 Réseau de couplage à un étage comme système à attente

Pour le cas d'un réseau de couplage à un étage avec accessibilité imparfaite, nous pouvons nous baser sur les résultats obtenus par *M. Thierer* [1, 2] qui a fait les hypothèses suivantes:

a) Le trafic offert A, au groupe de lignes, est un trafic de hasard.
b) Le brassage est idéal ou s'approche d'un brassage idéal.
c) Les appels qui rencontrent la congestion, c'est-à-dire qui trouvent les lignes du groupe occupées en totalité, attendent jusqu'à ce qu'il y ait possibilité de les acheminer.
d) Les durées d'occupation définissent une variable aléatoire de distribution exponentielle.

Pour calculer les différentes probabilités d'état, on ne considère dans le système que le nombre de places d'attente occupées.

[1] livre les résultats suivants:

1) probabilité d'avoir x sorties occupées, p (x)

$$p(x) = \frac{A^x \cdot \dfrac{\prod_{i=0}^{x-1}\left[1-\sigma(i)\right]}{\prod_{i=1}^{x}\left[i-\sigma(i)\cdot A\right]}}{1+\sum_{x=1}^{n} A^x \cdot \dfrac{\prod_{i=0}^{x-1}\left[1-\sigma(i)\right]}{\prod_{i=1}^{x}\left[i-\sigma(i)\cdot A\right]}}$$

σ (x) = probabilité de blocage pour l'état «x» lignes occupées

$$\sigma(x) = \frac{\binom{x}{k}}{\binom{n}{k}} = 1-\mu(x)$$

μ (x) = probabilité de passage
A = offre de trafic
k = accessibilité

2) probabilité d'attente W

$$W = \frac{\sum_{x=k}^{n} A^x \cdot \dfrac{\prod_{i=0}^{x-1}\left[1-\sigma(i)\right]}{\prod_{i=1}^{x}\left[i-\sigma(i)\cdot A\right]} \cdot \sigma(x)}{1+\sum_{x=1}^{n} A^x \cdot \dfrac{\prod_{i=0}^{x-1}\left[1-\sigma(i)\right]}{\prod_{i=1}^{x}\left[i-\sigma(i)\cdot A\right]}}$$

3) temps moyen d'attente τ_W

Il s'agit ici de l'attente moyenne des appels devant subir une attente, en prenant comme unité de temps la durée moyenne d'occupation.

$$\tau_W = \frac{\sum_{x=k}^{n}\left[p(x)\cdot\sum_{i=k}^{x}\frac{\sigma(i)\cdot A}{(1-\sigma(i)\cdot A)}\right]}{A\cdot\sum_{x=k}^{n} p(x)\cdot\sigma(x)}$$

2. Réseaux de couplage à deux étages et une direction

A partir des méthodes développées par *A. Lotze* [3, 4] pour les systèmes à appels perdus, on peut déduire une solution pour les systèmes à attente.

Cette méthode approchée peut aussi être utilisée pour des réseaux de couplage à plusieurs étages et desservant plusieurs directions (chapitre 3). Un réseau de couplage à deux étages et une seule direction est illustré par la *figure 3*.

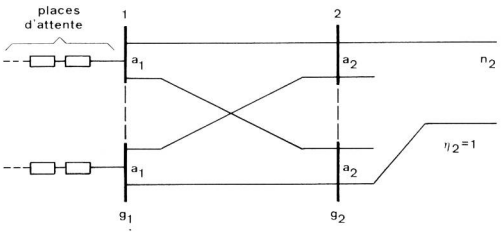

Fig. 3
Réseau de couplage à deux étages et une seule direction

a_1, a_2 nombre de sorties par multiple de couplage
g_1, g_2 nombre de multiples de couplage
n_2 nombre de lignes du faisceau considéré
η_2 proportion de trafic appartenant à la direction considérée

a) Probabilité d'attente W

La méthode consiste à répartir la probabilité d'attente totale en deux parties indépendantes; l'une due au blocage d'entrée et l'autre résultant du blocage de sortie dans une direction déterminée. Ces deux grandeurs sont définies de la façon suivante:

blocage d'entrée: probabilité que toutes les sorties a_1 du premier étage de couplage considéré soient occupées.

blocage de sortie: probabilité que les différentes sorties accessibles, du deuxième étage, soient bloquées.

L'hypothèse d'indépendance statistique des deux étages nous donne une fonction de distribution à l'étage d'entrée, égale à celle d'un système à attente avec accessibilité parfaite des a_1 sorties de l'étage. De ce fait la probabilité d'attente, due au blocage d'entrée, se calcule aisément grâce à la formule *d'Erlang*.

Nous obtenons en effet:

$E_{2,n}(A)$ = probabilité d'attente avec un faisceau à accessibilité parfaite ayant n lignes et un trafic offert A.

$$\triangle' = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots\ldots \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{A^n}{n!} \cdot \frac{n}{n-A}$$

$$E_{2,n}(A) = \frac{A^n}{n!} \cdot \frac{1}{\triangle'} \cdot \frac{n}{n-A}$$

On déduit ensuite:

$$E_{2,n}(A) = \frac{n \cdot E_{1,n}(A)}{n - A + A\,E_{1,n}(A)} = \frac{n \cdot \dfrac{A^n}{n!} \Big/ \displaystyle\sum_{x=0}^{n} \frac{A^x}{x!}}{n - A + A \cdot \dfrac{A^n}{n!} \Big/ \displaystyle\sum_{x=0}^{n} \frac{A^x}{x!}}$$

De façon approchée on obtient:

$$E_{2,n}(A) \approx \frac{n}{n-A} \cdot E_{1,n}(A)$$

Supposons que Y_1 lignes, du multiple de couplage considéré, soient occupées. On peut donc maintenant atteindre $(a_1 - Y_1) . a_2$ sorties en passant par les $(a_1 - Y_1)$ mailles libres. Les Y_1 lignes occupées dans le multiple de couplage considéré occupent naturellement aussi Y_1 sorties.

Au total on peut donc tester $[(a_1 - Y_1) . a_2 + Y_1]$ lignes pour savoir si elles sont libres ou occupées.

Si nous avons en moyenne dans un multiple de couplage Y_1 sorties occupées, on dit que le nombre moyen m_r de sorties que l'on peut tester (libre ou occupé) vaut:

$$m_r = (a_1 - Y_1) . a_2 + Y_1$$

Le blocage de sortie dans un système à attente se calcule à partir d'un trafic A égal à la charge Y du faisceau de n lignes et du nombre moyen m_r de sorties que l'on peut tester. Les calculs se ramènent au cas d'un réseau de couplage à un étage ayant un nombre de sorties égal à n et une accessibilité moyenne constante égale à m_r.

En utilisant la formule correspondante, on obtient pour la probabilité d'attente due au blocage de sortie la valeur suivante:

$$W_S(n, m_r, A) = \frac{\displaystyle\sum_{x=m_r}^{n} A^x \cdot \frac{\prod_{i=0}^{x-1}\left[1-\sigma(i)\right]}{\prod_{i=1}^{x}\left[i-\sigma(i)\cdot A\right]} \cdot \sigma(x)}{1 + \displaystyle\sum_{x=1}^{n} A^x \cdot \frac{\prod_{i=0}^{x-1}\left[1-\sigma(i)\right]}{\prod_{i=1}^{x}\left[i-\sigma(i)\cdot A\right]}}$$

La probabilité d'attente totale, d'un réseau de couplage à deux étages et une direction, se déduit de la somme des états de blocage possibles. Ceux-ci se répartissent de la façon suivante:

- entrée bloquée sortie bloquée $E_{2,a_1}(Y_1) . W_S(n, m_r, A)$
- entrée non bloquée sortie bloquée $[1 - E_{2,a_1}(Y_1)] . W_S(n, m_r, A)$
- entrée bloquée sortie non bloquée $E_{2,a_1}(Y_1) . [1 - W_S(n, m_r, A)]$

Nous obtenons finalement, pour la probabilité d'attente la valeur suivante:

$$W = E_{2,a_1}(Y_1) + W_S(n, m_r, A) - E_{2,a_1}(Y_1) . W_S(n, m_r, A)$$

b) Temps moyen d'attente τ_W

Le nombre moyen d'appels qui attendent dépend des différents paramètres suivants:

- trafic d'attente Ω
- nombre moyen d'appels c_W, par unité de temps, qui doivent attendre
- temps moyen d'attente t_W des appels qui ont à subir une attente

Nous avons:

$$c_W = c_A . W$$
$$\Omega = c_W . t_W$$

c_A = densité d'apparition des appels

Le trafic d'attente peut aussi être défini comme étant l'espérance mathématique E(z) du nombre moyen z des appels qui attendent.

$$\Omega = E(z) = \sum_{x=k}^{n} \sum_{z=1}^{\infty} z \cdot p(x, z)$$

k = accessibilité du faisceau
n = nombre de lignes du faisceau
p(x,z) = probabilité d'avoir x lignes occupées et z abonnés qui attendent

Le temps moyen d'attente τ_W des appels devant subir une attente, en prenant comme unité de temps la durée moyenne d'occupation, prend la valeur suivante:

$$\tau_W = \frac{t_W}{t_m}$$

Le temps moyen d'attente $\tau_W{}^*$ en considérant tous les appels et en prenant comme unité de temps la durée moyenne d'occupation, vaut:

$$\tau_W{}^* = \frac{t_W \cdot W}{t_m} = \tau_W \cdot W$$

Pour les réseaux de couplage à un étage et une accessibilité imparfaite, on a:

$$\tau_{WS}(n, k, A) = \frac{\sum_{x=k}^{n} \left[p(x) \sum_{i=k}^{x} \frac{\sigma(i) \cdot A}{i - \sigma(i) \cdot A} \right]}{A \sum_{x=k}^{n} p(x) \cdot \sigma(x)}$$

Pour un réseau de couplage à un étage et une accessibilité parfaite, la formule précédente prend la forme simplifiée suivante:

$$\tau_W = \frac{p(n) \cdot \frac{1}{n-A}}{p(n)} = \frac{1}{n-A}$$

A l'aide des formules précédentes, on peut calculer le temps moyen d'attente d'un réseau de couplage à deux étages. Ce temps moyen dépend du blocage d'entrée et du blocage de sortie.

a) Influence du blocage d'entrée

$$\tau_{W_1}{}^* = \frac{1}{a_1 - Y_1} \cdot E_{2,a_1}(Y_1)$$

b) Influence du blocage de sortie

$\tau_{W_2}{}^* = \tau_{WS}(n, m_r, A) . W_S(n, m_r, A)$

m_r = accessibilité moyenne

n = nombre de lignes du faisceau

A = offre de trafic

En supposant que les deux étages soient indépendants, on obtient:

$$\tau_W{}^* = \tau_{W_1}{}^* + \tau_{W_2}{}^*$$

$\tau_W{}^*$ = temps moyen d'attente en considérant tous les appels.

On obtient finalement pour le temps moyen d'attente la valeur qui suit:

$$\tau_W = \frac{\tau_W^*}{W} = \frac{\frac{1}{a_1 - Y_1} \cdot E_{2,a_1}(Y_1) + \tau_{WS}(n, m_r, A) \cdot W_S(n, m_r, A)}{E_{2,a_1}(Y_1) + W_S(n, m_r, A) - E_{2,a_1}(Y_1) \cdot W_S(n, m_r, A)}$$

Exemples numériques

(Fig. 4, 5 et 6)

3. Réseaux de couplage à plusieurs étages avec attente

a) Cas général

Le réseau de couplage se compose de s étages et, entre chacun de ceux-ci, il peut y avoir brassage. On peut répartir les différentes sorties dans une ou plusieurs directions. Entre chaque multiple de couplage de deux étages consécutifs, il peut y avoir une ou plusieurs mailles.

En résumé, nous avons le réseau de connexion de la *figure 7*.

b) Réseau équivalent pour un système de couplage à plusieurs étages desservant plusieurs directions

La méthode utilisée au chapitre 2 peut aussi être appliquée dans le cas d'un réseau de connexion à plusieurs étages. Nous avons aussi pour ce cas un blocage d'entrée

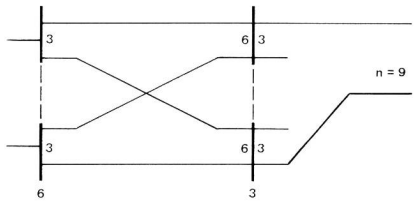

Fig. 4
Exemple numérique 1

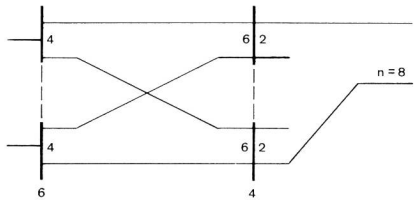

Fig. 5
Exemple numérique 2

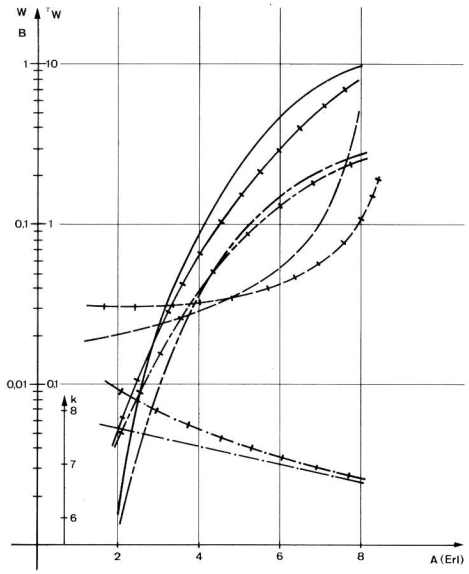

Fig. 6
Probabilités de perte et d'attente, temps moyen d'attente et accessibilité en fonction du trafic offert

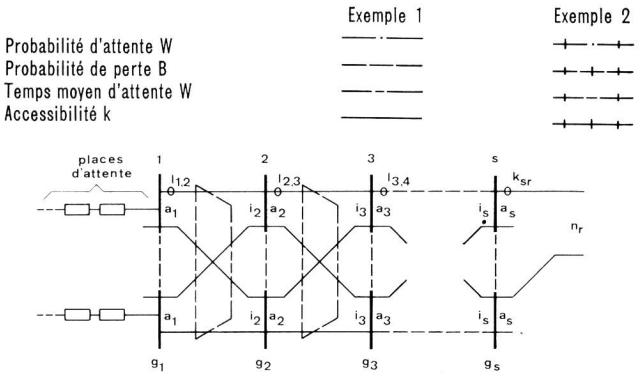

Fig. 7
Réseau de couplage à plusieurs étages avec attente

s nombre d'étages

g_j nombre de multiples de couplage à l'étage j; j = 1,2, ...s

a_j nombre de sorties par multiple de couplage de l'étage j; j = 1,2, ...s

$l_{j,j+1}$ nombre de mailles entre un multiple de couplage de l'étage j et chaque multiple de couplage de l'étage j+1; j = 1,2, ...s–1

i_j nombre d'entrées par multiple de couplage de l'étage j; j = 2,3, ...s

k_{sr} nombre de sorties par multiple de couplage de l'étage s, appartenant à la direction r; r = 1,2, ...R

m_r accessibilité moyenne des lignes du faisceau r

n_r nombre de lignes du faisceau sortant r; r = 1,2, ...R

H_j rapport de brassage après l'étage j

η_r proportion de trafic s'écoulant dans la direction r considérée

et un blocage de sortie. En admettant les mêmes hypothèses que précédemment, nous obtenons, comme réseau équivalent d'un système à s étages, un réseau défini selon *figure 8.*

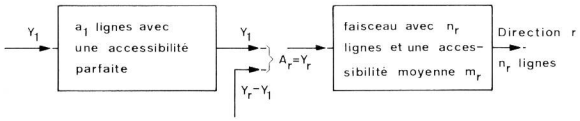

Fig. 8
Réseau équivalent d'un système à s étages

A_r trafic offert pour la direction r
Y_1, Y_r charge de trafic par multiple de couplage de l'étage considéré

Pour l'occupation des mailles après le premier étage, nous acceptons comme fonction de distribution celle d'un faisceau de a_1 lignes avec une accessibilité parfaite.

Pour déterminer le blocage de sortie, on admet une fonction de distribution égale à celle d'un système à attente avec une accessibilité moyenne m_r des n_r lignes du faisceau sortant et une charge $Y_r = \eta_r . Y$. La probabilité d'attente due au blocage de sortie se calcule donc avec les mêmes formules que dans le chapitre 2 où il suffit d'introduire pour m_r la valeur de l'accessibilité moyenne du réseau de couplage considéré. Le problème se ramène donc pratiquement au calcul de cette accessibilité moyenne.

Pour les systèmes sans brassage où $l_{j,\,j+1} = 1$, c'est-à-dire où l'on ne trouve qu'une maille entre un multiple de couplage de l'étage j et un multiple de couplage de l'étage j+1, on obtient pour l'accessibilité moyenne la formule suivante:

$$m_r = \prod_{j=1}^{s-1} (a_j - Y_j) \cdot k_{sr} + \eta_r \cdot Y_1$$

Si, entre l'étage 1 et 2, il y a brassage, le nombre moyen de mailles libres prend la valeur $(a_1 - Y_1 . H_1)$. Le brassage réduit donc l'accessibilité moyenne d'une proportion $H_1 = \dfrac{g_1 \cdot a_1}{i_2 \cdot g_2}$

De façon générale nous obtenons:

$$m_r = \prod_{j=1}^{s-1} (a_j - H_j \cdot Y_j) \cdot k_{sr} + \eta_r \cdot H_1 \cdot Y_1$$

Mais l'inéquation suivante doit aussi être satisfaite.

$$\prod_{j=1}^{b} (a_j - H_j \cdot Y_j) \leq g_{b+1} \quad (\text{pour } b = 1, 2 \ldots s-1)$$

Exemple: Nous avons le cas suivant *(fig. 9)*

$$m_r = (a_1 - Y_1) . k_{2r} + \eta_r . Y_1$$

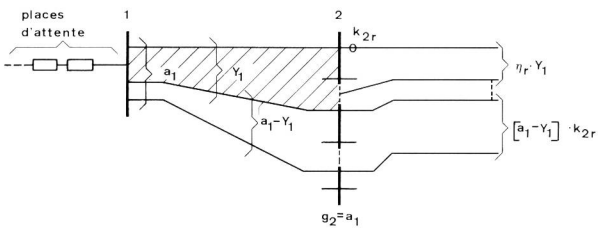

Fig. 9
Accessibilité moyenne d'un réseau de couplage à deux étages

a_1 nombre de sorties par multiple de couplage du premier étage
g_2 nombre de multiples de couplage du deuxième étage
k_r nombre de sorties par multiple de couplage appartenant à la direction r
Y_1 charge de trafic par multiple de couplage du premier étage
η_r proportion de trafic appartenant à la direction r

On peut aussi obtenir une formule semblable aux précédentes pour le cas $l_{j,\,j+1} > l$, j = 1, 2 . . . s–1. En effet, il suffit d'introduire un facteur correctif et l'accessibilité moyenne prend la forme suivante:

$$m_r = \prod_{j=1}^{s-1} (a_j - H_j \cdot Y_j) \cdot \frac{1}{l_{j,\,j+1}} \cdot k_{sr} + \eta_r \cdot H_1 \cdot Y_1$$

On peut maintenant, à partir des formules développées précédemment, calculer la probabilité et le temps moyen d'attente. En effet nous avons:

Probabilité d'attente W

$$W = E_{2,\,a_1}(Y_1) + [1 - E_{2,\,a_1}(Y_1)] \,.\, W_S(n, m_r, Y_r)$$

Temps moyen d'attente τ_W

$$\tau_W = \frac{\dfrac{1}{a_1 - Y_1} \cdot E_{2,\,a_1}(Y_1) + \tau_{WS}(n, m_r, Y_r) \cdot W_S(n, m_r, Y_r)}{E_{2,\,a_1}(Y_1) + \left[1 - E_{2,\,a_1}(Y_1)\right] \cdot W_S(n, m_r, Y_r)}$$

$Y_r = \eta_r . Y$ = charge de trafic de la direction r considérée.

c) Méthode de M. Thierer

M. Thierer a développé une nouvelle méthode pour déterminer le temps moyen et la probabilité d'attente. Il a obtenu les résultats suivants:

Probabilité d'attente W

$$W = E_{2,\,a_1}(Y_1) + [1 - E_{2,\,a_1}(Y_1)] \,.\, W_{ST}(n, m_r, Y_r)$$

avec:

$$W_{ST}(n, m_r, A) = E_{2,\,n}(A) \cdot \frac{n - A + A\, E_{1,\,n-m_r}(A)}{n \cdot E_{1,\,n-m_r}(A)}$$

Temps moyen d'attente τ_W

$$\tau_W = \frac{\dfrac{1}{a_1 - Y_1} \cdot E_{2,\,a_1}(Y_1) + \tau_{WST}(n, m_r, Y_r) \cdot W_{ST}(n, m_r, Y_r)}{E_{2,\,a_1}(Y_1) + \left[1 - E_{2,\,a_1}(Y_1)\right] \cdot W_{ST}(n, m_r, Y_r)}$$

avec:

$$\tau_{WST}(n, m_r, A) = \frac{\displaystyle\sum_{x=m_r}^{n} p(x) \sum_{i=m_r}^{x} \left[\frac{\sigma(i)}{i - \sigma(i) \cdot A}\right]}{W_{ST}(n, m_r, A)}$$

p (x) = probabilité d'avoir «x» lignes occupées dans un faisceau à n lignes et accessibilité parfaite.

Les autres paramètres ont déjà été définis précédemment.

Exemples numériques
(Fig. 10, 11 et 12)

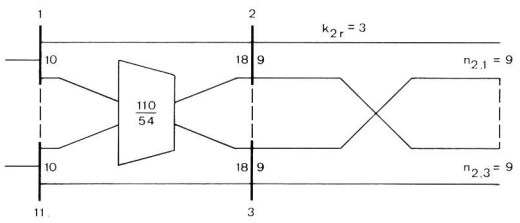

Fig. 10
Exemple numérique 1

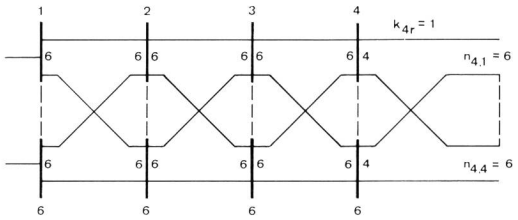

Fig. 11
Exemple numérique 2

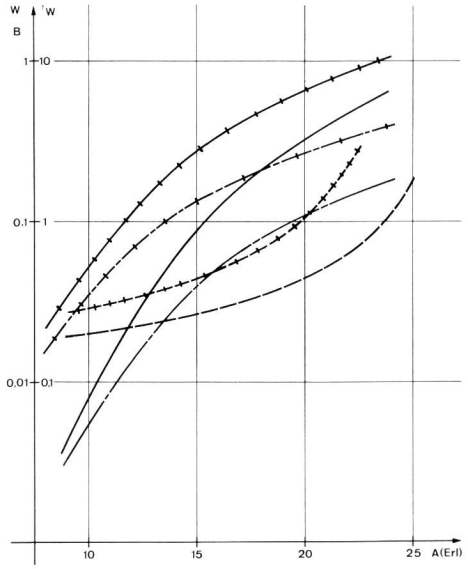

Fig. 12
Probabilités de perte et d'attente, temps moyen d'attente en fonction du trafic offert

	Exemple 1	Exemple 2
Probabilité d'attente W	———	+-+-+
Temps moyen d'attente τ_w	—-—-—	+--+
Probabilité de perte B	———	+-+-+

4. Conclusions

1. Dans les centraux téléphoniques, les étages de présélection (c'est-à-dire ceux qui effectuent la recherche d'une ligne appelante) se comportent en général comme des systèmes à attente.
2. Les systèmes à attente ne diffèrent des systèmes à appels perdus que par la manière dont sont traités les appels qui rencontrent la congestion.
3. Les conditions de trafic dans un système dépendent aussi pour une large part de la réaction de l'usager en face de la congestion. Si ce dernier, dans un système à appels perdus, répète ses appels infructueux dans des délais très courts, les conditions de trafic se rapprochent de très près de celles qui règnent dans un système à attente. Si d'autre part les usagers d'un système à attente préfèrent, en cas de congestion, interrompre cette attente après un délai très court et répéter leurs appels après un intervalle suffisamment long, les conditions de trafic ressemblent à celles d'un système à appels perdus.
4. Il résulte de ces considérations qu'aussi bien dans les systèmes à attente que dans les systèmes à appels perdus les conditions réelles de trafic s'établissent de façon intermédiaire entre les conditions théoriques extrêmes d'un système à appels perdus avec réaction nulle de la part de l'usager et d'un système à attente avec patience inlassable de l'usager.
5. Le compromis mentionné sous 4 se situe plus près des conditions des systèmes à attente de sorte qu'il y a bien des raisons d'utiliser les formules concernant ces derniers systèmes pour le dimensionnement des étages (au moins pour les étages de présélection).

Bibliographie

[1] *M. Thierer.* Delay Systems with limited accessibility, 5. International Teletraffic Congress, New York, June 1967.

[2] *M. Thierer.* Wartesystem – Tafeln für vollkommene und unvollkommene Erreichbarkeit nach der Interconnections-Warteformel, Techn. Universität Stuttgart, 1968.

[3] *A. Lotze und W. Wagner.* Tafeln der modifizierten *Palm-Jacobaeus*-Verlustformel, Techn. Universität Stuttgart, 1963.

[4] *A. Lotze.* Optimum Link Systems, 5. International Teletraffic Congress, New York, June 1967.

[5] *E. Gambe, T. Suzuki, M. Itoh.* Artifical Traffic Studies on a Two-Stage link System with Waiting, 5. International Teletraffic Congress, New York, June 1967.

[6] *W. Wagner.* Über ein kombiniertes Warte-Verlust-System mit Prioritäten, Techn. Universität Stuttgart, 1968.

[7] *L. Hieber.* Die Berechnung der Wartewahrscheinlichkeit und der mittleren Wartezeit von Linkssystemen mit unbegrenzter Wartemöglichkeit, Techn. Universität Stuttgart, 1970.