

**Zeitschrift:** Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

**Herausgeber:** Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe

**Band:** 51 (1973)

**Heft:** 11

**Artikel:** Begriffe und Methoden zur Beschreibung der Frequenzstabilität

**Autor:** Kartaschoff, Peter

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-875316>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Zusammenfassung. Ein in den letzten Jahren entwickeltes statistisches Modell zur Beschreibung der Frequenzstabilität von Oszillatoren wird diskutiert. Es beruht auf einer einfachen Darstellung der spektralen Leistungsdichte der relativen Frequenzschwankungen. Die Beziehungen zur Auswertung von zeitlichen Schwankungen der Resultate von Frequenz- und Phasemessungen werden ebenfalls beschrieben. Die Einführung der «Allan-Varianz» erleichtert es, eindeutige Resultate zu erhalten und früher oft nicht erkannte Schwierigkeiten mit der Konvergenz der Resultate zu umgehen. Die wichtigsten Messmethoden werden kurz beschrieben, insbesondere ein in den letzten Jahren am National Bureau of Standards (Boulder, Colorado, USA) entwickelter Messplatz zur Untersuchung des Phasenrauschens und der Kurzzeitstabilität von Frequenzgeneratoren.

## Notions et méthodes permettant de décrire la stabilité de fréquence

Résumé. Un modèle statistique de conception récente décrivant la stabilité de fréquence d'oscillateurs est discuté. Ce modèle est basé sur une représentation simple de la densité spectrale des fluctuations relatives de la fréquence. Les relations entre cette densité spectrale et les fluctuations temporelles de résultats de mesure de fréquence et de phase sont également décrites. L'introduction de la «variance d'Allan» permet d'obtenir des résultats non équivoques et de contourner certaines difficultés de convergence des résultats autrefois souvent ignorées. Les méthodes de mesure les plus importantes sont décrites brièvement, en particulier un système de mesure mis au point il y a quelques années au National Bureau of Standards (Boulder, Colorado, USA) pour l'étude du bruit de phase et de la stabilité à court terme de générateurs de fréquence.

## Concetti e metodi per descrivere la stabilità di frequenza

Riassunto. Si discute un modello statistico creato recentemente per descrivere la stabilità di frequenza d'oscillatori. Esso è basato su una semplice rappresentazione della densità spettrale delle fluttuazioni della frequenza parziale. Si descrivono pure i rapporti tra queste densità spettrali e le fluttuazioni temporali dei risultati delle misurazioni. L'introduzione della «varianza Allan» semplifica l'ottenimento di risultati univoci e permette di aggirare difficoltà dovute alla convergenza dei risultati, che sovente non erano state riconosciute. Si descrivono brevemente i metodi di misurazione più importanti, ma in particolare un impianto di misurazione per l'esame del rumore di fase e della stabilità a breve termine di generatori di frequenza, che venne sviluppato negli ultimi anni al National Bureau of Standards (Boulder, Colorado, USA).

## 1. Einleitung

Die Erzeugung von stabilen Frequenzen für vielerlei Anwendungen in der Nachrichtentechnik ist zwar ein altes Problem, aber es sind erst in den letzten Jahren ernsthafte Versuche unternommen worden [1, 6, 8], Methoden zur Beschreibung, Definition und Messung der Frequenzstabilität in eine einheitliche Form zu bringen.

In diesem Artikel wird ein statistisches Modell diskutiert, das sich in der Praxis bereits seit einiger Zeit bewährt hat. Es sind auch Messmethoden beschrieben, mit denen die charakteristischen Grössen der Frequenzschwankungen eines Oszillators bestimmt werden können.

Der grösste Teil der wiedergegebenen Informationen beruht auf Arbeiten, die in den letzten Jahren am *National Bureau of Standards* (NBS) in Boulder, Colorado (USA), durchgeführt worden sind (im Rahmen der Studien des «Subcommittee on Frequency Stability of the Technical Committee on Frequency and Time, IEEE Group on Instrumentation and Measurement»). Den Anstoss zu diesen Arbeiten gab ein Symposium über Probleme der Kurzzeitstabilität der Oszillatorenfrequenz [1], das im November 1964 am *NASA-Goddard Space Flight Center* in Greenbelt, Maryland (USA), stattfand. Die schnelle technische Entwicklung auf dem Gebiet der Oszillatoren hoher Stabilität und Genauigkeit (Quarzoszillatoren, Atomfrequenznormale) und vermehrte Anwendungen in verschiedenen Bereichen (Messtechnik, Nachrichtentechnik, Navigation, Radar usw.) hatte eine Vielfalt von Definitionen und Messmethoden zur Folge, die untereinander nicht immer leicht vergleichbar waren. Die Arbeit der erwähnten Kommission bestand zunächst darin, in die ziemlich verworrene Situation etwas

Ordnung zu bringen. Verschiedene Originalbeiträge einzelner Mitglieder [2...5] bilden die Grundlagen eines im Oktober 1970 erschienenen Berichtes [6], in dem zwei Definitionen vorgeschlagen werden, die die statistischen Schwankungen der Frequenz eines Oszillators charakterisieren. Der Grund dafür, dass zwei charakteristische Grössen vorgeschlagen werden und nicht nur eine, liegt in der Dualität von Frequenz- und Zeitbereich begründet. Im Frequenzbereich wird eine nach einem Zufallsgesetz schwankende Grösse durch ihr Spektrum beschrieben. Im Zeitbereich sind Varianzen oder Standardabweichungen in Funktion der Dauer der Einzelmessungen, Grössen, die verhältnismässig leicht aus den Messresultaten berechnet werden können.

Die zeitliche Schwankung und ihr Spektrum sind durch mathematische Beziehungen verbunden, die unter gewissen Voraussetzungen relativ einfach sind. Diese Voraussetzungen sollen zuerst festgelegt werden. Es zeigt sich, dass sie mit den messtechnischen Bedingungen vereinbar sind, wenn auch dabei der strengen Theorie etwas Gewalt ange-tan werden muss. Eine dieser Voraussetzungen ist die Stationarität des Schwankungsprozesses. Ein Prozess wird dann stationär genannt, wenn er zu jeder Zeit durch dieselben Gesetze beschrieben werden kann. Streng genommen trifft dies in der experimentellen Praxis nie zu, denn jeder Versuch dauert nur beschränkte Zeit. Ein Oszillator wird einmal eingeschaltet, seine Frequenz wird irgendwie abwandern, und es wird immer einen Zeitpunkt geben, in dem er entweder abgeschaltet wird oder ganz ausfällt.

Ein anderes Beispiel ist der Begriff des «weissen Rauschens», mit dem ein Prozess angenommen wird, dessen spektrale Leistungsdichte von der Frequenz Null bis zu un-

endlich hohen Frequenzen konstant ist. Bei einer Rauschspannungsquelle muss es immer eine obere Grenzfrequenz geben, sonst wäre die Gesamtleistung unendlich gross, was in der Praxis nicht vorkommt.

## 2. Grundlagen

Wir schreiben die Ausgangsspannung eines Oszillators in folgender Weise

$$u(t) = [U_0 + \varepsilon(t)] \sin [2\pi\nu_0 t + \varphi(t)] \quad (1)$$

Dabei ist  $U_0$  der Sollwert der Amplitude und  $\nu_0$  der Sollwert der Frequenz, die beide für die weitere Betrachtung als konstant angenommen werden. Weil hier die Frequenzstabilität besonders untersucht werden soll, nehmen wir weiter an, dass die Amplitudenschwankungen vernachlässigbar klein sein sollen:  $\varepsilon(t) \ll U_0$ . Es kann allerdings vorkommen, dass durch nichtlineare Elemente Amplitudenschwankungen in Phasenschwankungen umgesetzt werden, was in Einzelfällen berücksichtigt werden muss. Die momentane Frequenz dieser sinusförmigen Spannung ist somit

$$\nu(t) = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} \quad (2)$$

und setzt sich aus einem konstanten Anteil  $\nu_0$  und einem variablen Anteil  $\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$  zusammen.

In Anlehnung an [6] haben wir die Schreibweise so festgelegt, dass der griechische Buchstabe  $\nu$  die wirkliche Signalfrequenz darstellen soll, während wir den lateinischen Buchstaben  $f$  für die Frequenzachse in der Darstellung von Fourierspektren reservieren.

Eine weitere Einschränkung ergibt sich daraus, dass wir uns nur für Oszillatoren interessieren, deren Frequenz einigermassen stabil ist, so dass:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} \ll \nu_0$$

gelten soll.

Noch allgemeiner, und für den Vergleich der Stabilität von Oszillatoren verschiedener Frequenzen besser geeignet, ist die relative Abweichung der Frequenz vom Sollwert, die wie folgt definiert wird

$$y(t) = \frac{1}{2\pi\nu_0} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad (3)$$

und somit eine dimensionslose Grösse ist.

Gemäss der Definition ist  $y(t)$  ein Momentanwert und als solcher der Messung nicht ohne weiteres zugänglich. Wird eine Frequenz in üblicher Weise mit einem Zähler gemessen, so ergibt das Resultat einer Einzelmessung einen Mittelwert  $\bar{y}_k$  über eine endliche Messzeit  $\tau$ :

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} y(t) dt = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} [\varphi(t_k + \tau) - \varphi(t_k)] \quad (4)$$

und die Zähleranzeige ist  $A = \nu_0\tau(1 + \bar{y}_k)$ . Auch bei den in der Folge besprochenen Messmethoden gibt es eine untere Grenze für die Messzeit  $\tau$ . Die Einzelmessung sagt über die Stabilität nichts aus, und es liegt nahe, die Messungen zu wiederholen mit  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  usw. und die Resultate statistisch zu untersuchen.

Wird eine Anzahl von  $N$  Messungen der Dauer  $\tau$  in regelmässigen Intervallen  $T$  durchgeführt, so kann die Varianz wie folgt berechnet werden

$$\sigma_y^2(N, T, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \left( \bar{y}_n - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{y}_k \right)^2 \quad (5)$$

wobei je nach der Natur der Schwankungen von  $y(t)$  das Ergebnis von  $N, T$  und  $\tau$  abhängen kann. Dies wurde früher zu wenig beachtet und führte zu Schwierigkeiten. Wird diese Operation mehrmals, zum Beispiel  $M$ -mal wiederholt, so ist es möglich, diese Resultate zu mitteln und als Grenzwert anzugeben:

$$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sigma_{y_i}^2(N, T, \tau) \quad (6)$$

Wie wir sehen werden, gibt es häufig Fälle, wo weder dieser Wert noch die einzelnen  $\sigma_{y_i}$  für  $N \rightarrow \infty$  gegen einen endlichen Wert streben, das Resultat somit von der Anzahl Messungen abhängt, was kein brauchbares Messresultat sein kann.

Zur Kenntnis der Schwankungen ist es nötig, über das spektrale Verhalten von  $y(t)$  etwas aussagen zu können. Die Spektraldichte  $S_y(f)$  von  $y(t)$  ist gegeben durch die Fouriertransformation der Autokovarianz (Autokorrelation) von  $y(t)$ .

$$\text{Autokovarianz: } R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t') y(t' + \tau) dt' \quad (7)$$

$$\text{Spektraldichte: } S_y(f) = 4 \int_0^{\infty} R_y(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau \quad (8)$$

Umgekehrt gilt übrigens

$$R_y(\tau) = \int_0^{\infty} S_y(f) \cos 2\pi f \tau df \quad (8a)$$

sofern diese Integrale konvergieren. (8) und (8a) sind unter dem Namen «Wiener-Khintchinsche Relationen» bekannt. Da  $y(t)$  eine dimensionslose Zahl ist, hat  $S_y(f)$  die Dimension [s] oder [Hz<sup>-1</sup>].  $S_y(f)$  ist ein Mass für die Grösse der Schwankungen der relativen Frequenzabweichung in Funktion der Fourierfrequenz  $f$ . Aus der Definition von  $y(t)$  lassen sich leicht folgende Beziehungen ableiten:

Spektraldichte der absoluten Frequenzabweichung

$$\delta_\nu = \nu(t) - \nu_0$$

$$S_{\delta_\nu}(f) = \nu_0^2 S_\nu(f) \quad (9)$$

Spektraldichte der Phasenschwankungen  $\delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(0)$

$$S_{\delta\varphi}(f) = \frac{\nu_0^2}{f^2} S_\nu(f) \quad (10)$$

$S_{\delta\varphi}$  ist messtechnisch relativ gut erfassbar. Dazu kommt, dass in erster Näherung eine einfache Beziehung zum Signalspektrum besteht, auf die noch eingegangen wird.

Die erwähnten Konvergenzprobleme bei der Berechnung der Varianz  $\langle \sigma_\nu^2(N, T, \tau) \rangle$  treten beispielsweise dann auf, wenn die Spektraldichte  $S_\nu(f)$  bei niedrigen Frequenzen proportional zu  $f^{-1}$  verläuft. Schwankungsprozesse dieser Art sind seit langem als «Funkel-Rauschen» (englisch: flicker noise,  $1/f$ -noise, excess noise; französisch: bruit de scintillation) bekannt und experimentell vielfach nachgewiesen. Trotzdem gibt es über die physikalische Ursache dieses Effekts noch keine allgemein anerkannte Theorie. Wenn auch die Vermutung berechtigt erscheint, dass ein solcher Schwankungsprozess nicht bis zu unendlich kleinen Fourierfrequenzen den erwähnten Verlauf haben kann und somit eine untere Grenzfrequenz bestehen sollte, damit  $S_\nu(f=0)$  endlich bleibt, so ist es sehr schwierig und zeitraubend, diese untere Grenze experimentell nachzuweisen. Bei Quarzoszillatoren wurde, nach Subtraktion der durch die Alterung verursachten Drift, die  $f^{-1}$ -Proportionalität bis hinunter zu Fourierfrequenzen mit Perioden von mehr als einem Jahr beobachtet [7].

Das Auftreten der  $f^{-1}$ -Proportionalität ist ein hinreichender Grund dafür, dass die in den Gleichungen (5) und (6) definierte Varianz für beliebiges  $N$  kein brauchbares Mass zur Charakterisierung der zeitlichen Frequenzschwankungen eines Oszillators ist. Ein Weg, der diese Schwierigkeit umgeht, ist die von *D.W. Allan* [3] und *J.A. Barnes* [4] vorgeschlagene Begrenzung der Anzahl Proben  $N$ , die im folgenden Abschnitt besprochen werden soll.

### 3. Allan-Varianz und Oszillatormodell

Zwischen der in (6) definierten allgemeinen Allan-Varianz  $\langle \sigma_\nu^2(N, T, \tau) \rangle$  und der Spektraldichte  $S_\nu(f)$  besteht folgende Beziehung, die von *L.S. Cutler* [6, Appendix A] hergeleitet wurde:

$$\langle \sigma_\nu^2(N, T, \tau) \rangle = \frac{N}{N-1} \int_0^\infty S_\nu(f) \frac{\sin^2 \pi f \tau}{(\pi f \tau)^2} \left( 1 - \frac{\sin^2 \pi r f N \tau}{N^2 \sin^2 \pi r f \tau} \right) df \quad (11)$$

$r = T/\tau$  ist das Verhältnis zwischen Messwiederholungsperiode  $T$  und Einzelmessdauer  $\tau$ . Entscheidend für die Konvergenz dieses Integrals ist der zweite Term in der

Klammer rechts, der für  $N \rightarrow \infty$  verschwindet. Es ist dann leicht einzusehen, dass das Integral divergiert, wenn  $S_\nu(f)$  proportional  $f^{-1}$  ist. Für endliche Werte von  $N$  hingegen besteht ein endlicher Grenzwert des Integrals. Es genügt somit, die Anzahl von  $N$  Proben festzulegen. Am einfachsten werden die Ausdrücke für den Wert  $N = 2$  und  $r = 1$ , beziehungsweise  $T = \tau$ . Diese letzte Bedingung bedeutet, dass kontinuierlich, das heisst mit verschwindend kleiner Totzeit gemessen wird, was sehr oft möglich ist. Mit der Abkürzung  $\pi f \tau = u$  reduziert sich die Gleichung (11) dann auf

$$\langle \sigma_\nu^2(2, \tau, \tau) \rangle = \frac{2}{\pi \tau} \int_0^\infty S_\nu\left(\frac{u}{\pi \tau}\right) \frac{\sin^4 u}{u^2} du \quad (12)$$

Ein Vergleich mit (11) zeigt, dass der Kern der Integral-Transformation um 2 Ordnungen höher ist. Somit konvergiert dieses Integral nicht nur wenn  $S_\nu$  proportional zu  $f^{-1}$  ist, sondern auch noch bei Proportionalität zu  $f^{-2}$ . Ein weiterer, für die Praxis der Auswertung wertvoller Vorteil ist die sehr einfache Berechnung von

$$\langle \sigma_\nu^2(2, \tau, \tau) \rangle = \left\langle \frac{(\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2}{2} \right\rangle \quad (13)$$

wobei die gebrochene Klammer, wie in (6), einen Mittelwert über eine genügend grosse Zahl  $M$  von Wertepaaren (im Idealfall unendlich viele) bedeutet.

Der Kürze halber soll im weiteren diese Varianz mit  $\sigma_\nu^2(\tau)$  bezeichnet werden, unter der stillschweigenden Annahme von  $N = 2$  und  $r = 1$ . Bei Messanordnungen, in denen die Totzeit  $T - \tau$  nicht klein gegenüber  $\tau$  gemacht werden kann, muss das Totzeitverhältnis  $r$  angegeben werden. Sowohl durch das Messsystem als auch durch die Eigenschaften der Signalquellen ist immer eine obere Grenzfrequenz  $f_h$  gegeben. Die Form des Abfalls von  $S_\nu(f)$  bei hohen Frequenzen hat einen Einfluss auf den Verlauf von  $\sigma_\nu^2(\tau)$ . Die Annahme eines scharfen Abfalles

$$S_\nu(f) = 0 \text{ für } f > f_h$$

ist aber am einfachsten und für die meisten Fälle brauchbar. Ausnahmefälle sind in der Literatur besprochen [2].

Unter den besprochenen Voraussetzungen kann nun ein Modell aufgestellt werden, das den Verlauf der Spektraldichte  $S_\nu(f)$  in möglichst einfacher Weise beschreibt:

$$S_\nu(f) = h_{-2} f^{-2} + h_{-1} f^{-1} + h_0 f^0 + h_1 f^1 + h_2 f^2 = \sum_{-2}^2 h_\alpha f^\alpha \quad (14)$$

gültig für den Bereich  $0 < f < f_h$

$$S_\nu(f) = 0 \text{ für } f > f_h \quad (14a)$$

Mit dieser auf fünf Terme beschränkten Potenzreihe kann die Frequenzstabilität praktisch aller bekannten Oszillatoren

in brauchbarer Weise beschrieben werden. Die Konstanten  $h_\alpha$  sind von Fall zu Fall verschieden, und es gibt meistens Bereiche der Fourierfrequenz  $f$ , wo nur ein Term dominiert und die andern vernachlässigbar sind. Für den Fall, dass ein Term der Form  $h_\alpha f^\alpha$  dominiert, gilt näherungsweise ein einfacher Zusammenhang zwischen  $S_y(f)$  und  $\sigma_y^2(\tau)$ ; unter der Bedingung  $2\pi f_h \tau \gg 1$

$$\sigma_y^2(\tau) = k_\mu \tau^\mu \quad (15)$$

wobei

$$\mu = -\alpha - 1 \text{ im Bereich } -3 < \alpha < 1$$

und

$$\mu = -2 \text{ im Bereich } \alpha \geq 1 \text{ ist.}$$

Unter Benützung der Gleichung (10), die den Zusammenhang der Spektraldichte der Phasenschwankungen  $S_{\delta\varphi}(f)$  und  $S_y(f)$  ergibt, können die einzelnen Terme des Modells von (14) zum Teil als bekannte Typen von Rausch- oder Schwankungsphänomenen identifiziert werden:

$\alpha = -2; \mu = 1$ . Die Frequenz schwankt in zufälligen Schritten («random walk»).

$\alpha = -1; \mu = 0$ . Die Frequenz zeigt ein analoges Verhalten, wie Spannungen und Ströme beim Funkeffekt in Röhren und Halbleitern.

$\alpha = 0; \mu = -1$ . Die Phase schwankt in zufälligen Schritten («random walk»). Die Frequenz verhält sich wie «weisses Rauschen» (im Bereich  $0 < f < f_h$ ).

$\alpha = 1; \mu = -2$ . Die Phase verhält sich wie «Funkeffekt-Rauschen».

$\alpha = 2; \mu = -2$ . Die Phase verhält sich wie «weisses Rauschen» (im Bereich  $0 < f < f_h$ ).

Wir bemerken, dass die beiden letzten Fälle nur im spektralen Frequenzbereich unterschieden werden können.

Die Varianz  $\sigma_y^2(\tau)$  ist jeweils ungefähr proportional zu  $\tau^{-2}$ , wobei für  $\alpha = 2$  die Näherung besser ist als für  $\alpha = 1$ . Die Grösse  $k_\mu$  ist somit nicht eindeutig definiert. Die Integrale von (11) und (12) sind (zum Teil als Näherungsformeln) ausgerechnet worden [6]\*, und die betreffende Tabelle ist als Anhang wiedergegeben. Statt der Phase  $\varphi$  ist in dieser Tabelle die Grösse

$$x(t) = \frac{\varphi(t)}{2\pi\nu_0} = \int_0^t y(t) dt \quad (16)$$

angegeben. Es gilt natürlich auch

$$y(t) = \frac{dx}{dt} \quad (16a)$$

Diese Grösse hat die Dimension einer Zeit. Ihre Spektraldichte ist gegeben durch

\*Die Tabelle in [6] enthält einen Fehler in der Kolonne, die mit «Flicker  $x$ » bezeichnet ist. Die im Anhang und im Bericht [8] wiedergegebene Tabelle wurde korrigiert

$$S_x(f) = \frac{1}{(2\pi f)^2} S_y(f) \quad (17)$$

Das Modell der Gleichung (14) beschreibt nur das von aussen gesehene Verhalten eines Oszillators. Über die inneren Ursachen des Auftretens der einzelnen Terme wird hier nichts ausgesagt. Die Untersuchung dieser Fragen betrifft die Theorie der Oszillatoren und würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Trotz seiner Einfachheit ist das Modell aber allgemein genug, um das Verhalten von allen bisher bekannten, einigermassen stabilen Oszillatoren zu beschreiben.

#### 4. Abschätzung des Signalspektrums

Die mit Rauschen modulierte Phase verursacht ein Spektrum von Seitenbändern, das zum Beispiel bei einem Sender Störungen in Nachbarkanälen erzeugen kann. Wir definieren das Verhältnis  $\mathcal{L}(f)$  der Leistungsdichte des Phasenmodulations-Seitenbandrauschens im Abstand  $f$  von der Trägerfrequenz  $\nu_0$  zur gesamten Leistung des Signals so, dass gilt:

$$\int_{-\nu_0}^{\infty} \mathcal{L}(f) df = 1 \quad (18)$$

Unter der Voraussetzung kleiner Phasenschwankungen  $\delta\varphi \ll 1$  radian

gilt dann

$$S_{\delta\varphi}(f) \approx 2 \mathcal{L}(f) \quad (19)$$

Für sehr kleine Werte von  $f$ , das heisst in nächster Nähe der Trägerfrequenz  $\nu_0$ , ist die Bedingung  $\delta\varphi \ll 1$  manchmal nicht mehr erfüllt und (19) dort nicht gültig [9].

In der vom NBS entwickelten Messanordnung (siehe Abschnitt 5) ist es aber möglich, die Einhaltung dieser Bedingung zu kontrollieren [8]. Die Beziehung (19) kann wie folgt veranschaulicht werden:

In einem kleinen Frequenzintervall  $\delta f \ll f_1$  um die Frequenz  $f_1$  ist der quadratische Mittelwert der Phasenschwankung gleich

$$\langle \delta^2\varphi(f_1) \rangle = S_{\delta\varphi}(f_1) \delta f \quad (20)$$

Je kleiner  $\delta f$  desto mehr gleicht die Phasenschwankung einer Sinusschwingung mit einer mittleren Amplitude von

$$\langle \hat{\varphi}(f_1) \rangle = (2 \langle \delta^2\varphi(f_1) \rangle)^{1/2} = (2 S_{\delta\varphi}(f_1) \delta f)^{1/2} \quad (21)$$

Eine mit dieser Komponente phasenmodulierte Träger-schwingung hat die Form

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 \cos(2\pi\nu_0 t + \langle \hat{\varphi}(f_1) \rangle \cos 2\pi f_1 t) \\ &= U_0 [J_0(\langle \hat{\varphi}(f_1) \rangle) \cos 2\pi\nu_0 t \\ &\quad - J_1(\langle \hat{\varphi}(f_1) \rangle) (\sin 2\pi(\nu_0 + f_1)t + \sin 2\pi(\nu_0 - f_1)t) \\ &\quad + \text{Terme höherer Ordnung}] \end{aligned} \quad (22)$$

Unter der Bedingung  $\langle \hat{\varphi}(f_1) \rangle \ll 1$  radian können die Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden. Dann sind die Bessel-Funktionen angenähert gleich

$$\begin{aligned} J_0(\langle \hat{\varphi}(f_1) \rangle) &\approx 1 \\ J_1(\langle \hat{\varphi}(f_1) \rangle) &\approx \frac{1}{2} \langle \hat{\varphi}(f_1) \rangle \end{aligned}$$

Das Verhältnis von Seitenbandleistung zur Trägerleistung wird dann, gemäss der Definition von  $\mathcal{L}(f)$ , gleich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_1) \delta f &= \frac{P_{\text{Seitenband}}}{P_{\text{Seitenband}} + P_{\text{Träger}}} \approx \frac{P_{\text{Seitenband}}}{P_{\text{Träger}}} = \frac{1}{4} \langle \hat{\varphi}(f_1) \rangle^2 \\ &= \frac{1}{2} S_{\delta\varphi}(f_1) \delta f \end{aligned} \quad (23)$$

Somit ist  $\mathcal{L}(f_1) = \frac{1}{2} S_{\delta\varphi}(f_1)$  entsprechend (19).

## 5. Messtechnik

### 5.1 Zählermessungen

Elektronische Zähler sind die verbreitetsten Instrumente zur Frequenzmessung. Das Blockscheema in *Figur 1* zeigt die

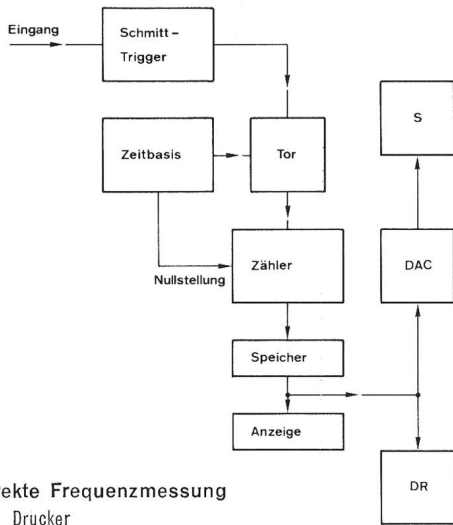


Fig. 1 Direkte Frequenzmessung  
DR Drucker  
DAC Digital/analogue-Wandler

wesentlichsten Elemente, aus denen sich ein Zähler üblicherweise zusammensetzt: Eingangsschaltung bestehend aus Verstärker und Schmitt-Trigger, Zählwerk mit Zwischenspeicher und Anzeige, Zeitbasis mit Untersetzer und Steuerlogik mit Funktionsumschalter. Ein solcher Universalzähler kann sowohl zur Messung von Zeitintervallen als auch zur direkten Frequenzmessung verwendet werden. Bei der direkten Frequenzmessung bestimmt die Zeitbasis über die Steuerlogik Anfang und Ende des Messintervalls  $\tau$ , während dem die Perioden des zu messenden Eingangssignals der Frequenz  $\nu$  gezählt werden. Am Ende des Messintervalls wird der Zähler durch Sperren der Eingangstorschaltung angehalten und das Resultat in den mit der Anzeige ver-

bundenen Zwischenspeicher übertragen. Mit dieser Methode werden grundsätzlich immer eine Anzahl ganzer Perioden gezählt, wodurch die Messgenauigkeit beschränkt wird. Das Resultat ist immer ein *Mittelwert* der eingegebenen Frequenz über die Messzeit  $\tau$ . Zwischen aufeinanderfolgenden Messungen ist eine endliche Totzeit von mindestens einer Periodendauer des Eingangssignals unvermeidlich.

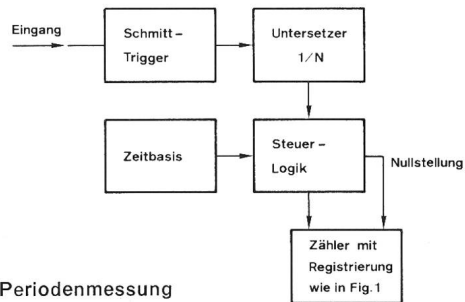


Fig. 2 Periodenmessung

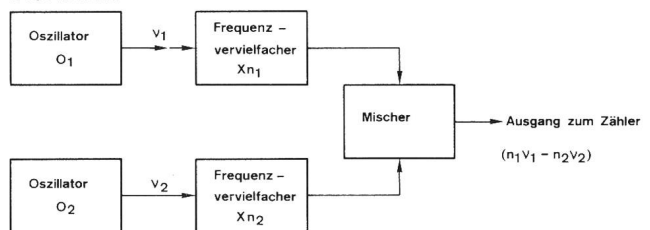
Für niedrige Frequenzen kann eine genügende Messgenauigkeit meist nur durch *Periodenmessung* erzielt werden (*Fig. 2*). Hier wird das Eingangssignal auf einen Untersetzer gegeben, der den Eingang des Zählers für die Dauer von  $N$ -Perioden öffnet. Während dieser Dauer  $\tau = \frac{N}{\nu}$  zählt der Zähler mit der Zeitbasisfrequenz  $\nu_r$ , so dass die Anzeige  $A$  nach Ablauf der Messdauer gleich

$$A = \nu_r \tau = N \frac{\nu_r}{\nu}$$

ist. Die Totzeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Messungen ist wiederum mindestens eine Periodendauer der gemessenen Frequenz.

Infolge der beschränkten Anzeigeempfindlichkeit (Auflösung von  $\pm 1$  Zählereinheit) sind direkte Frequenz- und Periodenmessungen für die Untersuchung kurzzeitiger Frequenzschwankungen nur beschränkt geeignet.

Oft reicht die erzielbare Anzeigeempfindlichkeit nicht aus. Diese kann mit der in *Figur 3* dargestellten Überlagerungsmethode verbessert werden, die ebenfalls sehr verbreitet ist. Durch die Verwendung von Frequenzvervielfachern lässt sich die Anzeigeempfindlichkeit fast beliebig hoch treiben. Diese Methode erfordert aber einen beträchtlichen Aufwand.



$$(n_1 \nu_1 - n_2 \nu_2) \ll n_1 \nu_1 \approx n_2 \nu_2$$

Fig. 3 Überlagerungsmethode

## 5.2 Auswertung von Messungen im Zeitbereich

Die Resultate der Zählermessungen können entweder von Hand aufgeschrieben oder durch einen Drucker oder Lochstreifenstanzer registriert werden. Für eine rasche Orientierung über den zeitlichen Verlauf der Messungen ist der Anschluss eines Digital-Analog-Umsetzers und eines Linienschreibers zweckmässig. Die Zählerresultate können leicht in die Form relativer Frequenzabweichungen  $\bar{y}_k$  umgerechnet werden, wenn vor den Messungen die Eichkonstante des Systems (relative Frequenzabweichung für  $\pm 1$  Stelleneinheit der Anzeige) bestimmt wird. Aus den mit Zählermessungen erhaltenen Messreihen ist der Verlauf  $\sigma_v^2(\tau)$  berechenbar. Die übliche graphische Darstellungsweise besteht darin, dass nicht die Varianz  $\sigma_v^2(\tau)$ , sondern die Standardabweichung  $\sigma_v(\tau) = \langle \sigma_v^2(2, \tau, \tau) \rangle^{1/2}$  aufgetragen wird, und zwar sowohl  $\sigma_v$  als auch  $\tau$  im logarithmischen Massstab. In der Praxis hat sich dafür der Name «Sigma-Tau-Diagramm» eingebürgert. Manche Fabrikanten von stabilen Frequenzgeneratoren sind bereits dazu übergegangen, ihre Produkte mit solchen Diagrammen in den Datenblättern zu spezifizieren. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass ein Verlauf gemäss (15) als Gerade erscheint, aus deren Steigung auf den Spektraltypus der Frequenzschwankung geschlossen werden kann. Bei nicht vernachlässigbarer Totzeit ( $r > 1$ ) oder beliebiger Probenzahl  $N$  können die Resultate mit Hilfe der vom NBS veröffentlichten Tabellen [10] der Gewichtsfunktionen

$$B_1(N, r, \mu) = \frac{\langle \sigma_v^2(N, T, \tau) \rangle}{\langle \sigma_v^2(2, T, \tau) \rangle}$$

$$B_2(r, \mu) = \frac{\langle \sigma_v^2(2, T, \tau) \rangle}{\langle \sigma_v^2(2, \tau, \tau) \rangle}$$

umgerechnet werden. Dazu muss zuerst aus den Resultaten der Exponent  $\mu$  bestimmt werden.

Vorsicht ist nötig, falls  $\mu$  ungefähr gleich  $-2$  und  $r$  ungefähr gleich  $-1$  ist, da die Funktion  $B$  im Punkt  $\mu = -2, r = 1$  singularär ist (siehe [6, 10]). Es kann dann von Vorteil sein, die Messungen mit absichtlich vergrösserter Totzeit durchzuführen, um Fehler der Grössenordnung 30% in der Bestimmung von  $\sigma_v^2(\tau)$  zu vermeiden.

Die meist verbreitete Fehlerquelle bei Messungen im Zeitbereich ist eine unbemerkte Störmodulation der Phase der zu messenden Signale, beispielsweise mit der Netzfrequenz oder deren Vielfachen (Brumm). Ist die Messdauer  $\tau$  ungefähr ein ganzzahliges Vielfaches der Periode des Störsignals, so wird  $\sigma_v(\tau)$  gegen kleine Änderungen von  $\tau$  sehr empfindlich sein. Die Brauchbarkeit der Resultate wird dann sehr fraglich. Eine elementare Vorsichtsmassnahme ist die Überwachung der zu messenden Signale mit einem Kathodenstrahloszillographen. Ein sorgfältiger Aufbau der Messeinrichtung (Erdung, Vermeidung von Erd-

schleifen) ist ebenfalls unerlässlich. Nur die direkte Messung des Phasenspektrums  $S_{\delta\varphi}$  (siehe Abschnitt 5.4) kann aber über die Amplitude von Störmodulationen genügend sicheren Aufschluss geben.

Die Berechnung der Allan-Varianz  $\sigma_v^2(\tau)$  hat, wie schon im Abschnitt 3 gezeigt, den Vorteil, dass sie sehr einfach ist und gut konvergiert. Da oft beträchtliche Mengen von Einzelmessungen ausgewertet werden müssen, sind Spezialzähler entwickelt worden, die eine kleine Recheneinheit enthalten (Beispiel: Hewlett-Packard Computing Counter Modell HP 5360 A). Mit diesen Instrumenten können einfache Berechnungen wie  $\sigma_v^2(\tau)$  im Echtzeitverfahren (online) ausgeführt werden. Die Idee, einen Echtzeitrechner einzusetzen, führt logischerweise zum Begriff der Digitalfilter. R.A. Baugh [11] hat ein Verfahren vorgeschlagen, mit dem im Prinzip die Spektraldichte  $S_v(f)$  aus Messungen im Zeitbereich berechnet werden kann. Dabei muss, wie bei allen digitalen Filtern, die Systembandbreite geeignet begrenzt werden, um Fehler durch Rückfaltung (aliasing) höherer Fourier-Frequenzkomponenten zu vermeiden.

Bei allen hier besprochenen Messmethoden stellt sich allgemein das Problem, wie die Eigenschaften einer Signalquelle bestimmt werden sollen, da jede Messung auf dem Vergleich zweier Signalquellen beruht. Klare Verhältnisse bestehen nur in zwei Fällen:

- Die Stabilität der als Bezugsgenerator bezeichneten Signalquelle ist um Grössenordnungen besser als die des Prüflings;
- Es werden zwei Signalquellen verglichen, deren Eigenschaften gleich sind.

Die gemessene Varianz  $\sigma_v^2(\tau)$  ist dann gleich der Summe der Varianzen der beiden Komponenten

$$\sigma_{v12}^2(\tau) = \sigma_{v1}^2 + \sigma_{v2}^2$$

wenn die Schwankungen der einzelnen Komponenten unabhängig, das heisst *unkorreliert* sind. Im Fall a) ist der Beitrag des Bezugsgenerators vernachlässigbar. Im Fall b) gilt

$$\sigma_{v1}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{v12}^2, \text{ bzw. } \sigma_{v1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{v12}$$

wenn keiner der beiden Idealfälle möglich ist, müssen die Messungen an drei Generatoren durchgeführt werden. Dieselbe Summenregel gilt auch für die Spektraldichten  $S_{\delta\varphi}$ ,  $\mathcal{E}(f)$  und  $S_v(f)$ .

## 5.3 Phasenzeitmessungen

Sofern man sich für die langzeitige Frequenzstabilität interessiert, können sehr einfache Methoden des Phasenvergleiches verwendet werden. Die Figur 4 zeigt das Prinzipschema eines Phasenkomparators, der aus einfachen in-

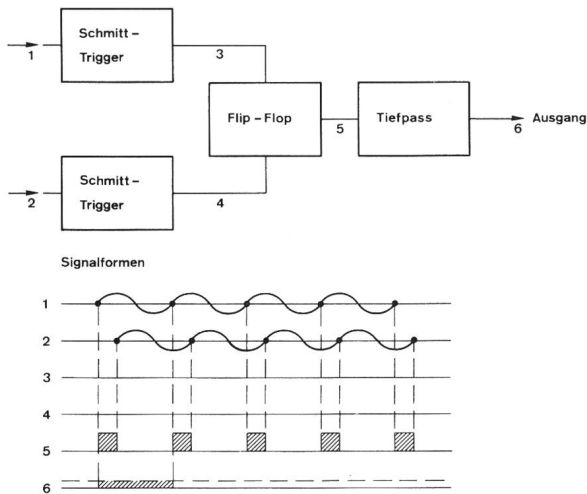


Fig. 4 Phasenkomparator

tegrierten Schaltelementen aufgebaut werden kann. Er liefert eine Ausgangsspannung, die der Phasendifferenz der beiden Eingangssignale proportional ist. Sind die Frequenzen nicht genau gleich, so erhält man eine Sägezahnspannung. Es ist zweckmässig, die Phasendifferenz nicht in Winkelgraden, sondern im Zeitmassstab auszudrücken, wie in (16) angegeben:  $x(t) = \frac{\varphi(t)}{2\pi\nu_0}$ . G. Becker [12] hat dafür den Ausdruck «Phasenzzeit» vorgeschlagen. Bei der Registrierung der Ausgangsspannung des Komparators ist die Eichung sehr einfach, indem die Amplitude der Sägezahnspannung gerade einer Periodendauer der Frequenz  $\nu_0$  entspricht. Die Registrierung mit einem Linienschreiber ist besonders dann notwendig, wenn die Phasenzzeitdifferenz während der Messung mehrere Perioden erreicht.

Die Auswertung ist ebenfalls sehr einfach. Von einem beliebigen Nullpunkt an wird die Phasenzzeitdifferenz in regelmässigen Zeitabständen  $\tau$  notiert. Dann ist

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} (x(t_k + \tau) - x(t_k))$$

wobei  $t_k = k\tau$

$k = 0, 1, 2, \dots$

$\sigma_y^2(\tau)$  wird wie zuvor angegeben berechnet, kann aber auch in folgender Form ausgedrückt werden

$$\delta_y^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} \langle [x(t_k + 2\tau) - 2x(t_k + \tau) + x(t_k)]^2 \rangle$$

Die Grösse

$$D_x^2(\tau) = \langle [x(t_k + 2\tau) - 2x(t_k + \tau) + x(t_k)]^2 \rangle = 2\tau^2 \sigma_y^2(\tau)$$

ist der quadratische Mittelwert der zweiten Differenzen der Phasenzzeitdifferenzwerte.  $D_x^2(\tau)$  ist ein Mass für die wahrscheinliche Änderung der Phasenzzeitdifferenz nach Ablauf einer Zeit  $\tau$  [4, 6].

#### 5.4 Der NBS-Messplatz für HF-Oszillatoren

In der Zeit von 1967...1969 wurde in der Time and Frequency Division des National Bureau of Standards ein Messplatz zur Untersuchung der Frequenzstabilität von Präzisionsoszillatoren entwickelt, der in einem kürzlich erschienenen Bericht [8] eingehend beschrieben ist. Die Fig. 5 zeigt das Prinzipschema. Von den zwei zu vergleichenden Oszillatoren ist  $O_1$  der Prüfling und  $O_2$  der Bezugs-generator. Letzterer ist mit einem Varaktor zur elektronischen Frequenzregelung ausgerüstet. Die Einrichtung beruht auf dem Prinzip des phasensynchronisierten Oszillators (phase-locked loop). Als Mischer dient ein Ringmodulator mit Schottky-Sperrschichtdioden, der sich durch sehr tiefes Eigenrauschen auszeichnet. Im allgemeinen wird die Systemempfindlichkeit durch das Rauschen des Gleichspannungsverstärkers GV begrenzt. Die Zeitkonstanten  $T_1$

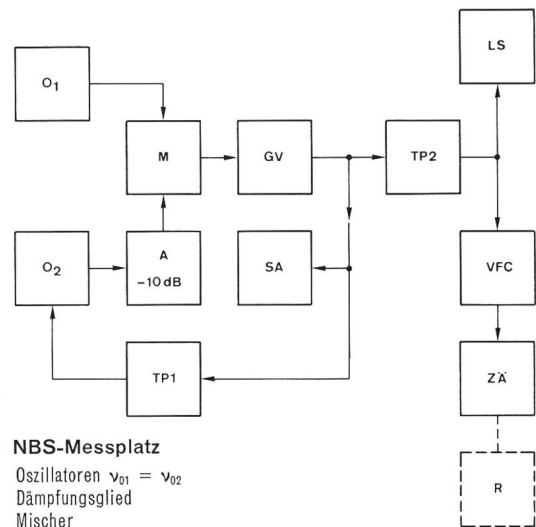


Fig. 5 NBS-Messplatz

- $O_1, O_2$  Oszillatoren  $\nu_{01} = \nu_{02}$
- A Dämpfungsglied
- M Mischer
- GV Gleichspannungsverstärker
- TP 1, 2 RC-Tiefpässe, umschaltbar
- SA NF-Spektrum-Analysator
- VFC Spannung-Frequenz-Wandler
- ZÄ Zähler
- R Rechner
- LS Linienschreiber

und  $T_2$  der RC-Tiefpässe sind umschaltbar und bestimmen die Betriebsart des Systems. Es sind zwei Betriebsarten möglich. Für beide müssen  $O_1$  und  $O_2$  so eingestellt werden, dass die Ausgangsspannung des Mixers M im Mittel gleich Null ist. Dann sind die beiden Signale von  $O_1$  und  $O_2$  um  $90^\circ$  phasenverschoben, und der Mischer arbeitet für kleine Phasenschwankungen als linearer Phasendiskriminator. Die Rückführung über TP 1 sorgt für die Einhaltung dieser Bedingung über längere Zeit, der Linienschreiber LS dient zur Überwachung. Der Verstärkungsfaktor von GV wird so eingestellt, dass die Regelung stabil arbeitet. Das

Verhalten des Systems ergibt sich aus folgenden Beziehungen. Die Spektraldichte  $S_{u_3}(f)$  ist gleich

$$S_{u_3}(f) = S_{\varphi_{12}}(f) |H_1(j\omega)|^2 G_a^2$$

$S_{\varphi_{12}}$  = Spektraldichte der Phasendifferenzschwankungen

$S_{\varphi_{12}} = 2 S_{\varphi_1}$  falls beide Oszillatoren identisch

$S_{\varphi_{12}} = S_{\varphi_1}$  falls  $S_{\varphi_1} \gg S_{\varphi_2}$

Die Übertragungsfunktion des Regelkreises ist gegeben durch

$$|H_1(j\omega)|^2 = \frac{\omega^4 T_1^2 + \omega^2}{(K_o - \omega^2 T_1)^2 + \omega^2} \quad \omega = 2\pi f$$

wobei  $K_o = K_2 C_a$  (radian/s) der Verstärkungsgrad des Regelkreises bei  $\omega = 0$  ist.  $K_2$  ist die Regelkonstante des Oszillators  $O_2$ , definiert durch

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = K_2 U_3$$

$G_a$  ist die Übertragungskonstante von Mischer + Verstärker in Volt/radian, definiert durch

$$U_3 = G_a \delta\varphi$$

Die zwei Betriebsarten sind folgendermassen charakterisiert:

**Betriebsart A, Messung von  $S_{\delta\varphi}(f)$**

Die beiden Oszillatoren  $O_1$  und  $O_2$  werden sehr lose aneinander gekoppelt, so dass nur der langzeitige Mittelwert von  $\delta\varphi$  verschwindet. Die Zeitkonstante  $T_1$  wird verhältnismässig gross ( $\sim 10$  s) gemacht, dann gilt

$$\begin{aligned} \omega^2 T_1 &\gg K_o \\ |H_1(j\omega)|^2 &= 1 \\ \text{So ist} \quad S_{u_3}(f) &= G_a^2 S_{\delta\varphi} \end{aligned}$$

$S_{u_3}(f)$  wird direkt mit dem Niederfrequenz-Spektrumanalysator (wave analyzer) gemessen. Die Eichung (Bestimmung von  $G_a$ ) geschieht durch Messen der Schwebungsamplitude bei geöffnetem Phasenregelkreis. Diese Betriebsart eignet sich besonders zur quantitativen Bestimmung von  $S_{\delta\varphi}(f)$  und  $\mathcal{L}(f)$  für Fourierfrequenzen oberhalb einiger Hz bis zu einigen kHz, je nach dem Bereich des verwendeten Spektrumanalysators.

**Betriebsart B, Messung von  $\sigma_v^2(\tau)$**

In dieser Betriebsart werden die beiden Oszillatoren «hart synchronisiert», das heisst  $T_1$  wird verkleinert und  $K_o$  vergrössert, soweit es die Stabilität des Phasenregelkreises zulässt. Dann gelten im Bereich

$$\begin{aligned} \omega = 2\pi f &\ll K_o \text{ und } \omega^2 T_1 \ll K_o \\ |H_1(j\omega)|^2 &\approx \frac{\omega^2}{K_o^2} \text{ und somit, unter Benützung von (10)} \end{aligned}$$

$$S_{u_3}(f) \approx \left(\frac{\omega}{K_2}\right)^2 S_{\delta\varphi} = \left(\frac{2\pi\nu_o}{K_2}\right)^2 S_v(f)$$

In diesem Fall sind also die Schwankungen der Spannung  $U_3$  den relativen *Frequenzschwankungen* der beiden Oszillatoren proportional.

Damit die Messung der Schwankungen im Zeitbereich nicht durch rasche Einschwingvorgänge des Regelkreises verfälscht wird, ist der Tiefpass  $T_2$  notwendig. Er wird so

$$\text{eingestellt, dass } T_2 \gg \frac{1}{2\pi K_o} \text{ ist.}$$

Die Betriebsart B eignet sich somit nur zur Untersuchung von Schwankungen im Fourierfrequenzbereich unterhalb

$$f \sim \frac{1}{2\pi T_2}$$

Gemessen wird mit einem Spannungs-Frequenz-Wandler und einem Zähler. Der Vorteil dieser Anordnung, gegenüber einer direkten Zählermessung, liegt in der hohen Messempfindlichkeit. Die Oszillatoren werden auf ihrer Betriebsfrequenz gemessen, müssen nicht gegeneinander verstimmert werden, und Frequenzvervielfacher fallen weg.

Obwohl die Betriebsart A mehr für höhere, die Betriebsart B mehr für tiefere Fourierfrequenzen geeignet ist, besteht in den meisten Fällen ein f-Bereich, in dem beide Betriebsarten einsetzbar sind. Dies erlaubt es, die Gültigkeit der Messungen durch Umrechnung von  $S_{\delta\varphi}(f)$  in  $\sigma_v^2(\tau)$  zu kontrollieren. Die Messungen in der Betriebsart A gestatten es, das Vorhandensein von Störmodulationen (Brumm) mit hoher Empfindlichkeit zu prüfen und Massnahmen zu deren Unterdrückung zu ergreifen. Die Gefahr von Fehlmessungen (siehe auch Abschnitt 5.2) bei der Bestimmung von  $\sigma_v^2(\tau)$  wird damit reduziert. Die durch das Rauschen des Verstärkers GA begrenzte Empfindlichkeit des Systems kann gemessen werden, indem statt der beiden Oszillatoren  $O_1$  und  $O_2$  nur ein Oszillator auf beide Eingänge des Mixers,

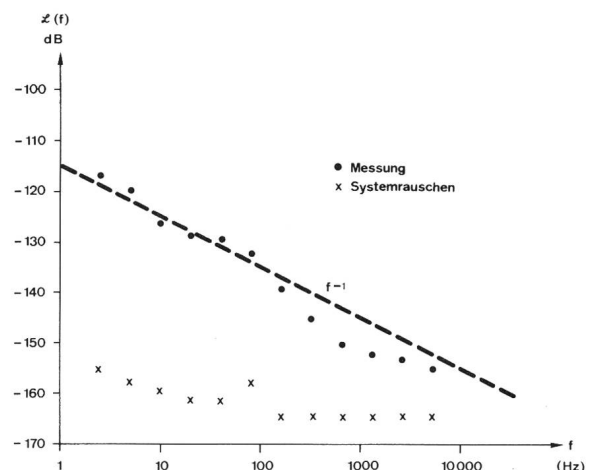


Fig. 6 PM-Seitenbandrauschen  $\mathcal{L}(f)$

Anhang

Umrechnungstabelle Frequenzbereich-Zeitbereich (aus NBS Techn. Note Nr. 632, Januar 1973)

Stability Measure Conversion Chart\*

(Frequency Domain - Time Domain)

$S_y(f)$  = one-sided spectral density of  $y$  (dimensions are  $y^2/f$ ),  $0 \leq f \leq f_h$ ,  $f_h = B$ ,  $2\pi f_h \tau \gg 1$ ;  $S_y(f > f_h) = 0$

General Definition:  $\langle \sigma_y^2(N, T, \tau, f_h) \rangle = \left\langle \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\bar{y}_n - \bar{y})^2 \right\rangle$ ,  $\frac{dx}{dt} = y = \frac{\delta v}{v}$ ,  $r = \frac{T}{\tau}$

Special Case:  $\sigma_y^2 \equiv \langle \sigma_y^2(N=2, T=\tau, f_h) \rangle = \left\langle \frac{(\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2}{2} \right\rangle$

Useful Relationships:  
 $(2\pi)^2 = 39.48$   
 $\ln 2 = 0.693$   
 $2 \ln 2 = 1.386$   
 $\ln 10 = 2.303$

Time Domain (Allian variances, ...)	$\sigma_y^2(\tau)$ [ $N=2, r=1$ ]	$\langle \sigma_y^2(N, T=\tau, f_h) \rangle$ [ $r=1$ ]	$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau, f_h) \rangle$
<b>FREQUENCY DOMAIN</b> (Power law spectral densities)			
<b>WHITE x</b> $S_y(f) = h_2 f^2 \left( S_x(f) = \frac{h_2}{(2\pi)^2} \right)$ $2\pi f_h \tau \gg 1$	$h_2 \cdot \frac{3f_h}{(2\pi)^2 \tau^2}$	$h_2 \cdot \frac{N+1}{N(2\pi)^2} \cdot \frac{2f_h}{\tau^2}$	$h_2 \cdot \frac{N + \delta_k(r-1)}{N(2\pi)^2} \cdot \frac{2f_h}{\tau^2}$ $\delta_k(r-1) = \begin{cases} 1 & \text{if } r=1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
<b>FLICKER x</b> $S_y(f) = h_1 f \left( S_x(f) = \frac{h_1}{(2\pi)^2 f} \right)$ $2\pi f_h \tau \gg 1, 2\pi f_h T \gg 1$	$h_1 \cdot \frac{1}{\tau(2\pi)^2} \left[ \frac{9}{2} + 3 \ln(2\pi f_h \tau) - \ln 2 \right]$	$h_1 \cdot \frac{2(N+1)}{N\tau^2(2\pi)^2} \left[ \frac{3}{2} + \ln(2\pi f_h \tau) - \frac{\ln N}{N^2-1} \right]$	$h_1 \cdot \frac{2}{(2\pi\tau)^2} \left[ \frac{3}{2} + \ln(2\pi f_h \tau) \right]$ $+ \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^{N-1} (N-n) \cdot \ln \left[ \frac{n \cdot 2 \cdot 2}{\ln^2 r - 1} \right]$ , for $r \gg 1$
<b>WHITE y (Random Walk x)</b> $S_y(f) = h_0 \left( S_x(f) = \frac{h_0}{(2\pi)^2 f^2} \right)$	$h_0 \cdot \frac{1}{2} \tau^{-1}$	$h_0 \cdot \frac{1}{2} \tau^{-1}$	$h_0 \cdot \frac{1}{2} \tau^{-1}$ , for $r \geq 1$ $h_0 \cdot \frac{1}{6} r(N+1) \tau^{-1}$ , for $Nr \leq 1$
<b>FLICKER y</b> $S_y(f) = \frac{h_{-1}}{f} \left( S_x(f) = \frac{h_{-1}}{(2\pi)^2 f^3} \right)$	$h_{-1} \cdot 2 \ln 2$	$h_{-1} \cdot \frac{N \ln N}{N-1}$	$h_{-1} \cdot \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^{N-1} (N-n) \left[ -2(nr)^2 \ln(nr) + (nr+1)^2 \ln(nr+1) + (nr-1)^2 \ln nr-1  \right]$
<b>RANDOM WALK y</b> $S_y(f) = \frac{h_{-2}}{f^2} \left( S_x(f) = \frac{h_{-2}}{(2\pi)^2 f^4} \right)$	$h_{-2} \cdot \frac{(2\pi)^2 \tau}{6}$	$h_{-2} \cdot \frac{(2\pi)^2 \tau}{12} \cdot N$	$h_{-2} \cdot \frac{(2\pi)^2 \tau}{12} [r(N+1)-1]$ , $r \geq 1$

\* Adapted from J. A. Barnes et al., "Characterization of Frequency Stability," NBS Technical Note 394 (October 1970); also published in IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement IM-20, No. 2, pp. 105-120 (May 1971).

John H. Shoaf, 273.04  
 National Bureau of Standards  
 February 1973

unter Belassung des 10 dB-Dämpfungsglieds im einen Zweig, geschaltet wird. Der Analysator SA zeigt dann das Systemrauschen an. Schliesslich eignet sich die Anordnung auch zur Messung der Phasenschwankungen von Vierpolen.

Der beschriebene NBS-Messplatz wurde ursprünglich für den Betrieb bei der Normalfrequenz 5 MHz ausgelegt, kann aber im Prinzip über den ganzen Arbeitsbereich des Mischers M verwendet werden. Die Eichkonstanten für die Bestimmung von  $\sigma_y^2(\tau)$  und damit auch die Anzeigeempfindlichkeit der Zählermessung sind natürlich frequenzabhängig und müssen von Fall zu Fall bestimmt werden.

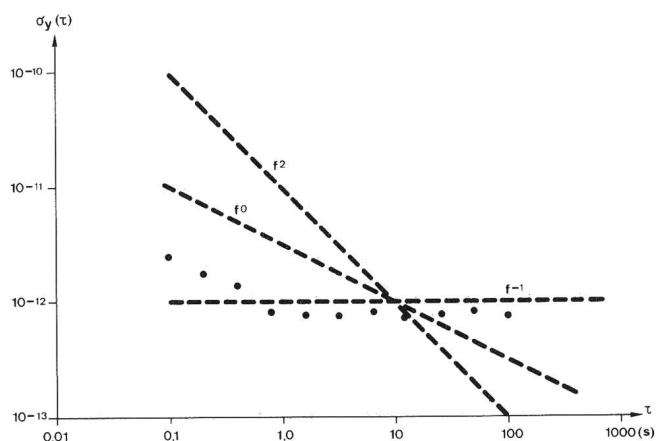


Fig. 7 Sigma-Tau-Diagramm

Die Figuren 6 und 7 zeigen Beispiele von Resultaten, die an zwei 5-MHz-Quarzoszillatoren hoher Stabilität gemessen wurden. Figur 6 zeigt die normalisierte Spektraldichte  $\mathcal{L}(f)$  des Seitenbandrauschens, gemessen in Betriebsart A. Gleichzeitig ist das Systemrauschen (im Mittel -160 dB) angegeben. Beide Grössen wurden mit einer Analysatorbandbreite von 1 Hz gemessen und  $\mathcal{L}(f)$  in Dezibel ausgedrückt. Bei diesen Oszillatoren wurde ein  $f^{-1}$  Rauschen der Phase beobachtet, das vermutlich bei höheren Frequenzen in weisses Rauschen übergeht. Zu bemerken ist hier, dass es sich dabei um ausserordentlich rauscharme Oszillatoren handelt. Figur 7 zeigt einen Verlauf von  $\sigma_y^2(\tau)$  für  $0,1 < \tau < 100$  s, gemessen in der Betriebsart B. Beide Resultate sind dem NBS-Bericht Nr. 632 [8] entnommen.

## 6. Schlussbemerkungen

Das im Abschnitt 3 beschriebene statistische Oszillatormodell enthält Grössen, die messtechnisch gut erfassbar sind, besonders mit dem im Abschnitt 5.4 kurz beschrie-

benen NBS-Messplatz. Dieser erlaubt mit verhältnismässig bescheidenem Aufwand eine nachprüfbar Bestimmung der kurzzeitigen Frequenzschwankungen in der Form der Spektraldichte des Phasenrauschens. Zeitliche Schwankungen können auch in der Form der Allan-Varianz oder als Sigma-Tau-Diagramm beschrieben werden, sofern dabei die nötigen Vorsichtsmassnahmen berücksichtigt werden. Für die Untersuchung der längerzeitigen Stabilität erscheint die Messung von Phasenzeitdifferenzen dank ihrer Einfachheit am zweckmässigsten.

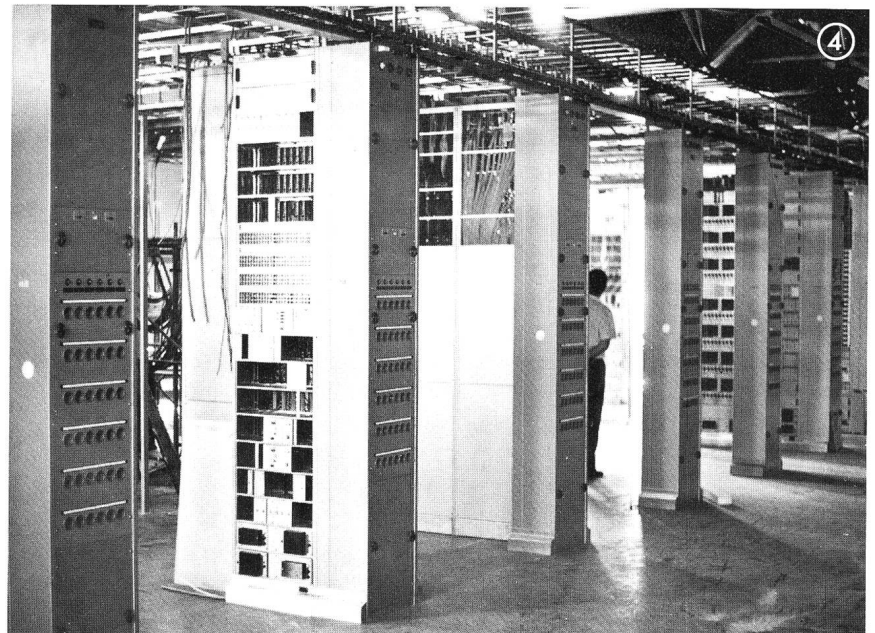
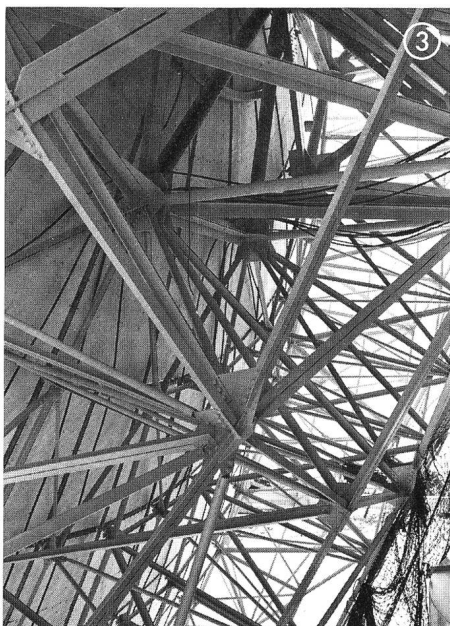
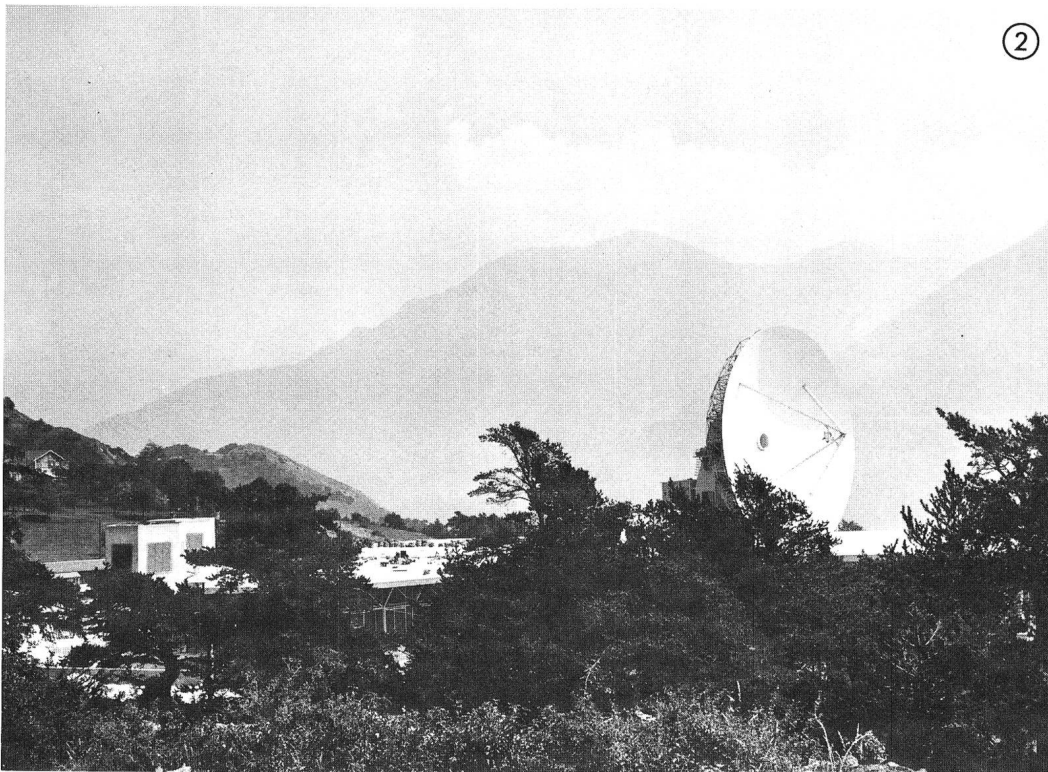
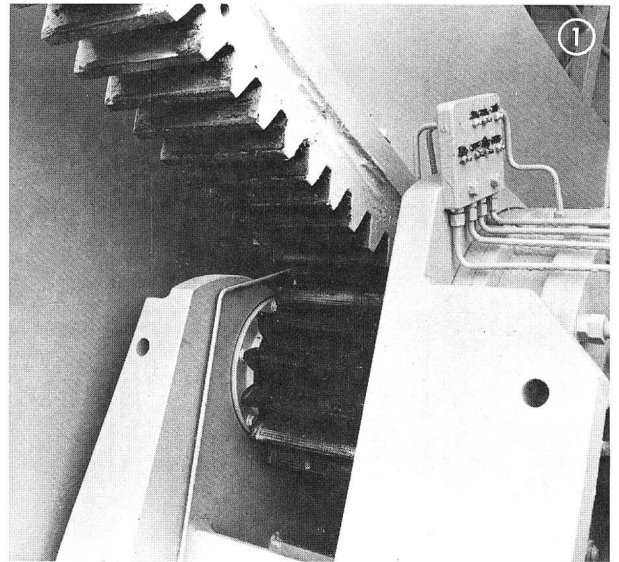
## Bibliographie

- [1] Proceedings of the IEEE-NASA Symposium on Short-Term Frequency Stability, Washington D.C. (USA). Dokument NASA SP-80 (1964).
- [2] L.S. Cutler, C.L. Searle. Some Aspects of the Theory and Measurement of Frequency Fluctuations in Frequency Standards. Proc. IEEE, vol. 54, pp. 136...154, (February 1966).
- [3] D.W. Allan. Statistics of Atomic Frequency Standards. ibid. pp. 221...230.
- [4] J.A. Barnes. Atomic Timekeeping and the Statistics of Precision Signal Generators. ibid. pp. 207...220.
- [5] R.F.C. Vessot, L. Mueller, J. Vanier. The specification of Oscillator Characteristics from Measurements made in the Frequency Domain. ibid. pp. 199...207.
- [6] J.A. Barnes, A.R. Chi, L.S. Cutler, D.J. Healey, D.B. Leeson, T.E. McGunigal, J.A. Mullen, W.L. Smith, R. Sydnor, R.F.C. Vessot, G.M.R. Winkler. Characterization of Frequency Stability. NBS Technical Note 394 (October 1970), ebenfalls veröffentlicht in IEEE Trans IM-20, N° 2, pp. 105...120 (May 1971).
- [7] W.R. Atkinson, L. Fey, J. Newman. Spectrum Analysis of extremely low frequency variations of quartz oscillators. Proc. IEEE (Correspondence), vol. 51, p. 379, February 1963.
- [8] J.H. Shoaf, D. Halford, A.S. Risley. Frequency Stability Specification and Measurement: High Frequency and Microwave Signals. NBS Technical Note 632 (January 1973).
- [9] E.J. Baghdady, R.D. Lincoln, D.B. Nelin. Short Term Frequency Stability: Characterization, Theory and Measurement. Proc. IEEE, vol. 53, pp. 704...722 (July 1965).
- [10] J.A. Barnes. Tables of Bias Functions,  $B_1$  and  $B_2$  for Variances Based on Finite Samples of Processes with Power Law Spectral Densities. NBS Technical Note 375 (January 1969).
- [11] R.A. Baugh. Frequency Modulation Analysis with the Hadamard Variance. Proc. 25th Annual Symposium on Frequency Control, U.S. Army Electronics Command, Ft. Monmouth, New Jersey.
- [12] G. Becker. Über die Begriffe Phase, Phasenzeit und Phasenwinkel bei zeitabhängigen Vorgängen. PTB-Mitteilungen 5/71, pp. 348...352.

Die Bauarbeiten an der Satelliten-Bodenstation Leuk machen gute Fortschritte. Mitte August – 13 Monate nach Baubeginn – war die 30-m-Parabolantenne fertig montiert, während im Betriebsgebäude die Installation der radioelektrischen, elektrischen und übrigen Anlagen zügig vorankam. Unsere Ende August aufgenommenen Bilder sollen einen ersten Eindruck vermitteln.

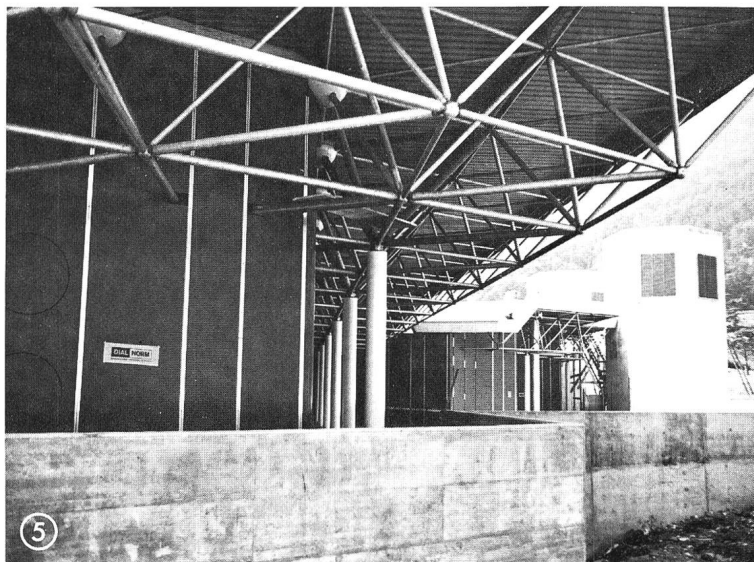
La construction de la station terrienne pour satellites de Loèche progresse normalement. Au milieu d'août – 13 mois après le début des travaux – le montage de l'antenne parabolique de 30 m de diamètre était terminé, alors que dans le bâtiment d'exploitation, l'installation des équipements radioélectriques, électriques et autres avançait à grands pas. Nos photos, prises à fin août, donnent une première impression de l'état des lieux.

Die Antenne ist vom Rhonetal aus kaum zu sehen, erst wer sich Richtung Albinen begibt, erblickt sie plötzlich (2) und hat von weiter oben einen guten Überblick über die Gesamtanlage (7). Das Y-förmige, flache Betriebsgebäude (mit seinen beiden Ventilationstürmen) ist eine Stahlrohrkonstruktion mit demontablen Elementwänden und einer Rampe rundherum (5). Die Antenne von rückwärts (8) mit den beiden kleinen Apparaterräumen dahinter und ein Blick ins Stahltragwerk (3) für die 300 Antennensegmente. Die ca. 400 t schwere Antenne ist horizontal dreh- und mit diesem riesigen Zahnrad (1) auch neigbar. Das Innere des Betriebsgebäude glich zur Zeit der Reportage noch einer Fabrikhalle (6), in der



## Satelliten-Bodenstation Leuk VS

# La station terrienne pour satellites de Loèche VS

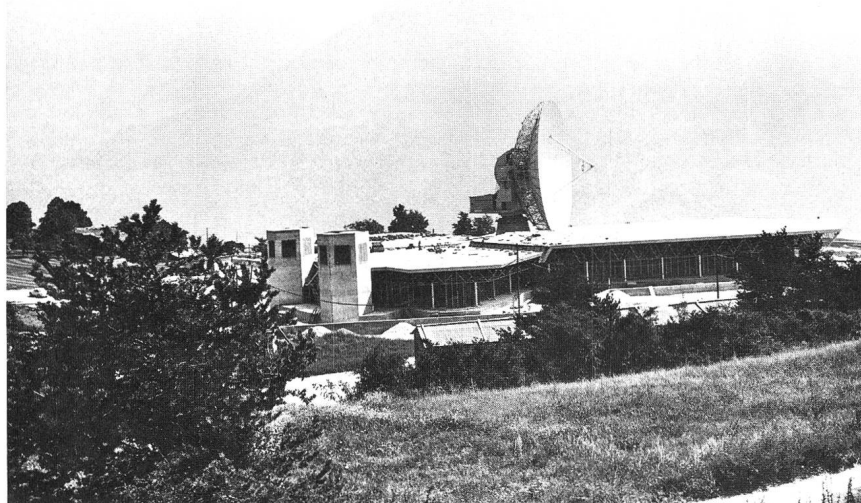


emsg gearbeitet wurde, wo aber bereits z. B. die Trägerausrüstung (4) für den Anschluss ans Koaxialkabelnetz nahezu fertiggestellt war.

De la vallée du Rhône, l'antenne n'est pratiquement pas visible, pour n'apparaître brusquement qu'au promeneur qui se dirige vers Albinen (2), et qui, d'un peu plus haut, aura une vue d'ensemble des installations (7). Le bâtiment d'exploitation plat, en forme de Y (avec ses deux tours de ventilation), est une construction en tubes métalliques, avec parois élémentaires démontables, entourée d'une rampe d'accès (5). La face postérieure de l'antenne, avec à l'arrière les deux petits locaux d'appareils, est montrée en (8), alors que (3) représente une partie de la construction métallique supportant les 300 segments d'antenne. L'ensemble peut être déplacé dans le plan horizontal et l'inclinaison du miroir parabolique est réglée par l'énorme couronne dentée (1). A l'époque du reportage, le bâtiment d'exploitation ressemblait encore à une halle de fabrication (6), dans laquelle on travaillait assidûment aux côtés d'installations terminées, telles les équipements à courants porteurs pour le raccordement au réseau des câbles coaxiaux (4).



⑦



⑧

